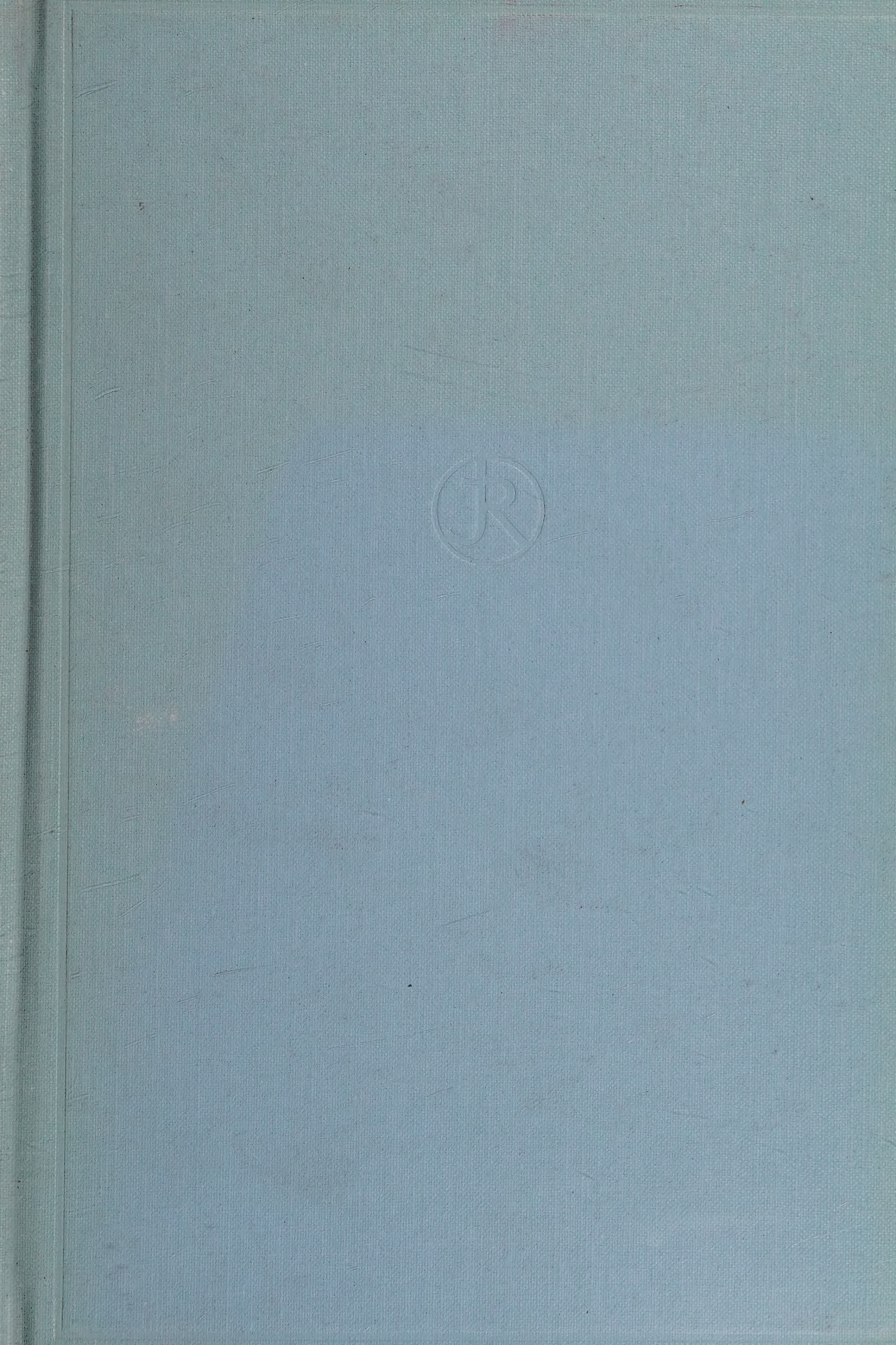




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 15

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК

МОСКВА ★ 1951

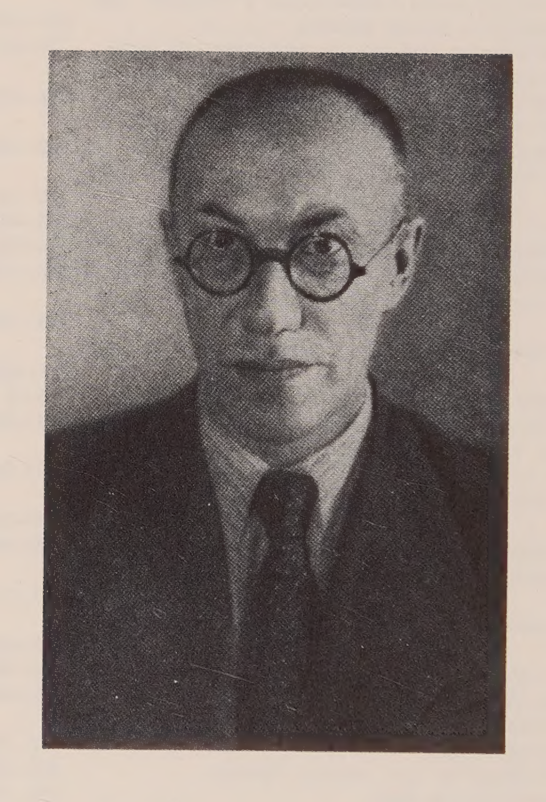
Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 15



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 3—8

М. В. КЕЛДЫШ

К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ МИХАИЛА АЛЕКСЕЕВИЧА ЛАВРЕНТЬЕВА

19 ноября 1950 г. исполнилось 50 лет академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву. Вместе с этой датой мы отмечаем 30 лет плодотворной и многообразной научной деятельности Михаила Алексеевича. Почти 20 лет Михаил Алексеевич работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР, являясь одним из наиболее активных его сотрудников.

М. А. Лаврентьев принадлежит к числу крупнейших советских ученых. Являясь академиком Академии Наук СССР, М. А. Лаврентьев состоит также действительным членом Академии Наук Украинской ССР и действительным членом Академии Артиллерийских наук. В течение ряда лет М. А. Лаврентьев был вице-призедентом Академии Наук УССР.

С самого начала своей научной деятельности, в двадцатых годах, М. А. Лаврентьев дал ряд крупных и оригинальных результатов в области теории функций действительного переменного, выдвинувших его тогда в число лучших молодых математиков. В последующие годы М. А. Лаврентьев получает ряд выдающихся результатов по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. Однако основной областью работы Михаила Алексеевича на долгие годы становится теория функций комплексного переменного. Здесь им создано новое геометрическое направление, и громадное количество ярких результатов, полученных им, выдвигает его в число крупнейших математиков.

Созданные М. А. Лаврентьевым новые методы решения внутренних и граничных задач теории функций явились основой нового направления теории функций комплексного переменного. Среди блестящих результатов, полученных здесь Михаилом Алексеевичем, мы отметим детальное метрическое изучение соответствия границ при конформном отображенни, многие теоремы о поведении конформного отображения внутри области, открытие новых метрических свойств классов римановых поверхностей и замечательные результаты о функциях, представимых сходящимися рядами полиномов.

В следующем крупном цикле работ Михаил Алексеевич создает теорию квази-конформных отображений — непрерывных отображений, которые стоят в таком же отношении к самым общим самосопряженным эллиптическим системам, в каком конформные отображения стоят по отношению к уравнению Лапласа. Эта теория является основой геометрических методов решения широкого круга задач математики и математической

физики. М. А. Лаврентьев приложил ее к теории типа римановых поверхностей, к задачам конформного отображения римановых многообразий, к теории струй, к теории волн и к решению ряда других вопросов.

Математические работы М. А. Лаврентьева тесно переплетаются с его исследованиями по механике. М. А. Лаврентьев является создателем большого числа новых теорий в механике непрерывной среды. В его работах по механике замечательно то, что он не просто прилагает математические методы к задачам механики, а ставит новые механические задачи и проливает свет на самые основы механических явлений. В механике Михаил Алексеевич сочетал теоретические исследования с постановкой блестящих экспериментов, раскрывших совершенно новые факты. Он внес крупный вклад в теорию крыла, в теорию удара тел о воду, теорию струй, теорию волн, теорию устойчивости стержней, теорию взрыва и т. д. Многие из этих задач были впервые поставлены в работах Михаила Алексеевича. Открытые в последние годы Михаилом Алексеевичем новые приложения гидродинамики идеальной жидкости к вопросам, которые на первый взгляд отстояли чрезвычайно далеко от гидродинамики, принадлежат к самым выдающимся теориям механики непрерывной среды.

В работах Михаила Алексеевича по механике замечательно то, что они не только освещают явления, но и дают основу для создания новых конструкций.

Широкий творческий размах Михаила Алексеевича, его энтузиазм в науке, богатство новых идей — все это всегда привлекало к нему молодежь. Где бы ни работал Михаил Алексеевич — в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР, в Университете, в ЦАГИ, в Академии Наук Украинской ССР — всегда он был окружен учениками, которые продолжали его исследования, развивали его методы.

Михаил Алексеевич создал крупные школы в области теории функций и в области механики непрерывной среды. Ряд научных направлений, ведущих свое начало от работ Михаила Алексеевича, стоит в настоящее время в центре советской математики и механики. Среди учеников Михаила Алексеевича имеется немало крупных математиков и механиков. Можно смело сказать, что имевшее место в последние годы развитие прикладных направлений в советской математической науке во многом обязано Михаилу Алексеевичу, так как он сам дал ряд крупнейших прикладных работ, и большое число советских механиков является его учениками.

Научное влияние М. А. Лаврентьева распространяется не только на ученых, но и на большое число инженеров, работающих в разнообразных областях новой техники.

Умение Михаила Алексеевича сплотить около себя научный коллектив объясняется не только его громадным научным авторитетом, но также его личным обаянием всегда простого и приветливого человека.

М. А. Лаврентьев находится в расцвете своих творческих сил. В настоящее время он взял на себя одну из самых трудных и ответственных задач, возлагаемых страной на математическую науку, — создание новой вычислительной техники.

За свою плодотворную деятельность М. А. Лаврентьев награжден правительством орденом Отечественной войны второй степени и двумя орденами Трудового Красного Знамени. Его работы два раза были удостоены Сталинской премии первой степени.

Пожелаем Михаилу Алексеевичу успешно продолжать свою плодотворную работу на пользу нашей родине.

СПИСОК ТРУДОВ М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА

1924

1. Sur la représentation des fonctions mesurables B par les séries transfinies de polynomes (*Fund. Math.*, t. 5, 123—129).
2. Sur la recherche des ensembles homéomorphes (*Comptes Rendus*, t. 178, 187—190).
3. Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes. (*Fund. Math.*, t. 6, 149- 160).

1925

4. Sur les sous-classes de la classification de M. Baire (*Comptes Rendus*, t. 180, 111—114).
5. Sur une équation différentielle du premier ordre (*Math. Zeitschr.*, B. 23, 197—209).

1926

6. Sur quelques problèmes du calcul des variations (*Annali di Mat.*, 7—10).

1927

7. Sur la représentation conforme (*Comptes Rendus*, t. 184, 1407—1409).
8. Sur un problème de M. P. Montel (*Comptes Rendus*, t. 184, 1634—1637).

1928

9. Sur une méthode géometrique dans la représentation conforme (*Atti del Congr. Int. Mat.*, 3, 214—241).
10. Успехи теории функций действительного переменного в СССР [*Матем. сб.*, т. 35, доп. вып., 21—42 (совместно с Д. Е. Меньшовым)].

1929

11. Sur un problème de M. P. Montel (*Comptes Rendus*, t. 188, 689—691).
12. Sur la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme (*Матем. сб.*, т. 36, 112—115).

1930

13. Sur un problème minimal dans la représentation conforme (*Comptes Rendus*, t. 191, 827—829).
14. Sur l'existence de la dérivée-limite [*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 58, 175—198 (совместно с П. А. Бессоновым)].

1931

15. Sur la représentation conforme [*Comptes Rendus*, t. 191, 1426—1427 (совместно с В. М. Шепелевым)].
16. Sur l'existence des dérivée-limites [*Матем. сб.*, т. 38: 3 4, 51—58 (совместно с В. К. Гольцманом)].

1932

17. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы (*Труды ЦАГИ*, вып. 118, 1—56).

1933

18. Теория аналитических функций (обзор) (*Сборник «Математика в СССР за 15 лет»*, М., ГТТИ, 49—84).
19. Вариационное исчисление (обзор) [*Сборник «Математика в СССР за 15 лет»*, М., ГТТИ, 119—142 (совместно с Л. А. Люстерником)].

1934

20. Sur deux questions extrémales (*Матем. сб.*, т. 41, 157—165).
21. Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана (*Труды ЦАГИ*, вып. 155, 3—40).
22. К теории конформных отображений (*Труды физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, т. 5, 159—246).
23. Sur la représentation conforme (*Ученые зап. МГУ*, Т. 2 : 2, 39—42).

1935

24. Геометрические вопросы теории функций комплексного переменного (*Труды мат. съезда*, т. 1, 258 — 270).
25. О некоторых свойствах однолистных функций (*Доклады АН СССР*, т. 1, 1 — 4).
26. К теории конформных отображений [*Доклады АН СССР*, т. 1, 95 — 87 (совместно с М. В. Келдышем)].
27. Об абсолютных константах типа А. Блоха [*Доклады АН СССР*, т. 1, 279 — 284 (совместно с А. Ф. Бермантом)].
28. Sur l'ensemble des valeurs d'une fonction analytique [*Матем. сб.*, т. 42, 435 — 450 (совместно с А. Ф. Бермантом)].
29. Sur une classe de représentations continues (*Comptes Rendus*, t. 200, 1010 — 1013).
30. Sur une classe de représentations continues (*Матем. сб.*, т. 42, 407 — 424).
31. К теории крыла аэроплана (*Зап. О. Т. Г. ЦАГИ*).
32. К теории бипланной коробки [*Зап. О. Т. Г. ЦАГИ*, № 45, 39 — 40 (совместно с В. М. Шепелевым и Я. И. Секерж-Зеньковичем)].
33. К теории колеблющегося крыла [*Зап. О. Т. Г. ЦАГИ* (совместно с М. В. Келдышем).]
34. К теории бипланной коробки крыльев [*Труды ЦАГИ*, вып. 153, 1 — 38 (совместно с В. М. Шепелевым и Я. И. Секерж-Зеньковичем)].
35. Общая теория жесткого удара о воду [*Труды ЦАГИ*, вып. 152, 5 — 12 (совместно с М. В. Келдышем)].
36. Основы вариационного исчисления, ч. I [М. — Л., ОНТИ (совместно с Л. А. Люстерником)].
37. Основы вариационного исчисления, ч. II [М. — Л., ОНТИ (совместно с Л. А. Люстерником)].

1936

38. С константах А. Блоха [*Труды 2-го Всесоюзн. матем. съезда*, т. 2, 172 — 178 (совместно с А. Ф. Бермантом)].
39. О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях (*Доклады АН СССР*, т.4, 207 — 210).
40. О семействах однолистных функций (*Труды 2-го Всесоюзн. мат. съезда*, т. 2, 170 — 172).
41. О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций (*Матем. сб.*, т. 1 (43), 815—846).
42. Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes (*Actualités scient. et industrielle*, t. 441, 1—62).
43. Sur les suites de polynomes harmoniques [*Comptes Rendus*, т. 202, 1149—1157 (совместно с М. В. Келдышем)].

1937

44. Sur les suites convergentes de polynomes harmoniques [*Труды Тбилисск матем. ин-та АН Груз. ССР*, т. 1, 165—184 (совместно с М. В. Келдышем)].
45. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости [*Труды конференции по теории волнового сопротивления*; изд. ЦАГИ, 31—64 (совместно с М. В. Келдышем)].
46. О единственности задачи Неймана [*Доклады АН СССР*, т. 16, 151—152 (совместно с М. В. Келдышем)].
47. О некоторых свойствах однолистных функций [*Матем. сб.*, т. 2 (44), 319—326 (совместно с В. М. Шепелевым)].
48. Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes restifiables [*Ann. Scient. de l'Ecole Norm*,. t. LIV, 1—38 (совместно с М. В. Келдышем)].
49. Sur le problème de Dirichlet [*Comptes Rendus*, t. 204, 1788—1790 (совместно с М. В. Келдышем)].
50. Об устойчивости решений задачи Дирихле [*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 1, 551—595 (совместно с М. В. Келдышем)].

1938

51. К теории струй (*Доклады АН СССР*, т. 18, 225—226.)
52. О некоторых свойствах струйных течений (*Доклады АН СССР*, т. 20, 235—238).
53. К теории струйных течений (*Доклады АН СССР*, т. 20, 239—240).
54. Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей (*Доклады АН СССР*, т. 20, 241—242).
55. Об одном классе квази-конформных отображений и теории газовых струй (*Доклады АН СССР*, т. 20, 343—346).
56. О некоторых граничных свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй (*Матем. сб.*, т. 4 (46), 391—458).
57. Общий очерк развития теории функций комплексного переменного в СССР за время 1917—1927 [*Матем. сб.*, т. 35, доп. вып., 5—20 (совместно с И. И. Приваловым)].
58. К теории колеблющегося крыла [*Техн. зап. ЦАГИ*, № 45 (совместно с М. В. Келдышем)].
59. Курс вариационного исчисления [М.—Л., ГОНТИ, 1—192 (совместно с Л. А. Люстерником)].

1939

60. Об одной оценке для функции Грина [*Доклады АН СССР*, т. 24, 102—103 (совместно с М. В. Келдышем)].
61. Об одной задаче Карлемана [*Доклады АН СССР*, т. 23, 746—748 (совместно с М. В. Келдышем)].

1940

62. Квази-конформные отображения (*Сталинский сб.* АН УССР, 429—438).
63. О движении грунтовых вод в слоистом грунте [*Доклады АН УССР* (совместно с Погребисским)].
64. Об одной теореме Островского [*Сообщ. Груз. фил. АН СССР*, т. 1, 171-174 (совместно с Д. А. Квеселава)].

1941

65. Оценка для относительной гармонической меры. Прил. к кн. Р. Неванлинна «Однозначные аналитические функции» [М., ГТТИ, 365—379 (совместно М. В. Келдышем)].

1942

66. О некоторых приближенных формулах в задаче Дирихле (*Доклады АН УССР*, № 1—2, 1—6).

1943

67. К теории длинных волн (*Доклады АН СССР*, т. 41. № 7, 275—277).
68. Геометрический метод в теории волн и удлиненная волна (*Труды ин-та математики АН УССР*).

1946

69. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики (М.—Л., ГТТИ, 1—159).
70. Общая проблема квази-конформных отображений плоских областей (*Доклады АН СССР*, т. 3, 3—10).
71. Квази-конформные отображения и их производные системы (*Доклады АН СССР*, т. 52, 287—290).
72. К теории длинных волн (*Доклады АН УССР*, № 8, 13—69).

1947

73. Общая задача теории квази-конформных отображений плоских областей (*Матем. сб.*, т. 21 (63) : 2, 285—320).
74. Теория квазиконформных отображений (*Юбилейный сб.*, посв. 30-летию Великой Октябрьск. социал. рев., ч. 1, М.—Л., 96—113).
75. Про один клас квазі конформних відображень (*Збірн. праць Ін-ту мат. АН УССР*, №9, 7—54).

1948

76. Пути развития советской математики (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 12, 411—416).
77. Основная теорема теории квази-конформных отображений плоских областей (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 12, 513—554).

1949

78. Динамические формы потери устойчивости упругих систем [*Доклады АН СССР*, т. 64, 779—782 (совместно с А. Ю. Ишлинским)].

1950

79. К проблеме уравнений смешанного типа [*Доклады АН СССР*, т. 70, 373—376 (совместно с А. В. Бицадзе)].

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 9—16

А. О. ГЕЛЬФОНД

О КВАЗИ-ПОЛИНОМАХ, НАИМЕНЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ НА ОТРЕЗКЕ [0,1]

В настоящей заметке даны нижние и верхние границы отклонения квази-полинома, наименее отклоняющегося от нуля.

Пусть задана последовательность действительных чисел

$$\alpha_n > \alpha_{n-1} > \cdots > \alpha_0 \geqslant 0.$$

Рассмотрим полином

$$\sum_0^n a_k x^{\alpha_k}, \quad a_n = 1.$$

Задача построения полинома этого вида, наименее отклоняющегося от нуля на отрезке [0, 1], весьма трудна при произвольных $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. При $\alpha_k = k$, $k = 0, \ldots, n$, эта задача до конца была решена еще П. Л. Чебышевым, которым и был установлен вид соответствующего полинома.

Целью настоящей заметки является получение нижней и верхней границ максимума модуля полинома, наименее уклоняющегося от нуля при произвольных $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Существование и единственность такого полинома давно установлены (см. монографию С. Н. Бернштейна: «Экстремальные свойства полиномов», М.—Л., 1937). Возможность нахождения верхней и нижней границ для максимума модуля полинома, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке [0, 1], опирается на то обстоятельство, что задача построения полинома такого вида, интеграл от квадрата которого достигает минимума, при одном линейном условии, наложенном на его коэффициенты, может быть полностью решена.

Введем следующие обозначения. Пусть $\tau < 1$ и

$$S(x) = \sum_0^n a_k x^{\alpha_k}, \quad a_n = 1,$$

удовлетворяет условию

$$\min_C \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n C_k x^{\alpha_k}\right)^2 \frac{dx}{x^\tau} = \int_0^1 S^2(x) \frac{dx}{x^\tau}, \quad C_n = 1. \tag{1}$$

Пусть также $T(x)$ будет полином,

$$T(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^{\alpha_k}, \quad A_n = 1,$$

максимум модуля которого M на отрезке $[0,1]$ будет минимален. Положим

$$R(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-\alpha_k),\qquad Q(x)=\prod_{0}^{n}(x+\alpha_k+1-\tau),$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{Q(\alpha_k)}{R'(\alpha_k)}x^{\alpha_k}. \tag{2}$$

ЛЕММА 1. *Если* $S(x)$ *удовлетворяет условию* (1), *то*

$$S(x)=(2\alpha_n+1-\tau)\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\sum_{k=0}^{n}\frac{Q(\alpha_k)}{R'(\alpha_k)}\frac{x^{\alpha_k}}{\alpha_n+\alpha_k+1-\tau}=$$

$$=(2\alpha_n+1-\tau)\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\int_0^1\varphi(xt)\frac{dt}{t^{\tau-\alpha_n}} \tag{3}$$

и

$$\int_0^1 S^2(x)\frac{dx}{x^\tau}=(2\alpha_n+1-\tau)\left[\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\right]^2. \tag{4}$$

Доказательство. Найдем те значения a_k, $k=0,1,\ldots,n-1$, при которых достигает своего минимума интеграл

$$\int_0^1\left(x^{\alpha_n}+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^{\alpha_k}\right)^2\frac{dx}{x^\tau}. \tag{5}$$

Дифференцируя по a_k, мы получим n уравнений для определения n чисел $a_0, a_1,\ldots,a_{n-1}$:

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{a_s}{\alpha_s+\alpha_k+1-\tau}=0,\quad a_n=1,\quad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{6}$$

Для решения этой системы рассмотрим соотношение

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{a_s}{x+\alpha_s+1-\tau}=\frac{P(x)}{Q(x)},\quad P(\alpha_k)=0,\quad k=0,\ldots,n-1. \tag{7}$$

Так как степень $P(x)$ не может быть больше n, то из условий (7) следует, что

$$P(x)=\frac{C}{x-\alpha_n}R(x),$$

где число C может быть найдено из соотношения

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{a_s}{x+\alpha_s+1-\tau}=C\frac{R(x)}{(x-\alpha_n)Q(x)}, \tag{8}$$

если обе его части умножить на $x+\alpha_n+1-\tau$ и положить $x=-\alpha_n-1+\tau$. Мы получим тогда, что

$$C\frac{Q(\alpha_n)}{R'(\alpha_n)(2\alpha_n+1-\tau)}=a_n=1. \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{0}^{n} \frac{a_s}{x+\alpha_s+1-\tau} = (2\alpha_n+1-\tau)\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\frac{R(x)}{(x-\alpha_n)Q(x)}. \tag{10}$$

Из этого тождества мы уже можем полностью определить все a_s, умножая обе его части на $x+\alpha_s+1-\tau$ и полагая $x=-\alpha_s-1+\tau$. Мы получим тогда, что

$$a_s = (2\alpha_n+1-\tau)\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\frac{Q(\alpha_s)}{(\alpha_n+\alpha_s+1-\tau)R'(\alpha_s)} \tag{11}$$

$$(s=0, 1, \ldots, n-1).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\alpha_k} = (2\alpha_n+1-\tau)\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\sum_{s=0}^{n}\frac{Q(\alpha_s)}{R'(\alpha_s)}\frac{x^{\alpha_s}}{\alpha_s+\alpha_n+1-\tau}. \tag{12}$$

Далее, в силу условий (6), будем иметь, что

$$\int_0^1 S^2(x)\frac{dx}{x^\tau} = \int_0^1 x^{\alpha_n}S(x)\frac{dx}{x^\tau} = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{\alpha_n+\alpha_k+1-\tau}. \tag{13}$$

Отсюда следует, благодаря соотношению (10), что

$$\int_0^1 S^2(x)\frac{dx}{x^\tau} = (2\alpha_n+1-\tau)\left[\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\right]^2. \tag{14}$$

С помощью этого последнего соотношения уже может быть найдена нижняя граница для M_n. Действительно, пусть

$$T(x) = x^{\alpha_n} + a_{n-1}x^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 x^{\alpha_1} + a_0 x^{\alpha_0}$$

будет полином с наименьшим максимумом модуля M_n на отрезке [0,1]. Тогда мы будем иметь очевидные неравенства

$$\int_0^1 S^2(x)\frac{dx}{x^\tau} \leqslant \int_0^1 T^2(x)\frac{dx}{x^\tau} < \frac{1}{1-\tau}M^2, \tag{15}$$

откуда и следует, с помощью неравенств (14), что

$$M > t^{\frac{1}{2}}\ \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_k)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\alpha_n+\alpha_k+t)}\sqrt{2\alpha_n+t}; \quad t=1-\tau>0, \tag{16}$$

где $t>0$ произвольно. Это число t следует выбрать в зависимости от $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ наилучшим образом. Для того чтобы правая часть неравенства (16) достигала своего максимума, необходимо, очевидно, взять t равным корню уравнения

$$\frac{\alpha_n + t}{t^2 + 2\alpha_n t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\alpha_n + \alpha_k + t}, \quad t > 0. \tag{17}$$

В частности, при $\alpha_k = k^\mu$, $0 < \mu < 1$, при больших n можно взять $t = Cn^{\mu-1}$, где $2C \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^\mu} = 1$.

Найдем для этого случая нижнюю грань M, ограничиваясь только главным членом в показателе. При помощи простых подсчетов мы получим неравенство

$$\ln M > -n \int_0^1 \ln \frac{1 + x^n}{1 - x^n} dx + o(n). \tag{18}$$

Перейдем к нахождению верхней границы для M. Оценим сверху $|S(x)|$ на отрезке [0,1]. Пусть $1 > x > 0$. Рассмотрим интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_C x^z \frac{d}{dz} \left[\frac{Q(z)}{(z + \alpha_n + 1 - \tau) R(z)} \right] dz = \ln x \sum_0^n \frac{Q(\alpha_k) x^{\alpha_k}}{(\alpha_k + \alpha_n + 1 - \tau) R'(\alpha_k)}, \tag{19}$$

где C есть окружность $\left| z - \frac{1}{2}\alpha_n \right| = \frac{1}{2}\alpha_n + \eta$, $\eta = 0$. Выбирая ε, $\frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} > \varepsilon > \alpha_0$, сдвигая путь интегрирования направо и заменяя окружность C прямой $Rz = \varepsilon$, мы получаем из соотношения (19), что

$$\int_0^1 \varphi(xt)\, t^{\alpha_n - \tau} dt = \frac{-Q(\alpha_0)\, x^{\alpha_0}}{(\alpha_n + \alpha_0 + 1 - \tau) R'(\alpha_0)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i \ln x} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} x^z \frac{d}{dz} \left[\frac{Q(z)}{(z + \alpha_n + 1 - \tau) R(z)} \right] dz, \tag{20}$$

откуда непосредственно следует, что при $z = \varepsilon + it$

$$\left| \int_0^1 \varphi(xt)\, t^{\alpha_n - \tau} dt \right| < \frac{Q(\alpha_0)}{(\alpha_n + \alpha_0 + 1 - \tau) R'(\alpha_0)} +$$

$$+ \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \int_0^\infty \left| \frac{d}{dz} \left[\frac{Q(z)}{(z + \alpha_n + 1 - \tau) R(z)} \right] \right| dt. \tag{21}$$

Далее, имеем

$$\left| \frac{d}{dz} \frac{\prod_0^{n-1} (z + \alpha_k + 1 - \tau)}{\prod_0^n (z - \alpha_k)} \right| < 2 \left| \frac{Q(\varepsilon + it)}{(\varepsilon + it + \alpha_n + 1 - \tau) R(\varepsilon + it)} \right| \sum_0^n \frac{1}{|\varepsilon + it - \alpha_k|} <$$

$$< 4 \left[\prod_0^{n-1} \frac{t^2 + (\varepsilon + \alpha_k + 1 - \tau)^2}{t^2 + (\alpha_k - \varepsilon)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t + \alpha_n - \varepsilon)(t + |\alpha_n - \varepsilon|)}, \tag{22}$$

так как $2(t^2 + a^2) \geqslant (t + a)^2$ при $t > 0$ и $a > 0$.

Пусть число ν определяется неравенствами $\alpha_\nu - \varepsilon > \alpha_\nu - \alpha_1 \geqslant 1 > \alpha_{\nu-1} - \alpha_1$. Положим

$$\rho_n = \sum_1^n \frac{1}{\alpha_k}. \tag{23}$$

Мы получим тогда очевидные неравенства:

$$\prod_0^{n-1}\left[\frac{t^2+(\varepsilon+\alpha_k+1-\tau)^2}{t^2+(\alpha_k-\varepsilon)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \prod_0^{n-1}\left|1+\frac{2\varepsilon+1-\tau}{\alpha_k-\varepsilon}\right| =$$

$$= \frac{\alpha_0+\varepsilon+1-\tau}{\varepsilon-\alpha_0}\prod_1^{\nu-1}\frac{\alpha_k+\varepsilon+1-\tau}{\alpha_k-\varepsilon}\prod_\nu^{n-1}\left(1+\frac{2\varepsilon+1-\tau}{\alpha_k-\varepsilon}\right) <$$

$$< C_0\frac{(2-\tau)^\nu}{(\varepsilon-\alpha_0)}\prod_1^{n-1}\left[1+(1+\varepsilon)\frac{2\varepsilon+1-\tau}{\alpha_k}\right] < C_0\frac{(2-\tau)^\nu}{(\varepsilon-\alpha_0)}e^{(1+\varepsilon)(2\varepsilon+1-\tau)\rho_n}, \tag{24}$$

где C_0 — постоянная, $C_0 \neq C_0(\varepsilon, \tau, n, \alpha_0)$.

Кроме этих неравенств, мы можем непосредственно получить оценку интеграла

$$\int_0^\infty \sum_0^n \frac{1}{t+|\alpha_k-\varepsilon|}\,\frac{dt}{t+\alpha_n-\varepsilon} = \frac{\ln\dfrac{\alpha_n-\varepsilon}{\varepsilon-\alpha_0}}{\alpha_n+\alpha_0-2\varepsilon} - \sum_1^n\frac{1}{\alpha_n-\alpha_k}\ln\left(1-\frac{\alpha_n-\alpha_k}{\alpha_n-\varepsilon}\right) <$$

$$< \frac{C_1}{\alpha_n}\left[\alpha_n+\ln\frac{1}{\varepsilon-\alpha_0}+n\ln\alpha_n\right], \tag{25}$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от ε, α_0, τ, n, так как при $a>0$ и $\delta \geqslant \delta_0 > 0$

$$\max_{0<x\leqslant a}\left[-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{a+\delta}\right)\right] < C(\delta_0)\frac{\ln(a+1)}{a}. \tag{26}$$

Далее, аналогично неравенству (24), мы будем иметь неравенство

$$\frac{Q(\alpha_0)}{(\alpha_n+\alpha_0+1-\tau)\,|R'(\alpha_0)|} < \frac{2\alpha_0+1-\tau}{\alpha_n-\alpha_0}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{2\alpha_0+1-\tau}{\alpha_k-\alpha_0}\right) <$$

$$< C_2\frac{(2-\tau)^\nu}{\alpha_n}e^{(1+\alpha_0)(2\alpha_0+1-\tau)\rho_n} < C_2\frac{(2-\tau)^\nu}{\alpha_n}e^{(1+\varepsilon)(2\varepsilon+1-\tau)}. \tag{27}$$

Из неравенства (22) при помощи неравенств (22), (24), (25) и (27) мы непосредственно получаем неравенство

$$\int_0^1 \varphi(xt)\,t^{\alpha_n-\tau}\,dt <$$

$$< C_3\frac{(2-\tau)^\nu}{\alpha_n(\varepsilon-\alpha_0)}\left[\varepsilon-\alpha_0+\alpha_n+\ln\frac{1}{\varepsilon-\alpha_0}+n\ln\alpha_n\right]e^{(1+\varepsilon)(2\varepsilon+1-\tau)\rho_n}, \tag{28}$$

$$C_3 = \max[C_1, C_2] \neq C_3(\alpha_0, \varepsilon, n, \tau),$$

где C_3 — постоянная. Отсюда, полагая $\varepsilon = \alpha_0 + \delta$, $0 < \delta < \max\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}, \frac{1}{2}\right]$ мы получаем, что

$$\left|\int_0^1 \varphi(xt)\, t^{\alpha_n - \tau}\, dt\right| < $$
$$< C_3 \frac{(2-\tau)^\nu}{\alpha_n}\left[1 + \frac{1}{\delta \ln \frac{1}{x}}\left(\alpha_n + \ln\frac{1}{\delta} + n \ln \alpha_n\right)\right] e^{(1+\varepsilon)(2\varepsilon + 1 - \tau)\rho_n}, \qquad (29)$$

где C_3 — постоянная, не зависящая от n, α_0, δ, τ.

Это неравенство позволяет оценить $|S(x)|$ при x, не слишком близких к единице. Именно, воспользовавшись представлением (3) и неравенством (29), мы получим неравенство

$$|S(x)| <$$
$$< 2C_3\left(1 + \frac{t}{\alpha_n}\right)(1+t)^\nu\left[1 + \frac{1}{\delta \ln \frac{1}{x}}\left(\alpha_n + \ln\frac{1}{\delta} + n\ln\alpha_n\right)\right] e^{(1+\varepsilon)(2\varepsilon + t)\rho_n}\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}, \qquad (30)$$

где $t = 1 - \tau > 0$ и $0 < \delta = \varepsilon - \alpha_0 < \max\left[1, \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}\right]$ — любые числа.

Для того чтобы оценить $|S(x)|$ при x, близких к единице, мы проведем дополнительное исследование функции $\varphi(x)$ [см. определение (2)].

Положим

$$P(x) = \lambda[Q(x) - R(x)], \qquad \lambda = \frac{1}{2\sum_0^n \alpha_k + (n+1)(1-\tau)}, \qquad (31)$$

где $Q(x)$ и $R(x)$ определяются формулами (2).

Тогда мы будем иметь, что

$$P(x) = \lambda\left[z^{n+1} + \left[\sum_0^n \alpha_k + (n+1)(1-\tau\right] z^n - z^{n+1} + \left(\sum_0^n \alpha_k\right) z^n + \cdots\right] =$$
$$= z^n + B_{n-1} z^{n-1} + \cdots + B_0 \qquad (32)$$

и

$$\frac{P(\alpha_k)}{Q(\alpha_k)} = \lambda, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (33)$$

Определим числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ из соотношения

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z + \alpha_k + 1 - \tau} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \lambda\left[1 - \frac{R(z)}{Q(z)}\right]. \qquad (34)$$

Умножая левые и правые части последнего соотношения на $z + \alpha_s + 1 - \tau$ и полагая после этого $z = -\alpha_s - 1 + \tau$, мы получим, что

$$a_s = \lambda\frac{Q(\alpha_s)}{R'(\alpha_s)}, \quad s = 0, 1, \ldots n. \qquad (35)$$

Умножая обе части соотношения (34) на $Q(z)$ и подсчитывая коэффициент при z^n в левой части этого равенства, мы непосредственно получаем соотношение

$$\sum_0^n a_k = 1. \tag{36}$$

Вспоминая определение функции $\varphi(x)$ [соотношения (2)], получаем:

$$\lambda\varphi(x) = \sum_0^n a_k x^{\alpha_k}. \tag{37}$$

Пользуясь последним соотношением и соотношениями (34) и (33), находим, что

$$\lambda^2 \int_0^1 \varphi^2(x)\frac{dx}{x^\tau} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{s=0}^n \frac{a_s}{\alpha_k+\alpha_s+1-\tau} = \sum_{k=0}^n a_k \frac{P(\alpha_k)}{Q(\alpha_k)} = \lambda \sum_{k=0}^n a_k = \lambda, \tag{38}$$

откуда и следует, что

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\frac{dx}{x^\tau} = 2\sum_{k=0}^n \alpha_k + (n+1)(\tau-1). \tag{39}$$

Далее, мы будем иметь неравенства

$$\left|\int_0^1 \varphi(xt)\frac{dt}{t^{\tau-\alpha_n}}\right| = x^{\tau-\alpha_n-1}\left|\int_0^x \varphi(t)\, t^{\alpha_n-\tau}dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant x^{\tau-\alpha_n-1}\left[\int_0^x t^{2\alpha_n-\tau}\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^x \varphi^2(t)\frac{dt}{t^\tau}\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant x^{-\frac{1-\tau}{2}}\left[\int_0^1 \varphi^2(t)\frac{dt}{t^\tau}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{40}$$

откуда, в силу соотношения (39), следует, что

$$\left|\int_0^1 \varphi(xt)\, t^{\alpha_n-\tau}\,dt\right| < x^{-\frac{1-\tau}{2}}\sqrt{2\sum_0^n \alpha_k + (n+1)(1-\tau)}\,. \tag{41}$$

Это последнее неравенство и представление (3) дают неравенство для $S(x)$:

$$|S(x)| < (2\alpha_n + t)\sqrt{2\sum_0^n \alpha_k + (n+1)(1-\tau)}\,\frac{R'(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\, x^{-\frac{t}{2}} \tag{42}$$

при любом $t = 1-\tau > 0$. Правая часть неравенства (30) монотонно растет вместе с ростом x на $[0, 1]$, а правая часть неравенства (42) монотонно убывает вместе с ростом x_1.

Отсюда следует наша основная

ТЕОРЕМА. *Если M_n есть максимум модуля полинома*

$$T(x) = \sum_0^n a_k x^{\alpha_k}, \quad a_n = 1,$$

наименее отклоняющегося от нуля на $[0, 1]$, *то*

$$M_n > t_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\alpha_n + t_0}\, \frac{\prod\limits_0^{n-1} (\alpha_n - \alpha_k)}{\prod\limits_0^{n} (\alpha_n + \alpha_k + t_0)} \tag{43}$$

при любом $t_0 > 0$ *и*

$$M_n < \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} [A_1,\ A_2]\, \frac{\prod\limits_0^{n-1} (\alpha_n - \alpha_k)}{\prod\limits_0^{n} (\alpha_n + \alpha_k + t)}, \tag{44}$$

где

$$A_1 = x^{-\frac{1}{2}}\, (2\alpha_n + t) \sqrt{2 \sum_0^n \alpha_k + t\,(n+1)} \tag{45}$$

и

$$A_2 = 2C_3\left(1 + \frac{t}{\alpha_n}\right)(1+t)^{\nu}\left[1 + \frac{1}{\delta \ln \frac{1}{x}}\left(\alpha_n + \ln \frac{1}{\delta} + n \ln \alpha_n\right) e^{(1+\varepsilon)\,(2\varepsilon + t)\,\rho_n}\right] \tag{46}$$

при любых $x,\ t > 0,\ \delta = \varepsilon - \alpha_0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 < \delta < \max\left[1,\ \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}\right]$. *Постоянная* C_3 *не зависит от* $x,\ \delta,\ n$ *и* t.

Рассмотрим опять частный случай. Пусть $\alpha_k = k^{\mu}$, $0 < \mu < \lambda$, $k = 0, 1, \ldots$. Положим

$$U_n = \frac{\prod\limits_0^{n-1} (n^{\mu} - k^{\mu})}{\prod\limits_0^{n} (n^{\mu} + k^{\mu})} = e^{-n \int\limits_0^1 \ln \frac{1 + t^{\mu}}{1 - t^{\mu}}\, dt + o\,(n)} \tag{47}$$

и дадим t_0 в неравенстве (43) значение $t_0 = \alpha n^{\mu - 1}$, где $\alpha \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + x^{\mu}} = 1$. Мы получим при помощи простых подсчетов, что

$$M_n > [\sqrt{2\alpha} + o\,(1)]\, n^{\mu - \frac{1}{2}}\, U_n. \tag{48}$$

Полагая в соотношениях (44), (45) и (46) $t = \varepsilon = \delta = n^{\mu - 1}$, $\ln \frac{1}{x} = n^{1-\mu}$, мы получим, так как $\alpha_0 = 0$, что

$$M_n < C_4 n^{\gamma} U_n, \quad \gamma > \max\left(1,\ \frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}\right),$$

где C_4 не зависит от n.

Неравенство (43) в смысле порядка роста точно для случая $\alpha_n = n$. Неравенство (44), повидимому, дает M_n с точностью до множителя порядка роста n^{λ}, $\lambda \leqslant \frac{3}{2}$.

Поступило
11. X. 1950

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 17—46

Н. М. КОРОБОВ

НОРМАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ОЦЕНКЕ СУММ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе изучается структура нормальных периодических систем, приводится общий метод, позволяющий построить каждую такую систему, и находятся оценки для сумм дробных долей показательной функции αq^x.

Глава 1. Системы $\rho_n(q)$

Первые два параграфа этой главы содержат определение, примеры и простейший метод построения нормальных периодических систем $\rho_n(q)$ (метод A_1).

В § 3 показано, что не каждая из существующих систем $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_1.

В четвертом и пятом параграфах выясняется строение систем $\rho_n(q)$ и дается общий метод (метод A_2), позволяющий построить каждую нормальную периодическую систему.

§ 1. Пусть n и q — целые числа, причем $q \geqslant 2$. Составим n-значные разложения чисел $0, 1, 2, \ldots, q^n - 1$ в системе счисления с основанием q.

$$\left.\begin{array}{rcccc} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{n}} \\ 0 = & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 1 = & 0 & 0\ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q-1 = & 0 & 0\ldots & 0 & q-1 \\ q = & 0 & 0\ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q^n-1 = & q-1 & q-1\ldots & q-1 & q-1 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Разложения (1) будем называть n-значными числами.

Существует восемь различных трехзначных чисел в системе счисления с основанием 2:

$$000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111. \qquad (1)'$$

Рассмотрим последовательность, состоящую из следующих десяти знаков:

$$1000101110.$$

Совокупность трехзначных чисел, которые можно получить из соседних знаков этой последовательности,

$$100,\ 000,\ 001,\ 010,\ 101,\ 011,\ 111,\ 110,$$

очевидно совпадает с совокупностью всех возможных трехзначных чисел (1)'.

Легко проверить, что в системе счисления с основанием 4 двузначные числа, получающиеся при рассмотрении всех пар соседних знаков семнадцатизначной последовательности

$$22330010203112132, \qquad (3)$$

совпадают с совокупностью всех возможных двузначных чисел:

$$00,\ 01,\ 02,\ 03,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33.$$

Нормальной периодической системой или *системой* $\rho_n(q)$ назовем последовательность из t знаков

$$\delta_1\,\delta_2\ldots\,\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n}\ldots\delta_t \qquad (4)$$

($t=q^n+n-1$; δ_ν — целые из интервала $0\leqslant\delta_\nu\leqslant q-1$), обладающую тем свойством, что совокупность n-значных чисел

$$\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n} \qquad (k=0,1,\ldots,q^n-1),$$

получающихся из соседних знаков последовательности (4), совпадает с совокупностью всех возможных n-значных чисел (1) в системе счисления с основанием q.

Последовательности (2) и (3), очевидно, представляют собой примеры систем $\rho_3(2)$ и $\rho_2(4)$.

Существование нормальных периодических систем для любого n было доказано Гудом (6). Гуду принадлежит также пример системы $\rho_6(2)$.

Примеры систем $\rho_n(q)$ при малых значениях n и q ($n<5$, $q=2$) строятся легко. Нахождение систем $\rho_5(2)$ несколько труднее. Без знания общего метода построения систем $\rho_n(q)$ найти примеры $\rho_n(q)$ для $n>5$ весьма трудно уже при $n=6$ и $q=2$. Такой метод, дающий вместе с тем доказательство существования систем $\rho_n(q)$, отличное от доказательства Гуда, был получен в моей работе (3). Для случая двоичной системы счисления этот метод состоит в следующем:

Метод A (для $q=2$). *Первые n знаков выбираем равными единице. Далее приписываем справа ноль до тех пор, пока получающиеся при этом новые n-значные числа встречаются впервые. Единицу приписываем лишь в том случае, когда приписывание нуля приводит к уже встречавшемуся n-значному числу. Приписывание заканчиваем, когда любой новый знак приводит к n-значному числу, которое уже встречалось.*

Таким образом, построение $\rho_n(2)$ методом A представляет собой рекуррентный процесс, позволяющий по уже выбранным $k+n-1$ знакам

$$\delta_1\ldots\delta_n\ldots\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n-1} \qquad (k\geqslant 1) \qquad (5)$$

выбирать следующий знак δ_{k+n}:

$$\delta_{k+n}=\begin{cases}0, \text{ если } \delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n-1}0\neq\delta_{\nu+1}\ldots\delta_{\nu+n} & (\nu=0,1,\ldots,k-1),\\ 1 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство того, что невозможность дальнейшего приписывания знаков в последовательности (5) наступает лишь когда выписанные зна-

ки образуют систему $\rho_n(2)$, было проведено в ([3]). Здесь мы получим это доказательство как следствие из более общего метода построения систем $\rho_n(q)$ — метода A_1.

С помощью метода A без труда строятся системы $\rho_5(2)$, $\rho_6(2)$ и т. д.

$$\rho_5(2) = 111110000010001100101001110101101111,$$

$$\rho_6(2) = 11111100000010000110001010001110010$$
$$01011001101001111010101101110111111,$$

$$\rho_7(2) = 1111111000000010000001100001010000$$
$$1110001001000101100011010001111001$$
$$0011001010100101110011011001110100$$
$$1111101010110101111011011101111111.$$

§ 2. Метод A_1. *Выберем первые n знаков $\delta_1, \ldots, \delta_n$ произвольно. Знаки $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}$ и т. д. будем приписывать по следующему общему правилу: пусть уже выписан $k+n-1$ знак*

$$\delta_1 \ldots \delta_n \ldots \delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1} \qquad (k \geqslant 1). \tag{6}$$

Рассмотрим $n-1$-значное число $\delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1}$, стоящее на конце последовательности (6). *Пусть последние μ знаков этого числа $(0 \leqslant \mu \leqslant n-1)$ образуют наибольшую группу, совпадающую с группой начальных знаков $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_\mu$. Выберем теперь знак δ_{k+n} или любым, отличным от $\delta_{\mu+1}$, но так, чтобы получающееся при этом новое n-значное число $\delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1} \delta_{k+n}$ не совпадало ни с одним из уже выписанных в* (6) *n-значных чисел $\delta_{\nu+1} \ldots \delta_{\nu+n}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k-1)$, или равным $\delta_{\mu+1}$, если приписывание любого знака, отличного от $\delta_{\mu+1}$, приводит к уже встречавшемуся в* (6) *n-значному числу. Процесс приписывания прекращаем, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n-значному числу.*

Пусть невозможность дальнейшего приписывания знаков в последовательности (6) наступила при $k = \tau$ $(\tau \geqslant 1)$. Очевидно, что все n-значные числа, которые встретятся в получившейся при этом последовательности

$$\delta_1 \ldots \delta_n \ldots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \ldots \delta_{\tau+n-1}, \tag{7}$$

будут различны. Однако остается неясным, не могло ли приписывание новых знаков закончиться раньше, чем в (7) будет выписано каждое из существующих n-значных чисел.

Таким образом, чтобы доказать совпадение последовательности (7), построенной методом A_1, с некоторой системой $\rho_n(q)$, достаточно проверить, что среди n-значных чисел

$$\delta_{\nu+1} \ldots \delta_{\nu+n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, \tau-1), \tag{8}$$

содержащихся в последовательности (7), встретится каждое из существующих n-значных чисел (1).

Обозначим через β и $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ величины, каждая из которых, независимо от остальных, может принимать любое из q значений $0, 1, \ldots, q-1$. Покажем сперва, что в последовательности (7) встретится любое число вида

$$\beta_{n-1} \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{n-1} \qquad (\beta_{n-1} = 0, 1, \ldots, q-1). \tag{9}$$

Действительно, $n-1$-значное число $\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}$, которым заканчивается последовательность (7), встречается в ней с любым знаком справа (иначе процесс приписывания не был бы прекращен), следовательно, это число встречается в (7) ровно $q+1$ раз. При этом каждый раз к нему слева должны примыкать различные знаки, что возможно лишь в том случае, если один раз это число встретится в начале последовательности (7), т. е. если

$$\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}=\delta_1\ldots\delta_{n-1}. \tag{10}$$

Итак, в (7) встречается любое число вида $\beta_{n-1}\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}$ и, в силу (10), любое число вида $\beta_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-1}$ $(\beta_{n-1}=0,1,\ldots,q-1)$.

Разобьем теперь все n-значные числа на классы R_ν^n $(\nu=0,1,\ldots,n)$, относя к классу R_ν^n все числа, у которых наибольшая группа последних знаков, совпадающих со знаками $\delta_1\delta_2\ldots$, состоит из ν знаков. Числа класса R_ν^n будем записывать в виде $\beta'_\nu\ldots\beta'_{n-1}\delta_1\ldots\delta_\nu$. (Заметим, что не обязательно всякое число вида $\beta_\nu\ldots\beta_{n-1}\delta_1\ldots\delta_\nu$ принадлежит классу R_ν^n — оно может принадлежать к классу $R_{\nu_1}^n$, где $\nu_1>\nu$.)

Класс R_n^n состоит, очевидно, из единственного числа $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}\delta_n$; с этого числа начинается последовательность (7). Как было показано выше, все числа вида $\beta_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-1}$ также содержатся в (7). Таким образом, доказано, что все числа классов R_n^n и R_{n-1}^n встречаются в последовательности (7). Применим индукцию. Допустим, что в (7) содержатся все числа класса R_{n-s}^n $(s\geqslant 1)$. Покажем, что тогда в (7) содержатся также все числа класса $R_{n-(s+1)}^n$.

Рассмотрим $n-1$-значные числа

$$\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)},$$

принадлежащие классу $R_{n-(s+1)}^{n-1}$. Каждое такое число встретится среди n—1-значных чисел, с которых начинаются n-значные числа

$$\beta'_{n-s}\ldots\beta'_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s}$$

класса R_{n-s}^n. По индукционному предположению, в последовательности (7) содержится любое n-значное число вида

$$\beta'_{n-s}\ldots\beta'_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s},$$

а значит и всякое число вида

$$\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s}. \tag{11}$$

Согласно методу A_1, каждое из чисел (11) могло быть выписано в последовательности (7) лишь в том случае, когда в (7) уже встречалось любое число вида

$$\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)}\beta \quad (\beta\neq\delta_{n-s}). \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем, что каждое $n-1$-значное число

$$\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)} \tag{13}$$

класса $R_{n-(s+1)}^{n-1}$ встречается в (7) равно q раз. Ни одно из этих чисел не стоит в начале последовательности (7) (так как в начале (7) стоит число $\delta_1\ldots\delta_{n-1}$, принадлежащее классу R_{n-1}^{n-1}, отличному от класса

$R^{n-1}_{n-(s+1)}$ при $s \geqslant 1$). Но тогда каждое $n-1$-значное число (13) встретится в последовательности (7) с любым знаком слева и, следовательно, в (7) содержатся все n-значные числа вида

$$\beta_{n-(s+1)}\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)},$$

а вместе с тем и все числа класса $R^n_{n-(s+1)}$.

Итак, последовательность (7) содержит все классы $R^n_\nu, \nu = n, n-1, \ldots, 1, 0$ (а значит и все n-значные числа) и, таким образом, представляет собой некоторую систему $\rho_n(q)$.

Отсюда непосредственно следует, что и метод A, указанный выше для случая $q=2$, приводит к построению систем $\rho_n(2)$, так как он является частным случаем метода A_1. (Легко проверить, что метод A для $q=2$ получается из метода A_1 при $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}\delta_n = 11\ldots11$.)

§ 3. Покажем, что не всякая система $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_1.

Прежде всего заметим, что для каждой системы $\rho_n(q)$

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1} \tag{14}$$

справедливо равенство

$$\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1} = \delta_1\ldots\delta_{n-1}, \tag{10}$$

доказанное ранее [см. (10)] для систем $\rho_n(q)$, полученных методом A_1. Действительно, $n-1$-значное число $\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}$, стоящее на конце системы (14), встречается в ней еще q раз (так как система (14), являясь системой $\rho_n(q)$, содержит каждое n-значное число вида $\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}\beta$, где $\beta = 0, 1, \ldots, q-1$). Дальше доказательство совпадает с доказательством (10).

В соответствии с (10)' будем в дальнейшем системы $\rho_n(q)$ записывать в виде

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau \mid \delta_1\ldots\delta_{n-1} \text{ или } \delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-1} \quad (\tau = q^n), \tag{15}$$

причем систему из первых q^n знаков

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau \tag{15'}$$

будем называть *системой* $\rho'_n(q)$. Произведем в $\rho'_n(q)$ произвольную циклическую перестановку знаков:

$$\delta_{k+1}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_k. \tag{16}$$

Припишем в (16) справа $n-1$-значное число $\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n-1}$; тогда получим последовательность

$$\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n-1}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_k\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n-1}. \tag{17}$$

Эта последовательность содержит все n-значные числа, встречающиеся в (15), и, следовательно, также представляет собой некоторую систему $\rho_n(q)$.

Две системы $\rho_n(q)$ будем называть *существенно различными*, если соответствующие им системы $\rho'_n(q)$ никакой циклической перестановкой

нельзя перевести друг в друга. Системы считаем просто *различными*, если не все их знаки соответственно совпадают. Так, например, существует всего 4 различных системы $\rho_2(2)$:

$$1100 \mid 1, \quad 1001 \mid 1, \quad 0011 \mid 0, \quad 0110 \mid 0.$$

Среди этих систем нет существенно различных. Системы $\rho_3(2)$

$$01000111 \mid 01 \text{ и } 11100010 \mid 11$$

не только различны, но и существенно различны; системы (15) и (17) не будут существенно различны.

Как показано в ([8]), число существенно различных систем $\rho_n(2)$ для всякого n равно 2^r, где $r = 2^{n-1} - n$. Обозначим через T_n число существенно различных систем $\rho_n(2)$, которые могут быть получены методом A_1. Так как в методе A_1 при $q = 2$ все знаки, начиная с δ_{n+1}, определяются единственным образом, то число различных систем $\rho_n(2)$, получаемых методом A_1, равно числу различных n-значных чисел $\delta_1 \ldots \delta_n$, т. е. равно 2^n. Некоторые из этих 2^n систем могут не быть существенно различными, так что

$$T_n \leqslant 2^n.$$

Но при $n > 4$

$$2^n < 2^r \quad (r = 2^{n-1} - n)$$

и, следовательно,

$$T_n < 2^r \quad (n \geqslant 5).$$

Таким образом, для $n \geqslant 5$ методом A_1 нельзя получить все системы $\rho_n(q)$. (Уже при $n = 5$ из 2048 существующих существенно различных систем $\rho_5(2)$ при помощи метода A_1 можно получить не больше 32 систем.)

§ 4. Возникает вопрос о методе, который позволил бы построить любую из существующих систем $\rho_n(q)$.

Изложению такого метода предпошлем несколько вспомогательных предложений. Рассмотрим систему $\rho_n(q)$:

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1} \ldots \delta_\tau \delta_1 \ldots \delta_{n-1} \quad (\tau = q^n). \tag{18}$$

Пусть $\delta_{k1}\delta_{k2} \ldots \delta_{kn-1}$ — произвольное $n-1$-значное число, отличное от $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$. Это число встречается в системе (18) ровно q раз. Каждый раз знаком, примыкающим к нему справа, число $\delta_{k1} \ldots \delta_{kn-1}$ дополняется до некоторого n-значного числа. Пусть $\delta_{k1} \ldots \delta_{kn-1}\delta_{kn}$ — последнее (считая слева направо) из этих n-значных чисел. Назовем полученную таким образом совокупность из $s = q^{n-1} - 1$ n-значных чисел

$$\delta_{k1} \ldots \delta_{kn-1}\delta_{kn} \quad (k = 1, 2, \ldots, q^{n-1} - 1) \tag{19}$$

системой, соответствующей данному $\rho_n(q)$. Назовем, далее, *особой системой* всякую совокупность n-значных чисел

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}\delta_{12}\ldots\delta_{1n-1}\delta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{k1}\delta_{k2}\ldots\delta_{kn-1}\delta_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{s1}\delta_{s2}\ldots\delta_{sn-1}\delta_{ns} \end{array}\right\} \quad (s=q^{n-1}-1) \tag{20}$$

(δ_{ik} — целые из интервала $0 \leqslant \delta_{ik} \leqslant q-1$), для которой выполняются условия:

(a) *все* $n-1$*-значные числа* $\delta_{k1}\ldots\delta_{kn-1}$ $(k=1,\ 2,\ldots,q^{n-1}-1)$ *различны, причем ни одно из них не равно* $\delta_{12}\ldots\delta_{1n}$ *(таким образом, среди чисел* $\delta_{k1}\ldots\delta_{kn-1}$ *встречаются все возможные* $n-1$*-значные числа за исключением числа* $\delta_{12}\ldots\delta_{1n}$);

(b) *возможно такое расположение строк* (20), *что (если считать его выполненным) для* $k \geqslant 2$ *всякое* $n-1$*-значное число* $\delta_{k2}\ldots\delta_{kn}$ *равно или дному из чисел* $\delta_{\nu 1}\ldots\delta_{\nu n-1}$ $(\nu=1,\ 2,\ldots,k-1)$, *или числу* $\delta_{12}\ldots\delta_{1n}$.

Так, например, системам $\rho_3(2)$ и $\rho_2(4)$

1000101110 и 22330010203112132

будут соответствовать системы

$$\left.\begin{array}{r} 110 \\ 011 \\ 001 \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{r} 32 \\ 03 \\ 13 \end{array}\right\}. \tag{21}$$

Системы (21) являются, очевидно, особыми.

ЛЕММА 1. *Всякая система* (19), *соответствующая* $\rho_n(q)$, *является особой системой.*

Согласно определению (19), среди чисел $\delta_{k1}\ldots\delta_{kn-1}$ встречаются все $n-1$-значные числа, отличные от $\delta_1\ldots\delta_{n-1}$. Таким образом, для проверки свойства (a) надо лишь показать, что в (19) содержится хотя бы одно число вида $\beta\delta_1\ldots\delta_{n-1}$.

Рассмотрим сначала системы $\rho_n(q)$, для которых

$$\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2} \neq \delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}.$$

Число $\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2}\delta_{n-1}$, являясь последним из чисел системы (18), имеющих вид $\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2}\beta$, встретится среди чисел системы (19).

Для систем $\rho_n(q)$, в которых

$$\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2} = \delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1},$$

выполняются соотношения

$$\delta_\tau=\delta_1=\ldots=\delta_{n-1}; \qquad \delta_{\tau-1}\neq\delta_\tau,$$
$$\delta_{\tau-1}\delta_1\ldots\delta_{n-2} \neq \delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}.$$

Число $\delta_{\tau-1}\delta_1\ldots\delta_{n-2}\delta_{n-1}$, равное числу $\delta_{\tau-1}\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2}$, будет последним из чисел вида $\delta_{\tau-1}\delta_1\ldots\delta_{n-2}\,\beta$, встречающихся в (18). Таким образом, в (19) всегда содержится число $\beta\delta_1\ldots\delta_{n-1}$

$$\left(\beta=\begin{cases}\delta_{\tau-1} & \text{при } \delta_\tau=\delta_1=\ldots\delta_{n-1},\\ \delta_\tau & \text{в остальных случаях}\end{cases}\right)$$

и, следовательно, для систем, соответствующих $\rho_n(q)$, свойство (а) выполняется.

Допустим теперь, что некоторому $\rho_n(q)$

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-1}$$

соответствует система, не являющаяся особой из-за невыполнения свойства (b). Запишем эту систему в виде

$$\left.\begin{matrix}\delta_{11}\,\delta_{12}\ldots\delta_{1n-1}\,\delta_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta_{i1}\,\delta_{i2}\ldots\delta_{in-1}\,\delta_{in}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta_{i_11}\delta_{i_12}\ldots\delta_{i_1n-1}\delta_{i_1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta_{s1}\,\delta_{s2}\ldots\delta_{sn-1}\,\delta_{sn}\end{matrix}\right\}\quad \begin{matrix}(\delta_{12}\ldots\delta_{1n}=\delta_1\ldots\delta_{n-1};\\ s=q^{n-1}-1).\end{matrix} \tag{22}$$

Пусть $i-1$ — наибольший индекс при различных расположениях строк (22), для которого сохраняется свойство (b) $(i\geqslant 2)$.

Рассмотрим $n-1$-значное число $\delta_{i2}\ldots\delta_{in}$. По определению (19), числа

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1},\ \delta_{k1}\ldots\delta_{kn-1}\qquad (k=1,\ 2\ldots q^{n-1}-1) \tag{23}$$

совпадают с совокупностью всех существующих $n-1$-значных чисел. Таким образом, число $\delta_{i2}\ldots\delta_{in}$ встречается среди чисел (23). Согласно определению индекса i, это число не может совпасть ни с одним из чисел

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1},\ \delta_{k1}\ldots\delta_{kn-1}\qquad (k=1,\ 2\ldots i-1).$$

Следовательно, найдется $i_1\geqslant i$ такое, что

$$\delta_{i2}\ldots\delta_{in}=\delta_{i_11}\ldots\delta_{i_1n-1}\qquad (i_1\geqslant i).$$

Аналогично, для $n-1$-значного числа $\delta_{i_12}\ldots\delta_{i_1n}$, используя неравенство $i_1\geqslant i$, получим

$$\delta_{i_12}\ldots\delta_{i_1n}=\delta_{i_21}\ldots\delta_{i_2n-1}\qquad (i_2\geqslant i).$$

Продолжая этот процесс, придем в итоге к равенствам:

$$\begin{matrix}\delta_{i2}\ldots\delta_{in} & =\delta_{i_11}\ldots\delta_{i_1n-1} & (i_1\geqslant i)\\ \delta_{i_12}\ldots\delta_{i_1n} & =\delta_{i_21}\ldots\delta_{i_2n-1} & (i_2\geqslant i)\\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\\ \delta_{i_{r-1}2}\ldots\delta_{i_{r-1}n} & =\delta_{i_r1}\ldots\delta_{i_rn-1} & (i_r\geqslant i)\\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\end{matrix} \tag{24}$$

Очевидно, наступит момент, когда очередное $n-1$-значное число $\delta_{i_r 2} \ldots \delta_{i_r n}$ совпадет с одним из чисел

$$\delta_{i_\nu 1} \ldots \delta_{i_\nu n-1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, r;\ i_0 = i).$$

Пусть такое совпадение наступило для $\nu = p$:

$$\delta_{i_r 2} \ldots \delta_{i_r n} = \delta_{i_p 1} \ldots \delta_{i_p n-1} \quad (0 \leqslant p \leqslant r).$$

Положим $\delta_{i_\nu 1} = \lambda_\nu$ и рассмотрим последовательность

$$\lambda_p \lambda_{p+1} \ldots \lambda_r \lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1}. \tag{25}$$

В силу (24) получим

$$\lambda_p \lambda_{p+1} \ldots \lambda_{p+n-1} = \delta_{i_p 1} \delta_{i_{p+1} 1} \ldots \delta_{i_{p+n-1} 1} = \delta_{i_p 1} \delta_{i_p 2} \ldots \delta_{i_p n}.$$

Аналогично,

$$\lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \ldots \lambda_{p+n} = \delta_{i_{p+1} 1} \delta_{i_{p+1} 2} \ldots \delta_{i_{p+1} n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1} = \delta_{i_r 1} \delta_{i_r 2} \ldots \delta_{i_r n}.$$

Таким образом, n-значные числа

$$\lambda_\nu \ldots \lambda_{\nu+n-1} \qquad (\nu = p,\ p+1, \ldots, r),$$

содержащиеся в последовательности (25), принадлежат системе (22); все $n-1$-значные числа

$$\lambda_\nu \ldots \lambda_{\nu+n-2} \quad (\nu = p,\ p+1, \ldots, r+1)$$

встречаются среди чисел (24) и, следовательно, отличны от $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$. Наконец,

$$\lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1} = \delta_{i_r 2} \ldots \delta_{i_r n} = \delta_{i_p 1} \ldots \delta_{i_p n-1} = \lambda_p \ldots \lambda_{p+n-2},$$

так что

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_p \ldots \lambda_{p+n-2}. \tag{26}$$

Пусть $p < r$. Легко показать, что каждое n-значное число $\lambda_\nu \ldots \lambda_{\nu+n-1}$ $(\nu = p, \ldots, r-1)$ встретится в $\rho_n(q)$ левее числа $\lambda_{\nu+1} \ldots \lambda_{\nu+n}$.

Действительно, согласно определению (22), число $\lambda_{\nu+1} \ldots \lambda_{\nu+n-1} \lambda_{\nu+n}$ является в $\rho_n(q)$ последним из n-значных чисел, начинающихся с $\lambda_{\nu+1} \ldots \lambda_{\nu+n-1}$. Таким образом, $\lambda_\nu \lambda_{\nu+1} \ldots \lambda_{\nu+n-1}$ могло бы встретиться правее числа $\lambda_{\nu+1} \ldots \lambda_{\nu+n-1} \lambda_{\nu+n}$ лишь в случае, если бы оно стояло на конце $\rho_n(q)$, что невозможно, так как $\lambda_\nu \ldots \lambda_{\nu+n-1} \neq \delta_1 \ldots \delta_{n-1}$.

Отсюда следует, что при $\nu < \nu_1$ каждое n-значное число $\lambda_\nu \ldots \lambda_{\nu+n-1}$ встретится в $\rho_n(q)$ раньше, чем любое из чисел $\lambda_{\nu_1} \ldots \lambda_{\nu_1+n-1}$. В частности, $\lambda_p \ldots \lambda_{p+n-1}$ встретится левее числа $\lambda_r \ldots \lambda_{r+n-1}$, что невозможно, так как, согласно (26),

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_p \ldots \lambda_{p+n-2}$$

и

$$\lambda_p \ldots \lambda_{p+n-2} \neq \delta_1 \ldots \delta_{n-1}.$$

В случае $p = r$, пользуясь (26), получим

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_r \ldots \lambda_r,$$

что снова невозможно, так как система, соответствующая ρ_n, не может содержать чисел, состоящих из одинаковых знаков.

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Каждая из существующих особых систем может быть получена следующим методом:*

Метод *B*. *В первой строке выписываем любое n-значное число* $\delta_{11}\delta_{12}\ldots\delta_{1n-1}\delta_{1n}$, *не все знаки которого одинаковы. (Таким образом,* $\delta_{11}\ldots\delta_{1n-1} \neq \delta_{12}\ldots\delta_{1n}$.) *Все остальные строки, начиная со второй, строим по следующему общему правилу: пусть уже выписано k строк* $(k \geqslant 1)$

$$\begin{matrix} \delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}\ldots\delta_{1n-1}\delta_{1n}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta_{k1}\delta_{k2}\delta_{k3}\ldots\delta_{kn-1}\delta_{kn}. \end{matrix}$$

Рассмотрим $n-1$*-значные числа*

$$\delta_{12}\ldots\delta_{1n},\ \delta_{\nu 1}\ldots\delta_{\nu n-1}\quad (\nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{27}$$

Назовем допустимыми числами те числа $\mu_1\ldots\mu_{n-1}$ *из совокупности* (27), *для которых* $\mu_1\ldots\mu_{n-2} = \delta_{13}\ldots\delta_{1n}$, *если* $\delta_{13}\ldots\delta_{1n}$ *встречалось среди чисел* $\delta_{\nu 2}\ldots\delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ *меньше* $q-1$ *раза, а также те, для которых* $\mu_1\ldots\mu_{n-2} \neq \delta_{13}\ldots\delta_{1n}$, *если* $\mu_1\ldots\mu_{n-2}$ *встречалось среди чисел* $\delta_{\nu 2}\ldots\delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ *меньше* q *раз.*

Для построения $k+1$*-й строки выберем* $\delta_{k+1\,2}\ldots\delta_{k+1\,n}$ *равным любому из допустимых чисел; знак* $\delta_{k+1\,1}$ *выберем так, чтобы число* $\delta_{k+1\,1}\ldots\delta_{k+1\,n-1}$ *отличалось от любого из чисел* (27).

Таким образом, $k+1$*-я строка построена. Построение методом B считаем законченным, когда построение очередной строки окажется невозможным.*

Докажем сперва, что метод *B* всегда приводит к некоторой особой системе.

Действительно, процесс построения строк не может закончиться из-за невозможности выбрать $\delta_{k+1\,1}$ (это следует из выбора допустимых чисел). Таким образом, построение заканчивается из-за невозможности выбрать $\delta_{k+1\,2}\ldots\delta_{k+1\,n}$, т. е. из-за того, что для некоторого $k = s$ группа допустимых чисел не будет содержать ни одного числа.

Выпишем строки, которые удается построить методом *B*:

$$\left.\begin{matrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots\delta_{1\,n-1} & \delta_{1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \ldots\delta_{k\,n-1} & \delta_{k\,n} \\ \delta_{k+1\,1} & \delta_{k+1\,2} & \ldots\delta_{k+1\,n-1} & \delta_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \ldots\delta_{s\,n-1} & \delta_{s\,n} \end{matrix}\right\}. \tag{28}$$

Так как каждое из чисел $\delta_{k+1\,2}\ldots\delta_{k+1\,n}$ содержится среди чисел (27) $(k = 1, 2, \ldots, s-1)$, то можно утверждать, что для системы (28)

выполняется свойство (b). Далее, из метода выбора знаков $\delta_{k+1\,1}$ следует, что все $n-1$-значные числа

$$\left.\begin{matrix} \delta_{11} \ldots \delta_{1\,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{s\,1} \ldots \delta_{s\,n-1} \end{matrix}\right\} \tag{29}$$

различны и не равны $\delta_{12} \ldots \delta_{1\,n}$. Таким образом, остается показать, что $s = q^{n-1} - 1$, т. е. что среди чисел (29) содержатся все $n-1$-значные числа, кроме $\delta_{12} \ldots \delta_{1\,n}$.

Рассмотрим числа (27) для $k = s$:

$$\delta_{12} \ldots \delta_{1\,n} \text{ и } \delta_{\nu\,1} \ldots \delta_{\nu\,n-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \tag{30}$$

Число $\delta_{12} \ldots \delta_{1\,n-1}$ встречается среди чисел $\delta_{\nu\,2} \ldots \delta_{\nu\,n-1} (\nu = 1, 2, \ldots s)$ $q-1$ или q раз, смотря по тому, совпадает оно с числом $\delta_{13} \ldots \delta_{1\,n}$ или нет (иначе группа допустимых чисел для $k = s$ содержала бы число $\delta_{12} \ldots \delta_{1\,n}$ и не была бы пустой). Но тогда среди чисел (30) встречается любое число вида

$$\beta_1 \delta_{12} \ldots \delta_{1\,n-1} \qquad (\beta_1 = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Допустим, что среди чисел (30) встречается любое число вида

$$\beta_i \beta_{i-1} \ldots \beta_1 \delta_{12} \ldots \delta_{1\,n-i} \qquad (0 \leqslant \beta_j \leqslant q-1;\ j = 1, 2, \ldots, i).$$

Тогда число $\beta_i \ldots \beta_1 \delta_{12} \ldots \delta_{1\,n-i-1}$ встречается среди чисел $\delta_{\nu\,2} \ldots \delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2 \ldots s)$ $q-1$ или q раз, смотря по тому, совпадает оно с $\delta_{13} \ldots \delta_{1\,n}$ или нет. Следовательно, любое число вида

$$\beta_{i+1} \beta_i \ldots \beta_1 \delta_{12} \ldots \delta_{1\,n-(i+1)}$$

также встречается среди чисел (30).

Таким образом, индукцией получаем, что среди чисел (30) встречается каждое число вида $\beta_{n-1} \beta_{n-2} \ldots \beta_1$, т. е. каждое $n-1$-значное число.

Следовательно,

$$s + 1 = q^{n-1},$$

и система (28) является особой.

Покажем теперь, что методом B можно получить любую из существующих особых систем. Допустим, что особая система

$$\left.\begin{matrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots \delta_{1\,n-1} & \delta_{1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i\,1} & \delta_{i\,2} & \ldots \delta_{i\,n-1} & \delta_{i\,n} \\ \delta_{i+1\,1} & \delta_{i+1\,2} & \ldots \delta_{i+1\,n-1} & \delta_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{s\,1} & \delta_{s\,2} & \ldots \delta_{s\,n-1} & \delta_{s\,n} \end{matrix}\right\} \quad (s = q^{n-1} - 1) \tag{31}$$

не может быть получена методом B.

Обозначим через i наибольшее число строк этой системы, построение которых методом B возможно. Так как первая строка системы (31) должна удовлетворить единственному требованию $\delta_{11} \ldots \delta_{1\,n-1} \neq \delta_{12} \ldots \delta_{1\,n}$ — тому же, как и первая строка в методе B, то получим, что $i \geqslant 1$.

Рассмотрим $(i+1)$-ю строку системы (31). Число $\delta_{i+11} \ldots \delta_{i+1\,n-1}$, по свойству (a), отлично от чисел

$$\delta_{12} \ldots \delta_{1n} \text{ и } \delta_{\nu 1} \ldots \delta_{\nu n-1} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots i). \qquad (31)'$$

Следовательно, $n-2$-значное число $\delta_{i+12} \ldots \delta_{i+1\,n-1}$ встречается среди чисел $\delta_{\nu 2} \ldots \delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2 \ldots i)$ меньше чем $q-1$ или чем q раз, в зависимости от выполнения или невыполнения равенства

$$\delta_{\nu 2} \ldots \delta_{\nu n-1} = \delta_{13} \ldots \delta_{1n}.$$

Так как, кроме того, из свойства (b) следует, что число $\delta_{i+12} \ldots \delta_{i+1n}$ совпадает с одним из чисел (31)', то $\delta_{i+12} \ldots \delta_{i+1n}$ является одним из допустимых чисел. Отсюда следует возможность построения методом B $i+1$-й строки системы (31), что противоречит выбору индекса i.

Итак, особая система (31) может быть построена методом B, и, таким образом, лемма 2 доказана полностью.

§ 5. Перейдем к формулировке общего метода построения систем $\rho_n(q)$.

Метод A_2. *Первые n знаков $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n$ выписываем произвольно. Выбираем какую-нибудь особую систему с $\delta_{12} \ldots \delta_{1n} = \delta_1 \ldots \delta_{n-1}$. Выписывание остальных знаков, начиная с $n+1$-го, производим по следующему общему правилу: к уже выписанным $n+k-1$ знакам*

$$\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1} \qquad (k \geqslant 1) \qquad (32)$$

приписываем справа знак δ_{k+n} так, чтобы получающееся при этом n-значное число $\delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1}\,\delta_{k+n}$ встречалось в последовательности (32) впервые и совпадало с одним из чисел выбранной особой системы лишь в случае, если все остальные числа вида $\delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1}\,\beta$ $(\beta \neq \delta_{k+n})$ в (32) уже встречались. Построение последовательности (32) заканчиваем, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n-значному числу.

ТЕОРЕМА. *Последовательности, построенные методом A_2, представляют собой системы $\rho_n(q)$; каждая из существующих систем $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_2.*

Доказательство. Пусть приписывание знаков в последовательности (32) закончилось при $k = \tau$ $(\tau \geqslant 1)$:

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1} \ldots \delta_\tau\delta_{\tau+1} \ldots \delta_{\tau+n-1}. \qquad (33)$$

Из выбора знаков δ_{k+n} $(k = 1, 2, \ldots, \tau-1)$ следует, что все n-значные числа, входящие в последовательность (33), различны. Таким образом, (33) будет системой $\rho_n(q)$, если среди чисел

$$\delta_{\nu+1} \ldots \delta_{\nu+n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, \tau-1)$$

встретится каждое существующее n-значное число.

Дословным повторением рассуждений, приведенных при рассмотрении метода A_1 (вывод равенства (10)), получим, что в последовательности (33) встречаются все числа вида

$$\beta\delta_1 \ldots \delta_{n-1} \text{ и } \delta_1 \ldots \delta_{n-1}\beta \qquad (0 \leqslant \beta \leqslant q-1).$$

Выпишем особую систему, при помощи которой строилась последовательность (33):

$$\left.\begin{matrix} \delta_{11}\ \delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n-1}\ \delta_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{\nu 1}\ \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1}\ \delta_{\nu n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{s1}\ \delta_{s2}\ \ldots\ \delta_{sn-1}\ \delta_{sn} \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n} = \delta_1\ \ldots\ \delta_{n-1}; \\ \\ s = q^{n-1} - 1). \end{matrix}$$

Из неравенства $\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n} = \delta_1\ \ldots\ \delta_{n-1}$ следует, что в (33) встречается каждое число вида

$$\beta\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n} \text{ и } \delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n}\beta \quad (\beta = 0, 1\ \ldots\ q-1) \tag{34}$$

Применим индукцию. Допустим, что в последовательности (33) содержатся любые n-значные числа вида

$$\beta\delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \text{ и } \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n}\beta \quad (\nu = 1, 2\ \ldots\ t;\ t \geqslant 1;\ 0 \leqslant \beta \leqslant q-1).$$

В частности, (33) содержит тогда все числа

$$\delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t)$$

и, следовательно, согласно методу A_2, в (33) встретятся все числа вида

$$\delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1}\ \beta.$$

По свойству (b), число $\delta_{t+12} \ldots \delta_{t+1n}$ совпадает с одним из чисел

$$\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n} \text{ или } \delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1} \quad (\nu = 1, 2\ \ldots\ t),$$

так что вместе с $\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n}\,\beta$ и $\delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1}\,\beta$ последовательность (33) содержит, в частности, каждое число

$$\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}\,\beta \qquad (\beta = 0, 1\ \ldots\ q-1).$$

Таким образом, $n-1$-значное число $\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}$ встречается в (33) q раз и, в силу этого *, (33) содержит все числа вида

$$\beta\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}.$$

Объединяя эти результаты, получим, что в последовательности (33) содержатся все числа вида

$$\beta\delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \text{ и } \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n}\,\beta \quad (\nu = 1, 2, \ldots, t+1;\quad 0 \leqslant \beta \leqslant q-1).$$

Итак, индукцией доказано, что в (33) встречаются все числа вида

$$\beta\delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \text{ и } \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n}\,\beta \qquad (1 \leqslant \nu \leqslant s;\ 0 \leqslant \beta \leqslant q-1)$$

и, в частности, все числа

$$\delta_{\nu 1}\ \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \qquad (\nu = 1, 2\ \ldots\ s).$$

Снова, в силу метода A_2, получим отсюда, что в (33) встречается любое число

$$\delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1}\ \beta, \quad (\nu = 1, 2\ \ldots\ s),$$

---

* Предполагаем $\delta_{t+12} \ldots \delta_{t+1n} \neq \delta_{12} \ldots \delta_{1n}$, так как для случая $\delta_{t+12} \ldots \delta_{t+1n} = \delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n}$ утверждение, что числа $\beta\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}$ встречаются в последовательности (33), совпадает с уже доказанным в (34).

а эти числа, вместе с числами $\delta_{12} \ldots \delta_{1n} \beta$, образуют совокупность всех n-значных чисел, чем доказано совпадение последовательности (33) с некоторым $\rho_n(q)$.

Согласно лемме 1, каждому $\rho_n(q)$ соответствует некоторая особая система. Очевидно, что построение $\rho_n(q)$ методом A_2 не накладывает на выбор знаков δ_k никаких ограничений, кроме тех, в силу которых участвующая в построении особая система становится системой, соответствующей полученному $\rho_n(q)$. Следовательно, метод A_2 позволяет получить все системы $\rho_n(q)$, которым соответствует фиксированная особая система. Но любая особая система, согласно лемме 2, может быть построена методом B. Таким образом, методом A_2 можно получить любую из существующих систем $\rho_n(q)$.

С помощью систем $\rho_n(q)$ в ([3]) было получено элементарное доказательство равномерности распределения функций αq^x для специальным образом построенных иррациональностей α. Во второй главе настоящей работы системы $\rho_n(q)$ существенно используются при доказательстве теорем о суммах дробных долей функций αq^x.

Глава II. О суммах дробных долей

Для случая линейной функции αx вопрос о суммах дробных долей подробно исследован в работах А. Я. Хинчина ([1]), Островского ([5]), Харди и Литтльвуда.

Доказано, что при иррациональном α

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \tag{1}$$

причем для всех иррациональных чисел α эту оценку нельзя улучшить.

Далее известны иррациональные α, для которых

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \tag{2}$$

и доказано, что дальнейшее улучшение этой оценки невозможно ни для какого α.

Наконец, почти для всех α справедлива оценка

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = \Omega(\ln P), \tag{3}$$

но при всяком $\varepsilon > 0$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(\ln^{1+\varepsilon} P). \tag{4}$$

В этой главе рассматриваются аналогичные вопросы для сумм дробных долей показательной функции αq^x, где q — целое ($q \geqslant 2$). При изучении сумм $\sum \{\alpha x\}$, очевидно, достаточно было ограничиться иррациональными числами α из интервала $(0,1)$; множество иррациональных чисел

совпадает с множеством чисел, для которых функция αx равномерно распределена.

Естественно и в случае сумм $\sum\{\alpha q^x\}$ рассматривать множество L чисел α $(0<\alpha<1)$, для которых дробные доли функции αq^x распределены равномерно *.

Доказательства основываются на применении систем $\rho_n(q)$ и на двух леммах, первая из которых сводит вопрос о суммах дробных долей к исследованию сумм знаков q-ичного разложения α. Вторая лемма позволяет, не нарушая равномерности распределения функции αq^x, так менять знаки разложения α, что их сумма, а следовательно, и сумма дробных долей, существенно меняется.

§ 1. ЛЕММА 1. *Пусть α задано в системе счисления с основанием $q\geqslant 2$: $\alpha=0,\delta_1\ldots\delta_k\ldots$; пусть, далее, $\mu\geqslant 1$ — произвольное целое. Тогда справедливо соотношение:*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\}=\frac{1}{q^{\mu}-1}\sum_{\nu=1}^{\mu}q^{\mu-\nu}\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+\nu}+\frac{\theta}{q^{\mu}-1}\quad(|\theta|\leqslant 1). \tag{5}$$

Доказательство. Для всякого целого $x\geqslant 1$

$$\{\alpha q^{\mu x}\}=0,\delta_{\mu x+1}\ldots\delta_{\mu x+k}\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta_{\mu x+k}}{q^k}.$$

Суммирование по x дает

$$S_\mu=\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q^k}\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+k}.$$

Разобьем внешнюю сумму на группы по μ слагаемых:

$$S_\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\mu}\frac{1}{q^{\mu k+\nu}}\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu(x+k)+\nu}. \tag{6}$$

Преобразуем теперь внутреннюю сумму:

$$\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu(x+k)+\nu}=\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+\nu}+\left(\sum_{x=P+1}^{P+k}\delta_{\mu x+\nu}-\sum_{x=1}^{k}\delta_{\mu x+\nu}\right);$$

в силу того, что $0\leqslant\delta_k\leqslant q-1$,

$$\left|\sum_{x=P+1}^{P+k}\delta_{\mu x+\nu}-\sum_{x=1}^{k}\delta_{\mu x+\nu}\right|\leqslant k(q-1)$$

и, следовательно,

$$\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu(x+k)+\nu}=\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+\nu}+\theta_k(q-1)k,\quad|\theta_k|\leqslant 1.$$

---

* Известно (7), что мера множества L равна 1; известны также (8) методы построения величин $\alpha\in L$.

Теперь (6) примет вид

$$S_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{q^\nu} \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} + \theta(q-1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{k}{q^{\mu k+\nu}}, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{7}$$

Пользуясь тем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{(q^\mu - 1)^2} \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{q^\mu - 1},$$

получаем из (7) утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть для* $\alpha' = 0{,}\delta'_1 \ldots \delta'_k \ldots$ *функция* $\alpha' q^x$ *равномерно распределена* ($\alpha' \in L$). *Пусть, далее, целые* $k_1 < k_2 < \ldots$ *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{k_{2s}}{k_{2s-1}} = 1, \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{k_{2s+1}}{k_{2s}} = \infty. \tag{8}$$

Определим α *разложением* $\alpha = 0, \delta_1 \ldots \delta_k \ldots$, *где*

$$\delta_k = \begin{cases} \delta'_k & \text{для } k_{2s} < k \leqslant k_{2s+1} \\ \text{произвольно} & \text{для } k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s} \end{cases} \quad (s = 1, 2 \ldots). \tag{9}$$

Тогда функция αq^x *также равномерно распределена.*

Доказательство. Оценим сперва сумму

$$S_N = \sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m \alpha q^x} \quad (m \geqslant 1 \text{ — целое}), \tag{10}$$

где $k_{2\nu} < N \leqslant k_{2\nu+1} - r_\nu$ и $r_\nu \to \infty$ при неограниченном возрастании ν. Из определения α следует, что на интервале суммирования

$$\{\alpha q^x\} = \{\alpha' q^x\} + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}, \quad |\theta_x| \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$|S_N| = \left| \sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m \left(\alpha' q^x + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}\right)} \right| \leqslant \left| \sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} \left| 1 - e^{2\pi i m \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}} \right|,$$

$$|S_N| \leqslant \left| \sum_{x=1}^{k_{2\nu}} e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \left| \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \frac{N - k_{2\nu}}{q^{r_\nu}} \cdot 2\pi m.$$

Пользуясь определением r_ν и тем, что $\alpha' \in L$, получим отсюда

$$S_N = o(N).$$

Для оценки суммы

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^x}$$

определим s из условия $k_{2s-1} \leqslant P < k_{2s+1}$. Возможны два случая: $P \leqslant k_{2s} + k_{2s-2}$ и $P > k_{2s} + k_{2s-2}$.

В первом случае

$$\left|\sum_{x=1}^{P}\right| = \left|\sum^{k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-1}-k_{2s-2}+1}^{P}\right| \leqslant$$

$$\leqslant k_{2s-2} + \left|\sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}}\right| + P - k_{2s-1} + k_{2s-2}.$$

и, так как $P \leqslant k_{2s} + k_{2s-2}$, получим

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right| \leqslant 3\,k_{2s-2} + (k_{2s} - k_{2s-1}) + \left|\sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right|.$$

Применим оценку суммы (10) при $N = k_{2s-1} - k_{2s-2}$ для $\nu = s-1$ и используем условия (8). Тогда

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right| = o\,(k_{2s-1}) = o\,(P). \tag{11}$$

Во втором случае

$$\left|\sum_{x=1}^{P}\right| = \left|\sum_{1}^{k_{2s}} + \sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s-2}} + \sum_{P-k_{2s-2}+1}^{P}\right| \leqslant \left|\sum_{1}^{k_{2s}}\right| + \left|\sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s-2}}\right| + k_{2s-2}.$$

Применяя оценку суммы (10) при $N = P - k_{2s}$, $\nu = s$ и оценку (11) при $P = k_{2s}$, получим

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right| = o\,(k_{2s}) + o\,(P - k_{2s}) = o\,(P).$$

Таким образом, оценка (11) справедлива для всех P, и, по критерию Вейля (7), функция αq^x равномерно распределена.

§ 2. Для всякого α, принадлежащего множеству L, в силу равномерности распределения дробных долей $\{\alpha q^x\}$, будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o\,(P). \tag{12}$$

Покажем, что, как и в случае линейной функции, для всех $\alpha \in L$ оценку (12) нельзя улучшить.

ТЕОРЕМА 1. *Какова бы ни была положительная функция* $\varepsilon(P)$, *для которой* $\lim\limits_{P\to\infty} \varepsilon(P) = 0$, *найдется* $\alpha \in L$ *такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega\,(P\cdot\varepsilon(P)).$$

Доказательство. Пусть $\alpha' = 0,\delta' \ldots \delta'_k \ldots$ — какое-нибудь из чисел множества L. Определим числа k_ν рекуррентными соотношениями

$$k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon\,(k_{2s-1})}], \quad k_{2s+1} = k_{2s}^2, \quad k_1 = 2. \tag{13}$$

Выберем, наконец, $\alpha = 0, \delta_1 \ldots \delta_k \ldots$, где

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k' & \text{при } k_{2s} < k \leqslant k_{2s+1}, \\ q-1 & \text{при } k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s}. \end{cases} \qquad (14)$$

Число α удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, принадлежит множеству L.

Допустим, что для всякого $\alpha \in L$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \varepsilon(P)). \qquad (15)$$

Применим лемму 1 для случая $\mu = 1$:

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_{x+1} + \frac{\theta}{q-1} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x + O(1). \qquad (16)$$

Подсчитаем сумму дробных долей αq^x для α, построенного, согласно (14), при $P = k_{2s}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1).$$

Согласно допущению (так как $\alpha \in L$), получим

$$\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-1}\, \varepsilon(k_{2s-1})).$$

Далее, в силу (14),

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} (q-1) = k_{2s} - k_{2s-1}.$$

Таким образом*,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{2}(k_{2s} - k_{2s-1}) + O(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})).$$

В силу (13), $k_{2s} - k_{2s-1} > k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} - 1$ и при достаточно большом s будет

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} > \frac{1}{3} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} > \frac{1}{4} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} = \Omega(k_{2s} \cdot \varepsilon(k_{2s})).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим теперь вопрос о величинах $\alpha \in L$, для которых сумма дробных долей функции αq^x наиболее близка к своему среднему значению $\frac{P}{2}$.

* Здесь и далее, без ограничения общности, можно считать $P \cdot \varepsilon(P) \to \infty$, притом монотонно; стремление $\varepsilon(P)$ к нулю также будем считать монотонным.

ТЕОРЕМА 2. *Для всякой функции $\varphi(P)$, как угодно медленно стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании P, найдется $\alpha \in L$ такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(\varphi(P)); \tag{17}$$

ни для какого $\alpha \in L$ оценка (17) не может быть улучшена до $O(1)$.

Доказательство. Для построения величины α, удовлетворяющей условию теоремы, используем системы $\rho_n'(q)$, введеные в главе 1 [см. (15)′]. Выберем

$$\alpha = \underbrace{0, \rho_1'(q) \ldots \rho_1'(q)}_{\psi(1)} \underbrace{\rho_2'(q) \ldots \rho_2'(q)}_{\psi(2)} \ldots \underbrace{\rho_n'(q) \ldots \rho_n'(q)}_{\psi(n)} \underbrace{\rho_{n+1}'(q) \ldots}_{} \tag{18}$$

Каждый знак каждого $\rho_n'(q)$ понимается здесь как очередной знак q-ичного разложения α; рядом стоящие $\rho_n'(q)$ одинаковы и первые n знаков в $\rho_{n+1}'(q)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ выбраны совпадающими с первыми n знаками $\rho_n'(q)$, наконец, $\psi(n) > 0$ — произвольная монотонная целочисленная функция, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} \psi(n) = \infty$. Тогда [см. (3), теорема 5] функция αq^x равномерно распределена и, следовательно, $\alpha \in L$.

Подсчитаем сумму первых P знаков в разложении (18). Обозначим общее число знаков в (18) до первого из $\rho_{n+1}'(q)$ через T_n. Так как каждое $\rho_n'(q)$ состоит из q^n знаков, то для T_n получим

$$T_n = \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\nu) q^{\nu}. \tag{19}$$

Каждый из знаков $0, 1 \ldots q-1$ в системе $\rho_n'(q)$ встречается q^{n-1} раз, следовательно, сумма знаков для одной системы $\rho_n'(q)$ будет

$$q^{n-1} \frac{q(q-1)}{2} = \frac{q-1}{2} \cdot q^n.$$

Определим k из условия $T_k \leqslant P < T_{k+1}$. Тогда

$$P = T_k + rq^{k+1} + r_1, \quad 0 \leqslant r < \psi(k+1), \quad 0 \leqslant r_1 < q^{k+1}.$$

Обозначая знаки в (18) через $\delta_1, \delta_2, \ldots,$ получим

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_x = \sum_{1}^{T_k} + \sum_{T_k+1}^{T_k+rq^{k+1}} + \sum_{T_k+rq^{k+1}+1}^{P} = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{q-1}{2} q^{\mu} \psi(\mu) + r\frac{q-1}{2} q^{k+1} + O(q^k);$$

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_x = \frac{q-1}{2}(T_k + rq^{k+1}) + O(q^k) = \frac{q-1}{2} P + O(q^k).$$

В силу (16), теперь будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x + O(1) = \frac{P}{2} + O(q^k). \tag{20}$$

Выберем функцию $\psi(k)$ растущей настолько быстро, чтобы выполнялось условие $\psi(\sqrt{\ln\varphi(k)})>k$. Тогда

$$\psi(\sqrt{\ln\varphi(P)})>P\geqslant T_k\geqslant\psi(k),\quad \ln\sqrt{\varphi(P)}>k,\quad e^{k2}<\varphi(P).$$

Но $q^k=o(e^{k^2})$, так что соотношение (20) примет вид

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}-\frac{P}{2}=o(\varphi(P))$$

и так как, в силу (18), $\alpha\in L$, получаем первое утверждение теоремы.

Докажем теперь невозможность улучшения оценки (17). Действительно, допустим, что для некоторого $\alpha\in L$ будет

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}-\frac{P}{2}=O(1).$$

Пусть это α задано разложением

$$\alpha=0,\delta_1\delta_2\ldots\delta_k\ldots\ . \tag{21}$$

Тогда, в силу (16), получим

$$\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x-\frac{P}{2}=O(1),$$

т. е. существует M такое, что для всех P

$$\left|\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x-\frac{P}{2}\right|<M. \tag{22}$$

Но из $\alpha\in L$ следует, что дробные доли функции αq^x расположены на (0,1) всюду плотно, так что в разложении (21) для любого целого N встретится группа из N подряд идущих знаков, равных $q-1$. Пусть такая группа начинается с $k=P_0+1$. Выберем $N=4M$ и положим $P=P_0+N$. Тогда

$$\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x-\frac{P}{2}=\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P_0}\delta_x+4M-\frac{P_0+4M}{2}=$$
$$=\left(\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P_0}\delta_x-\frac{P_0}{2}\right)+2M>M,$$

что противоречит (22).

Таким образом, оценка (17) не может быть улучшена, чем теорема 2 доказана полностью.

З а м е ч а н и е. Почти для всех α порядок разности $\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}-\frac{P}{2}$ равен $\sqrt{P\ln\ln P}$.

Действительно, из результатов А. Я Хинчина ([2]) непосредственно

следует, что порядок разности $\sum_{x=1}^{P}\delta_x - \frac{q-1}{2}P$ почти для всех α равен $\sqrt{P\ln\ln P}$. Но, по лемме 1, при $\mu=1$

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x + O(1).$$

Объединяя эти результаты, приходим к вышеприведенному утверждению.

Обозначим через C множество иррациональных чисел отрезка (01) и сопоставим теоремы для линейной и показательной функций.

1°. Для каждого $\alpha \in C$ (и соответственно $\alpha \in L$)

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \qquad \sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P),$$

причем для всех α, принадлежащих C и, соответственно, L, эти оценки нельзя улучшить.

2°. Существуют α из C и, соответственно из L такие, что

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \quad \sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

где $\varphi(P)\to\infty$ как угодно медленно; дальнейшее улучшение этих оценок невозможно.

Результаты 1° и 2° позволяют предположить, что среднее отклонение $\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}$ от $\frac{P}{2}$ будет меньше, чем для линейной функции, однако, как показывает замечание, справедливо противоположное утверждение:

3°. Почти для всех α отклонение суммы $\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}$ от $\frac{P}{2}$ характеризуется функцией $\sqrt{P\ln\ln P}$ и, таким образом, значительно больше, чем соответствующее отклонение суммы $\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\}$ (которое, в силу (3) и (4), характеризуется функцией $\ln P$).

§ 3. Как показано в ([4]), из равномерности распределения функции αq^x ($q \geqslant 2$ — целое) следует, что для любого целого $\mu > 1$ функция $\alpha q^{\mu x}$ также равномерно распределена. Таким образом, если при любом целом $m \neq 0$ оценка тригонометрической суммы

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^{\mu x}} = o(P) \tag{23}$$

справедлива для $\mu=1$, то она справедлива и для всех целых $\mu > 1$. Рассмотрим, обладают ли аналогичным свойством суммы дробных долей.

Пусть при $P\to\infty$ $\varphi(P)\to\infty$ сколь угодно медленно и α построено как в теореме 2. Тогда для $\mu=1$

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)). \tag{24}$$

Покажем, что в отличие от сумм Вейля (23) для сумм дробных долей из выполнения равенства (24) при $\mu=1$ не следует справедливость его для всех $\mu>1$.

ТЕОРЕМА 3. *Каковы бы ни были положительные функции* $\varepsilon(P)$ *и* $\varphi(P)$, *при возрастающем* P *как угодно медленно стремящиеся соответственно к нулю и к бесконечности, найдется* $\alpha\in L$, *для которого*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}-\frac{P}{2}=o(\varphi(P)) \text{ и } \sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{2x}\}-\frac{P}{2}=\Omega(P\varepsilon(P)).$$

Доказательство. Пусть целые $k_1<k_2<\cdots$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(k_{2s+1})>k_{2s}^2,\quad k_{2s}=k_{2s-1}+\left[k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}\right],\quad k_1=2 \tag{25}$$

и $\alpha'=0,\ \delta_1'\ldots\delta_k'\ldots$ построено, как в теореме 2. Выберем $\alpha=0,\ \delta_1\delta_2\ldots\delta_k\ldots$, где

$$\delta_k=\begin{cases}\delta_k' & \text{для } k_{2s}<k\leqslant k_{2s+1},\\ 0 & \text{для четных } k \text{ из интервала } (k_{2s-1},\ k_{2s}),\\ q-1 & \text{для нечетных } k \text{ из интервала } (k_{2s-1},\ k_{2s}).\end{cases}$$

Из леммы 2 следует, что функция αq^x равномерно распределена. Оценим сумму дробных долей

$$S_1=\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}.$$

Выберем s из условия $k_{2s-1}\leqslant P<k_{2s+1}$ и рассмотрим сперва случай $P\leqslant k_{2s}$:

$$S_1=\sum_{x=1}^{k_{2s-2}}\{\alpha q^x\}+\sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}}\{\alpha q^x\}+\sum_{x=k_{2s-1}+1}^{P}\{\alpha q^x\}.$$

Применяя лемму 1 при $\mu=1$ и пользуясь определением величин δ_k, получим

$$S_1=O(k_{2s-2})+\frac{1}{q-1}\sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}}\delta_x+\frac{1}{q-1}\sum_{x=k_{2s-1}+1}^{P}\delta_x=$$

$$=\frac{1}{q-1}\sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}}\delta'_x+\frac{P-k_{2s-1}}{2}+O(k_{2s-2}).$$

Снова применим лемму 1:

$$S_1=\sum_{x=1}^{k_{2s-1}}\{\alpha' q^x\}-\sum_{x=1}^{k_{2s-2}}\{\alpha' q^x\}+\frac{P-k_{2s-1}}{2}+O(k_{2s-2})=$$

$$=\frac{k_{2s-1}}{2}+o(\varphi(k_{2s-1}))+\frac{P-k_{2s-1}}{2}+O(k_{2s-2}).$$

Но, в силу (25), $k_{2s-2}=o(\varphi(k_{2s-1}))$, так что

$$S_1=\frac{P}{2}+o(\varphi(k_{2s-1}))=\frac{P}{2}+o(\varphi(P))\ ^* \quad (k_{2s-1}\leqslant P\leqslant k_{2s}). \quad (26)$$

Пусть теперь $P>k_{2s}$.

$$S_1=\sum_{x=1}^{k_{2s}}\{\alpha q^x\}+\sum_{x=k_{2s}+1}^{P}\{\alpha q^x\}.$$

Применим к первой сумме справа оценку (26):

$$S_1=\frac{k_{2s}}{2}+o(\varphi(k_{2s}))+\frac{1}{q-1}\sum_{x=k_{2s}+1}^{P}\delta_x=\frac{k_{2s}}{2}+\frac{1}{q-1}\sum_{x=k_{2s}+1}^{P}\delta'_x+o(\varphi(k_{2s}))=$$

$$=\frac{k_{2s}}{2}+\sum_{x=1}^{P}\{\alpha' q^x\}-\sum_{x=1}^{k_{2s}}\{\alpha' q^x\}+o(\varphi(k_{2s}))=\frac{P}{2}+o(\varphi(P)).$$

Объединяя этот результат с (26), получим для всех P

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}-\frac{P}{2}=o(\varphi(P)).$$

Для доказательства второго утверждения теоремы выберем $P_1=\left[\frac{k_{2s-1}}{2}\right]$, $P_2=\left[\frac{k_{2s}}{2}\right]-1$ и оценим сумму

$$S_2=\sum_{x=1}^{P_2}\{\alpha q^{2x}\}.$$

Допустим, что для всякого P будет

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{2x}\}-\frac{P}{2}=O(P\,.\,\varepsilon(P)). \quad (27)$$

Применим лемму 1 с $\mu=2$:

$$S_2=\sum_{x=1}^{P_1}\{\alpha q^{2x}\}+\sum_{x=P_1+1}^{P_2}\{\alpha q^{2x}\}=$$

$$=\frac{P_1}{2}+\frac{1}{q^2-1}\left(q\sum_{x=P_1+1}^{P_2}\delta_{2x+1}+\sum_{x=P_1+1}^{P_2}\delta_{2x+2}\right)+O(P_1\,\varepsilon(P_1)).$$

Из определения величин δ_k и выбора P_1 и P_2 следует

$$\sum_{x=P_1+1}^{P_2}\delta_{2x+1}=(P_2-P_1)(q-1), \qquad \sum_{x=P_1+1}^{P_2}\delta_{2x+2}=0.$$

Таким образом,

$$S_2=\frac{P_1}{2}+\frac{q}{q+1}(P_2-P_1)+O(P_1\,\varepsilon(P_1))=$$

$$=\frac{P_2}{2}+\frac{q-1}{q+1}(P_2-P_1)+O(k_{2s-1}\,\varepsilon(k_{2s-1})).$$

---

* Функцию $\varphi(P)$ всюду можно считать монотонной.

Пользуясь определением величин k_ν, получим для достаточно больших s

$$S_2-\frac{P_2}{2}\geqslant\frac{1}{3}\,\frac{k_{2s}-k_{2s-1}}{2}+O\left(k_{2s-1}\,\varepsilon\left(k_{2s-1}\right)\right)>$$

$$>\frac{1}{7}\,k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon\left(k_{2s-1}\right)}=\Omega\left(P_2\,\varepsilon\left(P_2\right)\right),$$

что противоречит допущению (27).

Пусть попрежнему при $P\to\infty$ функция $\varphi(P)$ стремится к бесконечности как угодно медленно. Возникает вопрос: существуют ли вообще величины $\alpha\in L$ такие, что при всех целых $\mu\geqslant 1$ будет

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\}-\frac{P}{2}=o\left(\varphi\left(P\right)\right)?$$

Ответ дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 4. *Какова бы ни была функция $\varphi(P)$, при неограниченном возрастании P как угодно медленно стремящаяся к бесконечности, найдется $\alpha\in L$ такое, что для всех целых $\mu\geqslant 1$ будет*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\}-\frac{P}{2}=o\left(\varphi\left(P\right)\right). \tag{28}$$

Доказательство. Выберем

$$\alpha=0,\underbrace{r_1\ldots r_1}_{\psi\,(1)}\;\underbrace{r_2\ldots r_2}_{\psi\,(2)}\ldots\underbrace{r_n\ldots\ldots r_n}_{\psi\,(n)}\;\underbrace{r_{n+1}}\;\cdots,$$

где $\psi(k)$—монотонная функция, удовлетворяющая условию $\psi\left(\sqrt{\ln\varphi(k)}\right)>k$, r_n — группы знаков вида

$$\underbrace{\underbrace{\rho'_n\rho'_n\cdots\rho'_n}_{n!}0\,\underbrace{\rho'_n\rho'_n\cdots\rho'_n}_{n!}0\cdots}_{n!}\Big|\underbrace{\rho'_n\rho'_n\cdots\rho'_n}_{n!}0\;\underbrace{\underbrace{\bar\rho_n\bar\rho_n\cdots\bar\rho_n}_{n!}\;\underbrace{\bar\rho_n\bar\rho_n\cdots\bar\rho_n}_{n!}\cdots}_{n!}\Big|\;\underbrace{\bar\rho_n\bar\rho_n\cdots\bar\rho_n}_{n!}$$

и $\bar\rho_n$ обозначает ρ'_n без первого знака. Легко проверить, например, дословным повторением рассуждений теоремы 5 из ([3]), что $\alpha\in L$.

Для оценки суммы (28) применим лемму 1.

$$S_\mu=\sum_{x=1}^{P}\{\alpha\,q^{\mu x}\}=\frac{1}{q^\mu-1}\sum_{\nu=1}^{\mu}q^{\mu-\nu}\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+\nu}+O\left(1\right). \tag{29}$$

Обозначим через t_n число знаков в r_n. Очевидно,

$$t_n=\left(n!\,q^n+1\right)n!+\left(n!\,q^n-1\right)n!=2\left(n!\right)^2q^n.$$

Пусть, далее, T_k — число знаков в разложении α до первого из r_{k+1}:

$$T_k=\sum_{n=1}^{k}2\left(n!\right)^2q^n\cdot\psi\left(n\right).$$

Определим k из условия $T_k \leqslant \mu P < T_{k+1}$; тогда

$$\mu P = T_k^2 + 2N(k+1)!^2 q^{k+1} + R,$$
$$0 \leqslant N < \psi(k+1), \quad 0 \leqslant R \leqslant 2(k+1)!^2 q^{k+1}. \tag{30}$$

Пусть ν — произвольное целое из интервала $1 \leqslant \nu \leqslant \mu$ и $\mu \leqslant n$. Отметим в r_n знаки по арифметической прогрессии с разностью μ, начиная с ν-го знака. Таким образом, будут отмечены ν-й, $\nu+\mu$-й, $\nu+2\mu$-й знаки и т. д. Подсчитаем сумму отмеченных знаков. Рассмотрим сперва совокупность знаков вида

$$\underbrace{\underbrace{\rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}\,0\,\underbrace{\rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}\,0 \;\Big|\; \cdots \underbrace{\rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}\,0}_{\mu} \tag{31}$$

Число знаков в каждой группе $\underbrace{\rho'_n \ldots\ldots \rho'_n}_{n!}$ кратно μ, следовательно, во второй такой группе первым будет отмечен $\nu-1$-й знак и т. д., пока (перед $\nu+1$-й группой) не будет отмечен ноль, разделяющий эти группы. В $\nu+1$-й группе будет отмечен μ-й знак, затем $\mu-1$-й и т. д. до $\nu+1$-го в последней.

Таким образом, совокупность отмеченных знаков совпадает с совокупностью всех знаков, содержащихся в группе $\rho'_n \ldots \rho'_n 0$. Так как сумма знаков в ρ'_n равна $q^n \frac{q-1}{2}$, то сумма знаков, отмеченных в (31), будет

$$\frac{1}{2} n!\, q^n (q-1). \tag{32}$$

В первой половине r_n содержится $\frac{n!}{\mu}$ групп (31), следовательно, сумма знаков в этой половине равна

$$\frac{1}{2\mu} n!^2 q^n (q-1).$$

Рассмотрим теперь совокупность знаков

$$\underbrace{\underbrace{\bar{\rho}_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}\,\underbrace{\bar{\rho}_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!} \;\Big|\; \cdots \underbrace{\bar{\rho}_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}}_{\mu} \tag{33}$$

В первом из $\bar{\rho}_n$ первым отмечен ν-й знак, во втором — $\nu+1$-й и т. д. до $\nu-1$-го в последнем. Очевидно, сумма знаков, отмеченных в (33), совпадает с суммой знаков в группе $\underbrace{\bar{\rho}_n \rho'_n \ldots \rho'_n}_{n}$. Будем пользоваться только теми системами ρ'_n, которые начинаются с нуля. Тогда знак, отброшенный в $\bar{\rho}_n$, равен нулю и сумма знаков в $\bar{\rho}_n \rho'_n \ldots \rho'_n$ совпадет с (32).

Таким образом, суммы отмеченных знаков в первой и второй половине r_n одинаковы и сумма всех знаков, отмеченных в r_n, будет равна

$$\frac{1}{\mu} n!^2 q^n (q-1).$$

Перейдем к оценке внутренней суммы в (29).

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} = \frac{q-1}{\mu} (\mu!^2 q^\mu \psi(\mu) + \cdots + k!^2 q^k \psi(k) + \\ + (k+1)!^2 q^{k+1} N) + O(R).$$

Используя (30), получим

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} = \frac{q-1}{2} P + O(R),$$

$$S_\mu = \frac{1}{q^\mu - 1} \cdot \frac{q-1}{2} P \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} + O(R) = \frac{P}{2} + O(R). \tag{34}$$

Но $\mu P \geqslant T_k \geqslant 2k!^2 q^k \psi(k)$ и для достаточно больших k $\psi(k) < P$.

Далее, как в теореме 2, получим $e^{k^2} < \varphi(P)$.

Таким образом,

$$R < 2(k+1)!^2 q^{k+1} = o(e^{k^2}) = o(\varphi(P))$$

и из (34) получим

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P) \quad (\mu = 1, 2, \ldots) \tag{35}$$

Рассмотрим теперь величины $\alpha \in L$, для которых сумма дробных долей $\{\alpha q^x\}$ далека от среднего значения $\frac{P}{2}$. Согласно теореме 1, какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P)$, как угодно медленно стремящаяся к нулю при $P \to \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что для $\mu = 1$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Сохранится ли это равенство для всех $\mu > 1$, если оно выполняется при $\mu = 1$? Отрицательный ответ дает следующая

ТЕОРЕМА 5. *Как бы медленно ни стремились функции $\varphi(P) \to \infty$ и $\varepsilon(P) \to 0$ при $P \to \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)) \quad и \quad \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Доказательство. Пусть для $\alpha' = 0, \delta'_1 \ldots \delta'_k \ldots$ выполняется соотношение (35) ($\alpha' \in L$). Выберем целые $k_1 < k_2 < \ldots$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + \left[k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}\right], \quad k_1 = 2.$$

Построим $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k \ldots$, где для четных и нечетных k из интервала (k_{2s-1}, k_{2s}) последовательности знаков δ_k совпадают соответственно с периодическими последовательностями

$$\underbrace{q-1, q-1, q-1, 1}, \underbrace{q-1, q-1, q-1, 1}, \ldots (k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s};\ k \text{ — четно})$$

$$\underbrace{q-1, 0, q-2, 0}, \underbrace{q-1, 0, q-2, 0} \ldots \qquad (k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s};\ k \text{ — нечетно})$$

и где для k из интервалов (k_{2s}, k_{2s+1}) будет $\delta_k = \delta'_k$.

В силу леммы 2, $\alpha \in L$.

Оценим сумму $\sum\limits_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1) =$$

$$= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1}\left(\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \delta'_x - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \delta'_x\right) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x =$$

$$= O(k_{2s-2}) + \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x =$$

$$= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + o(\varphi(k_{2s-1})).$$

Разбивая сумму $\sum \delta_x$ на группы по восемь слагаемых и пользуясь определением δ_k, получим

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} \cdot 5(q-1) + o(\varphi(k_{2s-1})) =$$

$$= \frac{k_{2s}}{2} + \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} + o(\varphi(k_{2s-1})).$$

В силу произвольно медленного роста функции $\varphi(k)$, можно для $k \leqslant P$ считать $\varphi(k) = o(P \cdot \varepsilon(P))$, следовательно,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} =$$

$$= \frac{1}{8} k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} + o(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{9} k_{2s}\sqrt{\varepsilon(k_{2s})},$$

и мы получаем первое утверждение теоремы:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} = \Omega\,(k_{2s}\,\varepsilon\,(k_{2s})) \qquad (P = k_{2s}).$$

Оценим теперь сумму

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\}. \tag{36}$$

Пусть s определяется условием $k_{2s+1} \leqslant 2P < k_{2s+1}$.

Рассмотрим сперва случай $2P \leqslant k_{2s}$. Пусть $P_1 = \left[\frac{k_{2s-2}}{2}\right]$ и $P_2 = \left[\frac{k_{2s-1}}{2}\right] - 1$. Разбивая в (36) интервал суммирования и применяя лемму 1 с $\mu = 2$, получим

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+2}\Big) +$$
$$+ \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_2+1}^{P} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_2+1}^{P} \delta_{2x+2}\Big) + O\,(1).$$

Разобьем две последние суммы на группы по четыре слагаемых, тогда

$$S_2 = O\,(P_1) + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\Big(q\,(2q-3) + 3q - 2\Big)\frac{P-P_2}{4} =$$
$$= \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{P-P_2}{2} + O\,(P_1) = \frac{P_2}{2} + o\,(\varphi\,(P_2)) + \frac{P-P_2}{2} + O\,(P_1).$$

Таким образом, при $k_{2s-1} \leqslant 2P \leqslant k_{2s}$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} = \frac{P}{2} + O\,(P_1) + o\,(\varphi\,(P_2)) = \frac{P}{2} + o\,(\varphi\,(P)). \tag{37}$$

Пусть теперь $2P > k_{2s}$; обозначим $P_3 = \left[\frac{k_{2s}}{2}\right] - 1$.

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} = \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_3+1}^{P} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_3+1}^{P} \delta_{2x+2}\Big) + O\,(1).$$

Пользуясь (37), получим

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} = \frac{P_3}{2} + o\,(\varphi\,(P_3)) + \sum_{x=1}^{P} \{\alpha' q^{2x}\} - \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha' q^{2x}\} =$$
$$= \frac{P_3}{2} + o\,(\varphi\,(P_3)) + \frac{P}{2} + o\,(\varphi\,(P)) - \frac{P_3}{2} = \frac{P}{2} + o\Big(\varphi\Big(\frac{P}{2}\Big)\Big).$$

Итак, всегда

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o\,(\varphi\,(P),$$

чем теорема доказана полностью.

Как и раньше, возникает вопрос, существуют ли вообще величины $\alpha \in L$, для которых при всех целых $\mu \geqslant 1$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega\,(P \cdot \varepsilon\,(P)),$$

где $\varepsilon\,(P)$ произвольно медленно стремится к нулю, когда P неограниченно возрастает? Легко показать, что величины α, построенные в теореме 1, обладают указанным свойством.

ТЕОРЕМА 6. *Какова бы ни была положительная функция* $\varepsilon\,(P) \to 0$ *при* $P \to \infty$, *найдется* $\alpha \in L$ *такое, что для всех целых* $\mu \geqslant 1$ *будет*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega\,(P \cdot \varepsilon\,(P)).$$

Доказательство. Выберем α как в теореме 1.

Допустим, что при некотором $\mu \geqslant 1$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = O\,(P \cdot \varepsilon\,(P)).$$

Обозначим $P_1 = \left[\frac{k_{2s-1}}{\mu}\right]$ и $P_2 = \left[\frac{k_{2s}}{\mu}\right] - 1$.
Пользуясь леммой 1, получим

$$\sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} = \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{\mu x}\} + \frac{1}{q^{\mu}-1} \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{\mu x+\nu} + O\,(1) =$$

$$= \frac{P_1}{2} + O\,(P_1 \cdot \varepsilon\,(P_1)) + \frac{q-1}{q^{\mu}-1} (P_2 - P_1) \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu}.$$

Отсюда

$$\sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P_2}{2} = \frac{P_2 - P_1}{2} + O\,(P_1 \cdot \varepsilon\,(P_1)) =$$

$$= \frac{k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon\,(k_{2s-1})}}{2\mu} + O\,(k_{2s-1} \cdot \varepsilon\,(k_{2s-1})) > \frac{1}{3\mu} k_{2s} \sqrt{\varepsilon\,(k_{2s})} = \Omega\,(P_2\, \varepsilon\,(P_2)). \quad (38)$$

Но (38) противоречит допущению, чем теорема доказана.

Поступило
13. IV. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хинчин А. Я., Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen, Math. Zeit., 18 (1923), 289—306.

[2] Хинчин А. Я., Über dyadische Brüche, Math. Zeit., 18 (1923), 109—116; Über einen Satz der Warscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. 6 (1924), 9—20; Асимптотические законы теории вероятностей, гл. V, М.—Л., 1936.

[3] Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 215—238.
[4] Шапиро-Пятецкий И. И., О законах распределения дробных долей показательной функции, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 47—52.
[5] Ostrowski A., Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Abh. Hamb. Universität, 1 (1921), 77—98.
[6] Good I. J., Normal recurring decimals, Journ. Lond. Math. Soc., 213, N 83 (1946), 167—169.
[7] Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann., 77 (1916), 313—352.
[8] De Bruijn N. G., A combinatorial problem, Kon. Ned. Akad. v. Wet., 49, 7 (1946), 758—764.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 47—52

И. И. ШАПИРО-ПЯТЕЦКИЙ

О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $\sigma(x)$ была законом распределения дробных долей показательной функции.

Известно, что если последовательность чисел n_k растет достаточно быстро (так, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k}=\infty$), то для любого закона распределения $\sigma(x)$ существует такое α, что дробные доли $\{\alpha n_k\}$ распределены по закону $\sigma(x)$ ([1]). В случае, если рост последовательности n_k менее быстрый, законом распределения дробных долей $\{\alpha n_k\}$ может быть не любая функция $\sigma(x)$.

Настоящая работа посвящена изучению возможных законов распределения $\{\alpha q^k\}$, где q — целое число. В работе дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $\sigma(x)$ была законом распределения дробных долей $\{\alpha q^k\}$.

Рассмотрение законов распределения дробных долей $\{\alpha q^k\}$ дает возможность получить критерий для равномерного распределения, из которого весьма просто вытекает следующее утверждение: если дробные доли $\{\alpha q^k\}$ распределены равномерно, то при любом целом ν дробные доли $\{\alpha q^{\nu k}\}$ будут также распределены равномерно.

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы $\sigma(x)$ была законом распределения $\{\alpha q^k\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие инвариантности:*

Для любой непрерывной функции $f(x)$ с периодом единица

$$\int_0^1 f(x)\, d\sigma = \int_0^1 f(qx)\, d\sigma.$$

Доказательство. Во всем дальнейшем мы будем считать q фиксированным целым положительным числом.

Пусть S означает совокупность всех законов распределения дробных долей $\{\alpha q^k\}$, а T — совокупность всех функций $\sigma(x)$, удолетворяющих условию инвариантности. Нужно показать, что $S=T$.

Разобьем доказательство на несколько этапов.

1. $S\subset T$. Пусть $\sigma(x)\in S$. По определению S, существует такое α, что дробные доли $\{\alpha q^k\}$ распределены по закону $\sigma(x)$. Для произвольной непрерывной периодической функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(\alpha q^k) = \int_0^1 f(x)\,d\sigma.$$

Заменим $f(x)$ на $f(qx)$; тогда

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(\alpha q^{k+1}) = \int_0^1 f(qx)\,d\sigma.$$

Так как

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(\alpha q^{k+1}) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(\alpha q^{k}),$$

то

$$\int_0^1 f(x)\,d\sigma = \int_0^1 f(qx)\,d\sigma$$

и, следовательно, $\sigma(x) \in T$.

2. Нужно показать, что $T = S$. Мы сделаем это, используя теорию динамических систем.

Рассмотрим преобразование

$$\alpha \to \{q\alpha\}.$$

Это преобразование не взаимно однозначно, поэтому непосредственно здесь нельзя применять теорию динамических систем. Чтобы обойти эту трудность, поступим следующим образом.

Пусть Q — топологическое пространство, состоящее из q изолированных точек.

Обозначим

$$R = \prod_{k=-\infty}^{\infty} Q_k,$$

где Q_k — экземпляры пространства Q.

Таким образом, точкой в R является бесконечная в обе стороны последовательность

$$X = (\ldots \varepsilon_{-2}\, \varepsilon_{-1}\, \varepsilon_0\, \varepsilon_1 \ldots) \quad (0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant q-1,\ \varepsilon_k \text{ — целые}).$$

За преобразование динамической системы A возьмем сдвиг влево.

Пусть T_R — совокупность всех инвариантных нормированных мер построенной динамической системы. Между T и T_R существует взаимно однозначное соответствие, которое мы сейчас установим.

Возьмем $\nu \in T_R$. Пусть $U_{\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\ldots\varepsilon_{i_n}}$ — совокупность всех $X \in R$, у которых на местах $i_1, i_2, \ldots, i_n$ стоят соответственно $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_n}$, а остальные координаты произвольны.

Положим

$$P_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n} = \nu(U_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}).$$

(Легко видеть, что задание меры на множествах $U_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}$ определяет ее однозначно.)

Из аддитивности, инвариантности и нормированности меры вытекает, что

1. $\sum_{l=0}^{q-1} P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n l} = P_{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n}$,

2. $\sum_{l=0}^{q-1} P_{l \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n} = P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}$,

3. $\sum_{l=0}^{q-1} P_l = 1$,

4. $P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n} \geqslant 0$.

Верно и обратное:

Любая система чисел $P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}$, удовлетворяющая условиям 1—4, определяет инвариантную нормированную меру ν, если положить

$$\nu(U_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}) = P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}.$$

Пусть μ — инвариантная мера на отрезке.
Положим

$$\frac{a}{q^n} = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n 000 \ldots$$

и

$$P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n} = \mu\left(\left[\frac{a}{q^n}, \frac{a+1}{q^n}\right]\right).$$

Легко проверить, что система чисел $P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}$ удовлетворяет условиям 1—4 и, обратно, что любая система чисел, удовлетворяющая условиям 1—4, определяет некоторую инвариантную меру.

Будем считать, что $\nu \in T_R$ соответствует $\mu \in T$, если у них совпадают системы чисел $P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}$.

Пусть S_R — совокупность всех индивидуальных мер (2) в пространстве R.

(Мера ν называется индивидуальной, если существует точка P такая, что для любой непрерывной функции $f(x)$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(P) + f(AP) + \cdots + f(A^k P)}{k+1} = \int f(x)\, d\nu.)$$

При установленном между T и T_R соответствии S соответствует S_R.

В самом деле, если точка $P = (\ldots \varepsilon_{-2} \varepsilon_{-1} \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots)$ определяет меру $\nu \in T_R$, то закон распределения дробных долей $\{\alpha q^k\}$, где $\alpha = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots$, будет соответственно $\sigma \in T$ при установленном выше отображении $\nu \in T_R$.

Из результатов Крылова и Боголюбова вытекает, что выпуклая оболочка S_R совпадает с T_R. Поэтому чтобы показать, что $S_R = T_R$, достаточно установить, что

A) если $\nu_1 \in S_R$, $\nu_2 \in S_R$, то $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \in S_R$;

B) если $\nu_k \in S$ и $\lim_{k \to \infty} \nu_k = \nu$, то $\nu \in S$.

A) Пусть точки P_1 и P_2 определяют соответственно меры ν_1 и ν_2:

$$P_1 = (\ldots \varepsilon_{-1}\, \varepsilon_0\, \varepsilon_1 \ldots),$$
$$P_2 = (\ldots \delta_{-1}\, \delta_0\, \delta_1 \ldots).$$

Мера $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, как легко проверить, будет индивидуальной мерой для точки P:

$$P = (\ldots 0\,0\,0\, \varepsilon_1\, \delta_1\, \delta_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \varepsilon_5\, \delta_3\, \delta_4\, \delta_5\, \delta_6 \ldots).$$

B) Пусть точки P_k определяют соответственно меры ν_k.

Обозначим через $\rho_n^{(k)}$ систему чисел

$$\rho_n^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)} \ldots \varepsilon_n^{(k)}.$$

Рассмотрим точки

$$P_k^{(n)} = (\ldots 0\,0\, \rho_n^{(k)}\, \rho_n^{(k)}\, \rho_n^{(k)} \ldots),$$

Каждая из точек $P_k^{(n)}$ определяет некоторую меру. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_k^{(n)} = \nu_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \nu_k = \nu$, то существует последовательность n_k такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \nu_k^{(n_k)} = \nu$.

Выберем функцию $\psi(k)$ так, что:

$$\text{I.}\quad n_k = o(S_k),$$
$$\text{II.}\quad S_{k-1} = o(S_k),$$
$$S_k = \sum_{i=1}^{k-1} \psi(i)\, n_i.$$

Построим точку P следующим образом:

$$P = (\ldots \underbrace{\rho_{n_1}^{(1)}\, \rho_{n_1}^{(1)} \ldots \rho_{n_1}^{(1)}}_{\psi(1)}\ \underbrace{\rho_{n_2}^{(2)}\, \rho_{n_2}^{(2)} \ldots \rho_{n_2}^{(2)}}_{\psi(2)}\ \rho_{n_3}^{(3)} \ldots$$

Пусть $e(x)$ — характеристическая функция $U_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}$. Подсчитаем сумму

$$\frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} e(A^\nu P);$$

N представим в виде

$$N = S_k + a n_k + \theta n_k, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \quad 0 < a < \psi(k) \quad (a \text{ — целое}).$$

$$\frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} e(A^\nu P) = \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{S_{k-1}} e(A^\nu P) + \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=S_{k-1}+1}^{S_k} e(A^\nu P) +$$
$$+ \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=S_k+1}^{S_k + a n_k} e(A^\nu P) + \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=S_k + a n_k + 1}^{N} e(A^\nu P) = O\left(\frac{S_{k-1}}{N}\right) +$$
$$+ \frac{\psi(k-1)\, n_{k-1}}{N+1} \left[\nu_{n_{k-1}}^{(k-1)} (U_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}) + o(1)\right] + \frac{a n_k}{N+1} \left[\nu_{n_k}^{(k)} (U_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}) + o(1)\right] =$$
$$= \nu(U_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}) + o(1),$$

что и завершает доказательство B) и, тем самым, теоремы.

Пример. Пусть p задано: $0 < p < 1$, $p + q = 1$. Определим меру μ_p следующим образом.

Если $\Delta_k^{(n)}$ — интервал вида $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ и $\frac{k}{2^n} = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n 000\ldots$, то считаем $\mu_p(\Delta_k^{(n)}) = p^{n-s} q^s\left(s = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right)$. Нетрудно видеть, что мера μ_p продолжается на все B-множества.

Очевидно, что мера μ_p удовлетворяет условию инвариантности. Следовательно, существуют α, для которых дробные доли $\{\alpha 2^k\}$ распределены по закону μ_p.

Из соображений теории вероятности можно показать, что дробные доли $\{\alpha 2^k\}$ почти для всех α по μ_p распределены по закону u_p.

Перейдем к вопросам равномерного распределения дробных долей $\{\alpha q^k\}$.

Для удобства формулировок обозначим через Aq совокупность всех α таких, что дробные доли $\{\alpha q^k\}$ распределены неравномерно.

ЛЕММА. *Пусть:* 1) *изменение* $\sigma(x)$ *на* Aq *равно нулю.*

2) $\sigma(x)$ *удовлетворяет условию инвариантности для любой непрерывной периодической функции* $f(x)$. *Тогда* $\sigma(x)$ — *линейная функция.*

Доказательство. Положим

$$a_n = \int_0^1 e^{2\pi n x i}\, d\sigma.$$

Из условия инвариантности следует, что

$$a_n = a_{nq} = \cdots = a_{nq^\nu}.$$

Таким образом,

$$a_n = \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} a_{nq^\nu} = \int_0^1 f_N(x)\, d\sigma,$$

где

$$f_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} e^{2\pi i n q^\nu x}.$$

При всех x $|f_N(x)| \leqslant 1$ и, за исключением множества Aq (изменение на котором $\sigma(x)$ равно нулю),

$$\lim_{N \to \infty} f_N(x) = 0.$$

Следовательно, по теореме Лебега об интегрировании ограниченных последовательностей,

$$a_n = \int_0^1 f_N(x)\, d\sigma = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 f_N(x)\, d\sigma = \int_0^1 \lim_{N\to\infty} f_N(x)\, d\sigma = 0,$$

что, в силу полноты системы тригонометрических функций, даст нужный результат.

Из доказанной леммы вытекает любопытное

Следствие. *Пусть дробные доли* $\{\alpha q^k\}$ *распределены по некоторому абсолютно непрерывному закону* $\sigma(x)$; *тогда* $\sigma(x) = x$.

Действительно, условия леммы выполняются автоматически, так как $\operatorname{mes} Aq = 0$. Следовательно, $\sigma(x) = ax + b$. Из условий $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$ получаем, что $b = 0$, $a = 1$.

ТЕОРЕМА II. *Пусть существует такая константа c, что для любого интервала Δ*

$$\lim_{\nu\to\infty} \sup \frac{P_\nu(\Delta;\alpha)}{\nu+1} \leqslant c|\Delta|,$$

где $P_\nu(\Delta;\alpha)$ — число решений неравенств $\{\alpha q^k\}\in\Delta$, $0\leqslant k\leqslant\nu$. Тогда дробные доли $\{\alpha q^k\}$ распределены равномерно.

Доказательство. Для удобства доказательства распространим функцию $p_\nu(\Delta)=\frac{P_\nu(\Delta)}{\nu+1}$ на множества, которые состоят из конечного числа интервалов.

Пусть $T\Delta$ означает совокупность всех x $(0\leqslant x<1)$ таких, что $\{qx\}\in\Delta$. Легко видеть, что $p_\nu(\Delta)=p_\nu(T\Delta)+\frac{2\theta}{\nu}$, $|\theta|\leqslant 1$.

Предположим, что дробные доли $\{\alpha q^k\}$ распределены неравномерно; тогда существуют интервал δ, последовательность целых чисел n_k и число $\varepsilon>0$ такие, что $|p_{n_k}(\delta)-|\delta||\geqslant\varepsilon$.

Из известной теоремы Хелли следует, что из последовательности n_k можно выбрать подпоследовательность n_{k_i} такую, что для любого интервала Δ существует

$$\lim_{i\to\infty} p_{n_{k_i}}(\Delta)=p(\Delta).$$

Монотонная функция $\sigma(x)=p([0,x])$ удовлетворяет всем условиям леммы (условие инвариантности эквивалентно $p(\Delta)=p(T\Delta)$, изменение $\sigma(x)$ на Aq равно нулю, так как $\sigma(x)$ абсолютно непрерывна).

Кроме того, $\sigma(0)=0$, $\sigma(1)=1$. Следовательно,

$$\sigma(x)=x, \text{ а } p(\Delta)=|\Delta|.$$

В частности, для интервала δ

$$\lim_{i\to\infty} p_{n_{k_i}}(\delta)=|\delta|,$$

что противоречит предположению $|p_{n_k}(\delta)-|\delta||\geqslant\varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает справедливость теоремы.

Следствие. *Если дробные доли $\{\alpha q^k\}$ распределены равномерно, то дробные доли $\{\alpha q^{\nu k}\}$ при любом целом ν распределены равномерно.*

Действительно, вероятность попадания дробных долей $\{\alpha q^{\nu k}\}$ на интервал Δ, очевидно, не превосходит $\nu|\Delta|$ и, следовательно, условия теоремы II выполнены.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. О. Гельфонду за руководство настоящей работой и Н. М. Коробову за ряд очень ценных соображений, которые были использованы автором в доказательстве теоремы I.

Поступило
5. V. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфонд А. О., О некоторых общих случаях распределения дробных долей функций, Доклады Ак. Наук СССР, т. 64, № 4 (1949), 437—440.

[2] Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 53—74

Н. И. ФЕЛЬДМАН

АППРОКСИМАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ. I*

АППРОКСИМАЦИЯ ЛОГАРИФМОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе для некоторых трансцендентных чисел ζ устанавливаются неравенства вида $|\zeta-\xi|\geqslant\varphi(H, n)$, $|P(\zeta)|\geqslant\varphi(H, n)$, где ξ — алгебраическое число степени n и высоты H, $P(z)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H, а $\varphi(x, y)$ — некоторая функция.

Важной арифметической характеристикой любого числа ζ является нижняя граница $\Phi(n, H, \zeta)$ абсолютной величины разности между этим числом и алгебраическими числами ξ степени не больше n и высоты не больше H. Эта характеристика тесно связана с нижней границей значений в точке ζ полиномов с целыми рациональными коэффициентами высоты H и степени n.

В 1932 г. К. Малер (1) доказал неравенство

$$|P(\zeta)|>c_1H^{-c^n},$$

где ζ — вещественный логарифм положительного рационального числа или $\zeta=\pi$, n — некоторое фиксированное число, $P(z)$ — полином с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H, а c и c_1 не зависят от H.

До Малера менее точные оценки получили Д. Д. Мордухай-Болтовской и Попкен.

Метод А. О. Гельфонда [(2), (3), (4), (5)] дает возможность найти оценки в виде явной функции не только от H, но и от n.

В § 2 настоящей работы выведены оценки снизу для $\Phi(n, H, \ln\alpha)$ (α — алгебраическое число) и $\Phi(n, H, \pi)$ и для абсолютных величин значений полиномов с целыми рациональными коэффициентами в точках $\ln\alpha$ и π. Во второй части этой работы то же самое будет сделано для некоторых чисел, связанных с эллиптической функцией Вейерштрасса $\wp(z)$. В § 3 даются некоторые приложения полученных результатов.

Формулировки теорем § 2 были приведены в моей работе (6). За время, прошедшее с момента опубликования этой работы, удалось внести в первоначальные доказательства некоторые упрощения, позволившие избежать применения формулированных в (6) лемм 2 и 3. В связи с этим в настоящей работе эти леммы отсутствуют.

* Настоящая работа выполнена под руководством А. О. Гельфонда, обратившего мое внимание на эту тему и многократно помогавшего мне своими советами и указаниями, за что приношу ему глубокую благодарность.

§ 1. Леммы общего характера. Высотой полинома $P(z)$ будем называть максимум абсолютных величин его коэффициентов. Высотой алгебраического числа ξ будем называть высоту неприводимого в поле рациональных чисел полинома, корнем которого является ξ. Высоту $P(z)$ обозначим символом $H[P(z)]$.

ЛЕММА 1 (Принцип Дирихле). *Пусть даны m_0 линейных однородных форм с вещественными коэффициентами:*

$$L_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ir}x_r, \quad i = 1, 2, \ldots, m_0, \quad m_0 \leqslant r.$$

Если для всех целых x_j из интервала $0 \leqslant x_j \leqslant z$, где целое число $z \geqslant 2$, будут справедливы неравенства $|L_i(x)| \leqslant A$, $i = 1, 2, \ldots, m_0$, то можно выбрать такие целые числа $x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{r,0}$, удовлетворяющие условиям

$$|x_{j,0}| \leqslant z, \quad x_{1,0}^2 + \cdots + x_{r,0}^2 > 0,$$

чтобы выполнялись неравенства

$$|L_i(x_0)| < \frac{2A}{Z^{\frac{1}{m_0}} - 2}, \quad Z = (z+1)^r, \quad i = 1, 2, \ldots, m_0.$$

Доказательство. Пусть переменные x_j пробегают независимо друг от друга значения $0, 1, \ldots, z$. Всего мы получим Z наборов значений переменных. Каждому набору сопоставим точку пространства m_0 измерений, считая координатами точки значения форм $L_i(x)$, соответствующие данному набору. Очевидно, все точки окажутся в m_0-мерном кубе, стороны которого параллельны осям координат и равны $2A$, а центр находится в начале координат. Разобьем этот куб на N^{m_0} малых кубиков, разделив каждую из сторон большого куба на $N = \left[Z^{\frac{1}{m_0}} - 1\right]$ равных частей длины $\frac{2A}{N}$. Число малых кубиков меньше числа точек, так как

$$N^{m_0} = \left[Z^{\frac{1}{m_0}} - 1\right]^{m_0} < Z.$$

Таким образом, хотя бы в одном маленьком кубике окажутся две рассмотренные точки, а разности соответствующих координат этих точек будут не больше стороны маленького кубика, т. е. $\frac{2A}{N}$. Пусть эти две точки соответствуют наборам $(x_1', \ldots, x_r')$ и $(x_1'', \ldots, x_r'')$. Положим $x_j'' - x_j' = x_{j,0}$. Тогда

$$|L_i(x_0)| \leqslant \frac{2A}{N} = \frac{2A}{\left[Z^{\frac{1}{m_0}} - 1\right]} < \frac{2A}{Z^{\frac{1}{m_0}} - 2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m_0.$$

Ясно, что $|x_{j,0}| \leqslant \max(x_j', x_j'') \leqslant z$.

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{n} (z - \xi_\nu) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad |a_i| \leqslant H.$$

Тогда, если все числа ν_t различны, то

$$|\xi_{\nu_1}\xi_{\nu_2}\cdots\xi_{\nu_s}| \leqslant (n+1)\,2^n H.$$

Доказательство. Считаем, что

$$|\xi_1| \leqslant |\xi_2| \leqslant \ldots \leqslant |\xi_{n_1}| \leqslant \frac{1}{2} < |\xi_{n_1+1}| \leqslant \ldots \leqslant |\xi_{n_2}| \leqslant$$
$$\leqslant 1 < |\xi_{n_2+1}| \leqslant \ldots \leqslant |\xi_n|.$$

Тогда из неравенства

$$\max_{|z|=1} |P(z)| \leqslant (n+1) H$$

вытекает неравенство

$$\max_{|z|=1} \prod_{i=n_1+1}^{n} |z-\xi_i| = \max_{|z|=1} \left| P(z) \prod_{i=1}^{n_1} (z-\xi_i)^{-1} \right| \leqslant (n+1)\,2^{n_1} H,$$

откуда, вследствие принципа максимума,

$$|\xi_{n_1+1}\cdots\xi_{n_2}|\cdot|\xi_{n_2+1}\cdots\xi_n| \leqslant (n+1)\,2^{n_1}H,$$
$$|\xi_{n_2+1}\cdots\xi_n| \leqslant (n+1)\,2^{n_1}H \leqslant (n+1)\,2^n H.$$

Очевидным следствием леммы 2 будет

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (z-\xi_\nu), \quad |a_i| \leqslant H.$$

Тогда

$$\prod_{\nu=1}^{n} (1+|\xi_\nu|) \leqslant (n+1)\,4^n\,|a_0^{-1}|\,H.$$

ЛЕММА 4. (Неравенство Лиувилля.) *Пусть α_1 — фиксированное алгебраическое число, ξ_1 — алгебраическое число степени n_0 и высоты H_0. Если*

$$\beta = \sum_{k=-N_0}^{N_0} \sum_{l=0}^{M} a_{k,l}\,\alpha_1^k \xi_1^l \neq 0$$

и целые числа $a_{k,l}$ удовлетворяют неравенству $|a_{k,l}| \leqslant A$, то

$$|\beta| \geqslant e^{-\gamma\left\{M(n_0+\ln H_0)+n_0(N_0+\ln A)\right\}}, \tag{1}$$

где γ зависит от α_1, но не зависит от ξ_1, N_0, n_0, H_0, M, A.

Доказательство. Пусть $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — сопряженные числа α_1, а $\xi_2, \ldots, \xi_{n_0}$ — сопряженные числа ξ_1. Символом $R(\xi_i;\ \alpha_j)$, $1 \leqslant i \leqslant n_0$, $1 \leqslant j \leqslant s$, обозначим поле, полученное из поля рациональных чисел присоединением чисел ξ_i и α_j. Среди таких полей могут быть одинаковые. Пусть $R(\xi_{i_t,j};\ \alpha_j)$, где $j = 1, 2, \ldots, s$, $t = 1, \ldots, n_j$, $\xi_{i_t,j}$ — некото-

рые из чисел $\xi_1, \ldots, \xi_{n_0}$, $\xi_{1,1} = \xi_1$, есть полная система полей, сопряженных с полем $R(\xi_1;\ \alpha_1)$. Тогда число

$$\beta_1 = \prod_{j=1}^{s} \prod_{t=1}^{n_j} \left(\sum_{k=-N_0}^{N_0} \sum_{l=0}^{M} a_{k,\,l}\, \alpha_j^k\, \xi_{i_t,\,j}^l \right)$$

будет рациональным. Пусть a_s — свободный член уравнения для α_1, a_0 и b_0 — соответственно старшие коэффициенты неприводимых уравнений для α_1 и ξ_1. Тогда $\beta_2 = (a_0 a_s)^{n_0 N_0} b_0^{Ms} \beta_1$ будет целым рациональным числом. Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно показать, что если простой идеал $\mathfrak{P}$ входит в числа η_t, $1 \leqslant t \leqslant s_1$, в степени $c_t < 0$, а в числа η_t, $s_1 + 1 \leqslant t \leqslant s$, в степени $d_t \geqslant 0$, где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ — корни уравнения $g_0 z^s + g_1 z^{s-1} + \cdots + g_s = 0$, то g_0 делится на $\mathfrak{P}^c$, $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_{s_1}$.

В самом деле, прежде всего мы имеем равенство

$$g_{s_1} = \pm g_0 (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{s_1} + \overline{\eta}),$$

где в знаменатель $\overline{\eta}$ идеал $\mathfrak{P}$ входит в степени, меньшей чем c. Так как g_{s_1} — целое рациональное число, то g_0 должно делиться на $\mathfrak{P}^c$. Целое рациональное число $\beta_2 \neq 0$ (так как $\beta \neq 0$), следовательно, $|\beta_2| \geqslant 1$. Далее, для любых i, j

$$\left| \sum_{k=-N_0}^{N_0} \sum_{l=0}^{M} a_{k,\,l}\, \alpha_i^k\, \xi_j^l \right| \leqslant (2N_0 + 1)(M + 1) A \,(1 + |\xi_j|)^M \,(|\alpha_i^{-1}| + |\alpha_i|)^{N_0}.$$

Теперь

$$|\beta| \geqslant (a_0 a_s)^{-n_0 N_0}\, b_0^{-sM} \prod_{\substack{j=1 \\ \{i_t,\, j\} \neq \{1,\,1\}}}^{s} \prod_{t=1}^{n_j} \{(2N_0 + 1)(M + 1) A\, (1 + |\xi_j|)^M \cdot$$

$$\cdot\, (|\alpha_i^{-1}| + |\alpha_j|)^{N_0}\}^{-1} \geqslant \{(2N_0+1)\,(M+1)\}^{-n_0 s}\, b_0^{-sM}\, \gamma^{-n_0 N_0} A^{-n_0 s} \prod_{j=1}^{n_0} (1 + |\xi_j|)^{-sM},$$

где γ_1 зависит лишь от α_1. Наконец, по лемме 3,

$$\prod_{j=1}^{n_0} (1 + |\xi_j|) \leqslant (n_0 + 1)\, 4^{n_0}\, |b_0^{-1}|\, H_0,$$

следовательно,

$$|\beta| \geqslant \{(2N_0 + 1)\,(M + 1)\,A\}^{-n_0 s}\, b_0^{-Ms}\, \gamma_1^{-N_0 n_0}\, H_0^{-Ms} \cdot 4^{-n_0 Ms}\, b_0^{Ms}\, (n_0 + 1)^{-Ms} \geqslant$$
$$\geqslant H_0^{-Ms}\, \gamma_2^{-n_0 (N_0 + M)}\, A^{-n_0 s},$$

где γ_2 зависит лишь от α_1.

ЛЕММА 5. *Пусть*

$$P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, \quad |a_i| \leqslant H, \quad a_0 > 0,$$

— полином с целыми рациональными коэффициентами без кратных корней, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — его корни, ζ — произвольное число. Если $\delta_0 = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\zeta - \xi_i|$, *то*

$$|P(\zeta)| \geqslant a_0 \delta_0 e^{-n\,(2n + \ln H)}.$$

Доказательство. Считаем $\delta_0 < \frac{1}{2}$, $n > 1$, так как иначе лемма уже верна. Пусть

$$\delta_i = \prod_{j \neq i} |\xi_i - \xi_j|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсутствие кратных корней означает, что целое рациональное число d — дискриминант полинома $P(z)$ — не нуль. Поэтому

$$a_0^{2n-1} \prod_{j=1}^{n} \prod_{k<j} |\xi_k - \xi_j|^2 = |d| \geqslant 1,$$

$$a_0^n \prod_{j=1}^{n} \prod_{k<j} |\xi_k - \xi_j| \geqslant 1,$$

$$\delta_i \geqslant a_0^{-n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \prod_{\substack{k<j \\ k \neq i}} |\xi_k - \xi_j|^{-1}.$$

Пусть $|\xi_l| \geqslant |\xi_m|$, если $l > m$, $|\xi_l| \geqslant 1$, если $l \geqslant s_0$, и $|\xi_l| < 1$, если $l < s_0$. Тогда число

$$A_{j,i} = \prod_{\substack{k<j \\ k \neq i}} |\xi_k - \xi_j| \leqslant \begin{cases} 2^n |\xi_j|^n & \text{при} \quad j \geqslant s_0, \\ 2^n & \text{при} \quad j < s_0. \end{cases}$$

Теперь, по лемме 2,

$$\delta_i \geqslant a_0^{-n} \prod_{j \neq i} A_{j,i}^{-1} \geqslant a_0^{-n} 2^{-n^2} \prod_{j \geqslant s_0} |\xi_i|^{-n} \geqslant a_0^{-n} 2^{-n^2} \frac{a_0^n}{H^n 2^{n^2} (n+1)^n} =$$
$$= H^{-n} 2^{-2n^2} (n+1)^{-n}. \tag{1'}$$

Перейдем к оценке числа $P(\zeta)$. Пусть $\delta_0 = |\zeta - \xi_{i_0}|$. Положим $\varepsilon_t = |\xi_{i_0} - \xi_{i_t}|$. Пусть $\varepsilon_t < 2\delta_0$ для $t = 1, 2, \ldots s$, а для $t = s+1, \ldots n-1$ будет $\varepsilon_t \geqslant 2\delta_0$. Тогда

$$|P(\zeta)| = a_0 \prod_{t=0}^{n-1} |\zeta - \xi_{i_t}| = a_0 \delta_0 \prod_{t=1}^{s} |\zeta - \xi_{i_t}| \prod_{t=s+1}^{n-1} |(\zeta - \xi_{i_0}) + (\xi_{i_0} - \xi_{i_t})| \geqslant$$
$$\geqslant a_0 \delta_0 \prod_{t=1}^{s} |\zeta - \xi_{i_t}| \cdot \prod_{t=s+1}^{n-1} (\varepsilon_t - \delta_0) \geqslant a_0 \delta_0 \prod_{t=1}^{s} |\zeta - \xi_{i_t}| \cdot \prod_{t=s+1}^{n-1} \frac{\varepsilon_t}{2}.$$

Положим $E_1 = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s$, $E_2 = \varepsilon_{s+1} \cdots \varepsilon_{n-1}$. Тогда из неравенства (1'), вследствие определения s, вытекает неравенство

$$(2\delta_0)^s \geqslant E_1 = \frac{\delta_{i_0}}{E_2} \geqslant \frac{1}{E_2 H^n 4^{n^2} (n+1)^n}.$$

Теперь

$$|P(\zeta)| \geqslant a_0 \delta_0^{s+1} E_2 \cdot 2^{-n+s+1} = 2a_0 \delta_0 \cdot (2\delta_0)^s \cdot E_2 2^{-n} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{a_0 \delta_0}{2^{n-1}} H^{-n} 4^{-n^2} (n+1)^{-n} \geqslant a_0 \delta_0 H^{-n} e^{-2n^2},$$

так как для $n \geqslant 2$ будет $e^{2n} > 4^n (n+1)$, а для $n = 1$ лемма очевидна.

ЛЕММА 6. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}z^ke^{lz},$$

где $C_{k,l}$ *— постоянные числа. Тогда*

$$C_{k,l}=\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{x=0}^{q_0-1}f^{(s)}(2\pi xi)\sum_{\tau=0}^{q_0-1-k}(-1)^{\tau}C_{k+\tau}^{\tau}\frac{(s+\tau)!}{s!}\frac{\Delta_{l,s+\tau}}{\Delta}\frac{\Delta_{1,x,k+\tau}}{\Delta_1}(2\pi i)^{-k-\tau}. \quad (2)$$

Здесь Δ — определитель Вандермонда, построенный из элементов l^s, $l,s=0,1,\ldots,q-1$ $(0^0=1)$, $\Delta_{l,s+\tau}$ — алгебраическое дополнение элемента $l^{s+\tau}$ $(\Delta_{l,s+\tau}=0$, если $s+\tau>q-1)$, Δ_1 — определитель Вандермонда, построенный из элементов x^k, $k,x=0,1,\ldots,q_0-1$, $\Delta_{1,x,k+\tau}$ — алгебраическое дополнение элемента $x^{k+\tau}$ $(\Delta_{1,x,k+\tau}=0$, если $k+\tau>q_0-1)$.

Доказательство. Продиференцировав $f(z)$, мы после замены z на $2\pi xi$ (x — целое число) получим

$$f^{(s)}(2\pi xi)=\sum_{\varkappa=0}^{q_0-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1}C_{\varkappa,\lambda}\sum_{t=0}^{\varkappa}C_s^t\frac{(2\pi xi)^{\varkappa-t}\varkappa!}{(\varkappa-t)!}\lambda^{s-t}. \quad (3)$$

Равенства (3) при $x=0,1,2,\ldots,q_0-1$, $s=0,1,\ldots,q-1$ представляют собой систему qq_0 линейных уравнений относительно qq_0 чисел $C_{\varkappa,\lambda}$. Определителем этой системы является многочлен относительно трансцендентного числа πi с целыми коэффициентами. Старший коэффициент этого многочлена равен $\Delta^{q_0}\Delta_1^q$, следовательно, определитель отличен от нуля и система уравнений имеет единственное решение. Подставим в правую часть (2) значение $f^{(s)}(2\pi xi)$ из (3). Коэффициентом при $C_{\varkappa,\lambda}$ будет

$$\delta_{\varkappa,\lambda}=\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{x=0}^{q_0-1}\sum_{t=0}^{\varkappa}\sum_{\tau=0}^{q_0-1-k}(-1)^{\tau}C_{k+\tau}^{\tau}\frac{(s+\tau)!}{s}\frac{\Delta_{l,s+\tau}}{\Delta}\frac{\Delta_{1,x,k+\tau}}{\Delta_1}(2\pi i)^{-k-\tau}C_s^t\cdot$$

$$\cdot\frac{(2\pi xi)^{\varkappa-t}\varkappa!}{(\varkappa-t)!}\lambda^{s-t}=\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{\tau=0}^{q_0-1-k}\sum_{t=0}^{\varkappa}(-1)^{\tau}C_{k+\tau}^{\tau}\frac{(s+\tau)!}{s!}C_s^t\frac{\varkappa!}{(\varkappa-t)!}\frac{\Delta_{l,s+\tau}}{\Delta}\cdot$$

$$\cdot\lambda^{s-t}(2\pi i)^{\varkappa-k-t-\tau}\sum_{x=0}^{q_0-1}x^{\varkappa-t}\frac{\Delta_{1,x,k+\tau}}{\Delta_1}.$$

Сумма по x в случае, когда $\varkappa-t=k+\tau$, равна 1 и обращается в нуль, если $\varkappa-t\neq k+\tau$. Поэтому $\varkappa\geqslant k$ и остаются лишь члены с $t\leqslant\varkappa-k$ и

$$\delta_{\varkappa,\lambda}=\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{t=0}^{\varkappa-k}(-1)^{\varkappa-k-t}C_{\varkappa-t}^kC_s^t\frac{\varkappa!}{(\varkappa-t)!}\frac{(s-t+\varkappa-k)!}{s!}\frac{\Delta_{l,s-t+\varkappa-k}}{\Delta}\lambda^{s-t}=$$

$$=\sum_{t=0}^{\varkappa-k}(-1)^{\varkappa-k-t}C_{\varkappa-t}^k\frac{\varkappa!}{(\varkappa-t)!}\sum_{s=0}^{q-1}C_s^t\frac{(s-t+\varkappa-k)!}{s!}\frac{\Delta_{l,s-t+\varkappa-k}}{\Delta}\lambda^{s-t}.$$

Во внутренней сумме множитель C_s^t обращает в нуль слагаемые с $s<t$, а множитель $\Delta_{l,s-t+\varkappa-k}$ обращает в нуль слагаемые с $s>q-1-\varkappa+k+t$, поэтому

$$\delta_{\varkappa,\lambda}=\sum_{t=0}^{\varkappa-k}(-1)^{\varkappa-k-t}C_{\varkappa-t}^{k}\frac{\varkappa!}{(\varkappa-t)!}\sum_{s=t}^{q-1-\varkappa+k+t}C_s^t\frac{(s-t+\varkappa-k)!}{s!}\lambda^{s-t}\frac{\Delta_{l,s-t+\varkappa-k}}{\Delta}=$$

$$=\sum_{t=0}^{\varkappa-k}(-1)^{\varkappa-k-t}C_{\varkappa-t}^{k}\frac{\varkappa!}{(\varkappa-t)!}\sum_{u=0}^{q-1-\varkappa+k}C_{u+t}^{t}\frac{(u+\varkappa-k)!}{(u+t)!}\lambda^{u}\frac{\Delta_{l,u+\varkappa-k}}{\Delta}=$$

$$=\sum_{t=0}^{\varkappa-k}(-1)^{\varkappa-k-t}\frac{\varkappa!}{k!(\varkappa-k-t)!}\sum_{u=0}^{q-1-\varkappa+k}\frac{(u+\varkappa-k)!}{t!\,u!}\lambda^{u}\frac{\Delta_{l,u+\varkappa-k}}{\Delta}=$$

$$=(-1)^{\varkappa-k}\frac{\varkappa!}{k!(\varkappa-k)!}\sum_{u=0}^{q-1-\varkappa+k}\frac{(u+\varkappa-k)!}{u!}\lambda^{u}\frac{\Delta_{l,u+\varkappa-k}}{\Delta}\sum_{t=0}^{\varkappa-k}(-1)^{t}C_{\varkappa-k}^{t}.$$

Сумма по t равна нулю или единице в зависимости от того, будет ли $\varkappa\neq k$ или $\varkappa=k$. В последнем случае

$$\delta_{\varkappa,\lambda}=\sum_{u=0}^{q-1}\lambda^{u}\frac{\Delta_{l,u}}{\Delta}=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \lambda=l,\\ 0, & \text{если}\quad \lambda\neq l.\end{cases}$$

Итак, коэффициент при $C_{\varkappa,\lambda}$ равен единице, если $(\varkappa,\lambda)=(k,l)$, и равен нулю, если это не так. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Пусть* $\varphi(z)$ *регулярна при* $|z|\leqslant kR$, $k>1$, $R>0$. *Пусть* ζ — *некоторое число и* $|\varphi^{(s)}(\zeta x)|\leqslant\delta$ *для* $x=0,\pm1,\ldots,\pm y_0$; $s=0,1,\ldots,t_0-1$, *где* $|\zeta y_0|=R$. *Если* $M(r)=\max\limits_{|z|\leqslant r}|\varphi(z)|$, *то для любых целых* $\sigma\geqslant0$ *и* $|z|\leqslant k_1R$, $1+|\zeta|/2R<k_1<k$, *справедливо неравенство*

$$|\varphi^{(\sigma)}(z)|\leqslant\frac{\sigma!\,k_2^{t_0+1}}{(k_2-k_1)^{\sigma+1}R^{\sigma}}\left\{\frac{M(kR)}{1-\frac{k_2}{k}}\left(\frac{k_2^2+1}{k^2-1}\right)^{y_0t_0}+\right.$$

$$\left.+t_0(2y_0+1)\,\delta\,(e^{2+\pi}\{1+k_2^2\})^{y_0t_0}\frac{\gamma_0^{t_0}}{(k_2-1)R-\frac{1}{2}|\zeta|}\right\},\qquad(4)$$

где γ_0 *не зависит от* $\delta, y_0, t_0, k, k_1, k_2$, *а* k_2 — *любое число, удовлетворяющее условию* $k_1<k_2<k$.

Доказательство. Воспользуемся интерполяционной формулой Эрмита для интерполирования с кратными узлами. Для z, лежащих вне Γ_x и $|z|\leqslant k_2R$, справедливо равенство

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left\{\frac{z(z^2-\zeta^2)\cdots(z^2-y_0^2\zeta^2)}{\xi(\xi^2-\zeta^2)\cdots(\xi^2-y_0^2\zeta^2)}\right\}^{t_0}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\xi-z}+$$

$$+\sum_{-y_0\leqslant x\leqslant y_0}\sum_{s=0}^{t_0-1}\frac{\varphi^{(s)}(\zeta x)}{s!\,2\pi i}\int\limits_{\Gamma_x}\left\{\frac{z(z^2-\zeta^2)\cdots(z^2-y_0^2\zeta^2)}{\xi(\xi^2-\zeta^2)\cdots(\xi^2-y_0^2\zeta^2)}\right\}^{t_0}\frac{(\xi-\zeta x)^s d\xi}{z-\xi},\qquad(5)$$

где Γ_x — окружность $|\xi - \zeta x| = \frac{|\zeta|}{2}$, а Γ — окружность $|\xi| = kR$. Используем формулу (5) для оценки $\varphi(z)$ на окружности $|z| = k_2 R$ (эта окружность не пересекает окружностей $|\xi - \zeta x| = \frac{|\zeta|}{2}$, так как $1 + \frac{|\zeta|}{2R} < k_1 < k_2$). Полученная оценка будет верна и внутри окружности $|z| = k_2 R$.

$$M(k_2 R) \leqslant \frac{M(kR)}{1 - \frac{k_2}{k}} \left(\frac{k_2^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^{y_0 t_0} +$$

$$+ t_0 (2y_0 + 1) \frac{\delta |\zeta|}{2} \max \left| \left\{ \frac{z(z^2 - \zeta^2) \cdots (z^2 - y_0^2 \zeta^2)}{\xi(\xi^2 - \zeta^2) \cdots (\xi^2 - y_0^2 \zeta^2)} \right\}^{t_0} \frac{(\xi - \zeta x)^s}{(\xi - z)} \right|,$$

где максимум берется по целым s, $0 \leqslant s \leqslant t_0 - 1$, и всем $\xi \in \Gamma_x$, $-y_0 \leqslant x \leqslant y_0$. Далее,

$$\min_{\xi \in \Gamma_x} |\xi(\xi^2 - \zeta^2) \cdots (\xi^2 - y_0^2 \zeta^2)| \geqslant$$

$$\geqslant \{y_0!\}^2 \cdot |\zeta|^{2y_0+1} \min_{\xi \in \Gamma_x} \left| \frac{\xi}{\zeta}\left(1 - \frac{\xi^2}{\zeta^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\xi^2}{y_0^2 \zeta^2}\right) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \{y_0!\}^2 \cdot |\zeta|^{2y_0+1} \min_{\xi \in \Gamma_x} \left| \frac{\frac{\pi\xi}{\zeta} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{n^2 \zeta^2}\right)}{\pi \prod\limits_{n=y_0+1}^{\infty} \left(1 + \frac{|\xi^2|}{n^2 |\zeta^2|}\right)} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \{y_0!\}^2 \cdot |\zeta|^{2y_0+1} \min_{\xi \in \Gamma_x} \left| \frac{\sin \frac{\pi\xi}{\zeta}}{\pi \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|\xi^2|}{n^2 |\zeta^2|}\right)} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \{y_0!\}^2 |\zeta|^{2y_0+1} \min_{\xi \in \Gamma_x} \left| \frac{\frac{\xi}{\zeta} \sin \frac{\pi\xi}{\zeta}}{\sin\left(\pi i \left|\frac{\xi}{\zeta}\right|\right)} \right| = A_x.$$

Но так как

$$\{y_0!\}^2 \geqslant y_0^{2y_0+1} e^{-2y_0} \gamma_1,$$

где γ_1 не зависит от y_0,

$$\min_{\xi \in \Gamma_x} \left| \frac{\xi}{\zeta} \sin \frac{\pi\xi}{\zeta} \right| = \frac{1}{2} \min_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \left| \sin\left(\pi x + \frac{1}{2} \pi e^{i\theta}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \min_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{i\theta}\right) \right| = \gamma > 0,$$

где γ — абсолютная постоянная,

$$\max_{\xi \in \Gamma_x} \left| \sin\left(\pi i \left|\frac{\xi}{\zeta}\right|\right) \right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{\xi \in \Gamma_x} \left| e^{\pi \left|\frac{\xi}{\zeta}\right|} - e^{-\pi \left|\frac{\xi}{\zeta}\right|} \right| \leqslant \frac{1}{2} e^{\pi\left(y_0 + \frac{1}{2}\right)},$$

то

$$A_x \geqslant y_0^{2y_0+1} e^{-2y_0} \gamma_1 |\zeta|^{2y_0+1} \cdot \gamma \cdot 2e^{-\pi\left(y_0 + \frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом,

$$M(k_2R) \leqslant \frac{M(kR)}{1-\frac{k_2}{k}}\left(\frac{k_2^2+1}{k^2-1}\right)^{y_0t_0} +$$

$$+ t_0(2y_0+1)\frac{\delta|\zeta|}{2}\left\{\frac{k_2R^{2y_0+1}}{(y_0|\zeta|)^{2y_0+1}}\frac{(k_2^2+1)^{y_0}}{\gamma_2 e^{-(2+\pi)y_0}}\right\}^{t_0}\frac{\max\left(1, \left|\frac{\zeta}{2}\right|^{t_0}\right)}{(k_2-1)R-\frac{|\zeta|}{2}}$$

где γ_2 не зависит от k, k_1, k_2, t_0, y_0 и δ. Отсюда, так как $|\zeta y_0| = R$, получаем

$$M(k_2R) \leqslant \frac{M(kR)}{1-\frac{k_2}{k}}\left(\frac{k_2^2+1}{k^2-1}\right)^{y_0t_0} +$$

$$+ t_0(2y_0+1)\frac{\delta|\zeta|}{2}\{(k_2^2+1)e^{2+\pi}\}^{t_0y_0}\left(\frac{k_2}{\gamma_2}\right)^{t_0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}|\zeta|\right)^{t_0}}{(k_2-1)R-\frac{1}{2}|\zeta|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(kR)}{1-\frac{k_2}{k}}\left(\frac{k_2^2+1}{k^2-1}\right)^{y_0t_0} + t_0(2y_0+1)\delta\{e^{2+\pi}(k_2^2+1)\}^{t_0y_0}\frac{(\gamma_0k_2)^{t_0}}{(k_2-1)R-\frac{1}{2}|\zeta|}, \tag{6}$$

где γ_0 не зависит от k, k_1, k_2, δ, t_0 и y_0.

Воспользуемся формулой Коши для производных аналитической функции. Для $|z| < k_2R$ справедливо равенство

$$\varphi^{(\sigma)}(z) = \frac{\sigma!}{2\pi!}\int\limits_{|\xi|=k_2R}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^{\sigma+1}}.$$

Оценим интеграл. Для $|z| \leqslant k_1R$

$$|\varphi^{(\sigma)}(z)| \leqslant \frac{\sigma!}{2\pi}2\pi k_2R\frac{M(k_2R)}{(k_2R-k_1R)^{\sigma+1}} = \sigma!\,M(k_2R)\frac{k_2}{R^{\sigma}(k_2-k_1)^{\sigma+1}}.$$

Отсюда и из неравенства (6) непосредственно следует (4).

§ 2. Аппроксимация числа π и логарифмов алгебраических чисел

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\alpha \neq 0,1$ — алгебраическое число. Существует такое число γ_1, зависящее лишь от α и выбора ветви функции $\ln z$, что*

$$|\ln\alpha - \xi| > e^{-\gamma_1 n^2\ln(n+1)(1+n\ln n+\ln H)\ln(2+n\ln n+\ln H)}, \tag{6'}$$

где ξ — любое алгебраическое число степени n и высоты H.

Доказательство. Пусть γ — число, введенное в лемме 4 для случая $\alpha_1 = \alpha$. Положим

$$b = \max(|\ln\alpha|, \ln^{-1}\alpha|), \quad \lambda = 60(1+b+\gamma) > 120, \quad \Lambda = \lambda^7. \tag{7}$$

Покажем, что неравенство

$$|\ln a - \xi| < e^{-\Lambda n^2\ln(n+1)N\ln^2 N}, \qquad N = n + \frac{\ln(H+1)}{\ln\ln(H+2)}, \tag{8}$$

для $N \geqslant N_7$ невозможно. Пусть, наоборот, неравенство (8) справедливо для сколь угодно больших N. Положим

$$q_0 = [\lambda^3 n^2 \ln N], \quad q = [\lambda^2 N \ln N], \quad C = [e^{\lambda^3 n N \ln^2 N}] \tag{9}$$

и рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} z^k e^{lz}, \quad C_{k,l} = \sum_{\tau=0}^{n-1} C_{k,l}^{(\tau)} \xi^\tau, \quad |C_{k,l}^{(\tau)}| \leqslant C. \tag{10}$$

Для производных этой функции справедливо равенство

$$f^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} \sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\, z^{k-t}}{(k-t)!} l^{s-t} e^{lz}. \tag{11}$$

Считаем, что $|\xi| \leqslant 2b$. Пусть

$$\begin{gathered} x = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \pm x_0, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \\ x_0 = [\lambda n \ln N], \quad s_0 = [\lambda^3 n N \ln N]; \end{gathered} \tag{12}$$

тогда, оценив правую часть (11), получим неравенство

$$\begin{gathered} |f^{(s)}(x \ln \alpha)| \leqslant q q_0 C n (2b)^{n-1} 2^{s_0-1} (q_0 - 1)!\, b^{q_0-1} q^{s_0-1} e^{q x_0 b} x_0^{q_0-1} \leqslant \\ \leqslant (2b)^{s_0+n+q_0-2} C q_0!\, q^{s_0} x_0^{q_0} e^{q x_0 b}. \end{gathered} \tag{13}$$

Выражения $f^{(s)}(x \ln \alpha)$ являются линейными однородными формами от $r = q q_0 n$ величин $C_{k,l}^{(\tau)}$. Разобьем $f^{(s)}(x \ln \alpha)$ на вещественную и мнимую части. Получим $m_0 = 2s_0(2x_0 + 1)$ форм $\operatorname{Im} f^{(s)}(x \ln \alpha)$ и $\operatorname{Re} f^{(s)}(x \ln \alpha)$. По лемме 1, целые рациональные числа $C_{k,l}^{(\tau)}$, удовлетворяющие условию (10), можно выбрать так, чтобы среди них были отличные от нуля и чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} |\operatorname{Re} f^{(s)}(x \ln \alpha)|, \ |\operatorname{Im} f^{(s)}(x \ln \alpha)| \leqslant \frac{(2b)^{q_0+s_0+n-1} C q_0!\, q^{s_0} x_0^{q_0} e^{q x_0 b}}{(C+1)^{\frac{n q q_0}{2s_0(2x_0+1)}} - 2}, \\ |f^{(s)}(x \ln \alpha)| \leqslant \frac{(2b)^{s_0+q_0+n} C q_0!\, q^{s_0} x_0^{q_0} e^{q x_0 b}}{(C+1)^{\frac{n q q_0}{2s_0(2x_0+1)}} - 2}, \\ x = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \pm x_0, s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1. \end{gathered}$$

Из (9) и (12) вытекают неравенства

$$\begin{gathered} q_0! \leqslant \exp\{2\lambda^3 n^2 \ln^2 N + O(n^2 \ln^{3/2} N\}, \\ q^{s_0} \leqslant \exp\{\lambda^3 n N \ln^2 N + O(n N \ln^{3/2} N)\}, \\ x_0^{q_0} \leqslant \exp\{\lambda^3 n^2 \ln^2 N + O(n^2 \ln^{3/2} N)\}, \\ e^{b q x^0} \leqslant \exp\{b \lambda^3 n N \ln^2 N + O(n N \ln^{3/2} N)\}, \\ \frac{n q q_0}{2s_0(2x_0+1)} \geqslant \frac{\lambda n}{4} + O\left(\frac{n}{\ln N}\right), \end{gathered} \tag{14}$$

так что для $x = 0, \ \pm 1, \ldots, \pm x_0$; $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, вследствие (7),

$$\begin{gathered} |f^{(s)}(x \ln \alpha)| \leqslant e^{-\left(\frac{1}{4}\lambda^4 - \frac{5+b}{n}\lambda^3\right) n^2 N \ln^2 N + O(n^2 N \ln^{3/2} N)} \leqslant \\ \leqslant e^{-\frac{1}{5}\lambda^4 n^2 N \ln^2 N + O(n^2 N \ln^{3/2} N)}. \end{gathered} \tag{15}$$

Выражение $f^{(s)}(x\ln\alpha)$ является полиномом от $\ln\alpha$. Символом $f_{s,x}(z)$ обозначим полином, получающийся из $f^{(s)}(x\ln\alpha)$ заменой $\ln\alpha$ на z. Тогда

$$f_{s,x}(\ln\alpha) = f^{(s)}(x\ln\alpha).$$

Далее, так как

$$f_{s,x}(\xi) - f_{s,x}(\ln\alpha) = \int\limits_{\ln\alpha}^{\xi} f'_{s,x}(\eta)\,d\eta, \tag{15'}$$

то из (15) и (8) получим неравенство $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant |f_{s,x}(\ln\alpha)| + |\ln\alpha - \xi| \cdot \max_{\eta=\xi+\theta(\ln\alpha-\xi)} |f'_{s,x}(\eta)| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{1}{5}\lambda^4 n^2 N \ln^2 N + O(n^2 N \ln^{3/2} N)} + e^{-\Lambda n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N} \cdot M_{s,x}, \tag{15''}$$

где

$$M_{s,x} = \max_{\eta} |f'_{s,x}(\eta))| \leqslant \max_{\eta} \left| \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} \sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\,x^{k-t}}{(k-t)!} (k-t)\,\eta^{k-t-1} l^{s-t} \alpha^{lx} \right| \leqslant$$
$$\leqslant q\,q_0 Cn\,(2b)^{n-1} \cdot 2^{s-1}\,(q_0-1)!\,\{2b\,(|x|+1)\}^{q_0-1}\,q^{s-1} e^{qb|x|} \leqslant$$
$$\leqslant (2b)^{q_0+n+s-2} n C q_0!\, q^s\,(|x|+1)^{q_0-1}\, e^{qb|x|}. \tag{16}$$

Для s и x из (12) справедливо

$$M_{s,x} \leqslant e^{(5+b)\lambda^3 nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)}, \tag{16'}$$

поэтому для s и x из (12), вследствие (15″),

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant e^{-\frac{1}{5}\lambda^4 n^2 N \ln^2 N + O(n^2 N \ln^{3/2} N)} +$$
$$+ e^{-\lambda^7 n^2 N \ln(n+1) \ln^2 N + (5+b)\lambda^3 nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)}. \tag{17}$$

Применим теперь к $f_{s,x}(\xi)$ лемму 4. Здесь

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \xi_1 = \xi, \quad N_0 = (q-1)\,x, \quad M = q_0 + n - 2 = \lambda^3 n^2 \ln N + O(n),$$
$$n_0 = n, \quad H_0 \leqslant e^{2N \ln N}.$$

Оценим $A = A_{s,x}$. Вследствие (11),

$$f_{s,x}(\xi) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} \left(\sum_{\tau=0}^{n-1} C_{k,l}^{(\tau)} \xi^{\tau} \right) \left(\sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\,x^{k-t}}{(k-t)!} \xi^{k-t} l^{s-t} \alpha^{lx} \right),$$

так что для любых s и x

$$A_{s,x} \leqslant q^{s+1} Cn\, 2^s \cdot q_0!\,(|x|+1)^{q_0} \tag{18}$$

и для s и x из (12), вследствие (14),

$$A_{s,x} \leqslant \exp\{5\lambda^3 nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)\}, \quad N_0 < \lambda^3 nN \ln^2 N.$$

По лемме 4, если $f_{s,x}(\xi) \neq 0$, то

$$|f_{s,x}(\xi)| \geqslant e^{-\gamma\{8\lambda^3 n^2 N \ln^2 N + O(n^2 N \ln^{3/2} N)\}} \tag{19}$$
$$(x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_0; \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.)$$

Для достаточно больших N, вследствие (7), неравенства (17) и (19) противоречивы, так что для $N \geqslant N_1$ будет $f_{s,x}(\xi) = 0$. Но тогда из (15′), (16′) и (8) вытекает, что

$$|f^{(s)}(x \ln \alpha)| = |f_{s,x}(\ln \alpha)| \leqslant |\ln \alpha - \xi| \cdot M_{s,x} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-(\lambda^4-5-b)\lambda^3 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)} \leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 N \ln(n+1) \ln^2 N}, \tag{20}$$
$$N \geqslant N_2, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_0; \quad s = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Положим $x_p = 2^p x_0$, $s_p = 2^p s_0$.

ЛЕММА А. *Пусть неравенство*

$$|f^{(s)}(x \ln \alpha)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N} \tag{21}$$

справедливо для $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_p$, $s = 0, 1, \ldots, s_p - 1$, *где* $p \leqslant \frac{\ln \lambda}{\ln 2} + 1$. *Тогда, если,* $N \geqslant N_5$, *то это неравенство справедливо и для* $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_{p+1}$, $s = 0, 1, \ldots, s_{p+1} - 1$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 7. Пусть

$$\zeta = \ln \alpha, \quad y_0 = x_p, \quad t_0 = s_p, \quad \sigma \leqslant s_{p+1} - 1, \quad k = 6, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad \varphi(z) = f(z),$$
$$R = x_p |\ln \alpha|, \quad \delta = e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N}.$$

Из формул (4) и (10) для $|z| \leqslant 2x_p |\ln \alpha| = x_{p+1} |\ln \alpha|$ вытекает неравенство

$$|f^{(\sigma)}(z)| \leqslant e^{s_{p+1} \ln s_{p+1} + O(nN \ln N)} \{2qq_0 Cn (2b)^{n-1} (6x_p b)^{q_0 - 1} e^{6bqx_p} 3{,}5^{-x_p s_p} +$$
$$+ e^{0{,}5\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N + (2+\pi+\ln 10) x_p s_p + O(nN \ln N)}\} \leqslant$$
$$\leqslant e^{2^{p+2}\lambda^3 nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)} \{\exp[(2\lambda^3 + 6b2^p\lambda^3) nN \ln^3 N -$$
$$- 2^{2p}\lambda^4 \ln 3{,}5 \cdot n^2 N \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)] + \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N +\right.$$
$$\left.+ (2 + \pi + \ln 10) 2^{2p}\lambda^4 n^2 N \ln^2 N + O(n^2 N \ln N)\right]\} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-2^{2p}\lambda^4 n^2 N \ln^2 N}, \quad N \geqslant N_3 \tag{22}$$

поскольку, вследствие (7),

$$\frac{\ln(n+1)}{2}\lambda^7 - (2+\pi+\ln 10) 2^{2p}\lambda^4 - 2^{p+2}\lambda^3 \geqslant \lambda^6 \left(\frac{\lambda \ln 2}{2} - 9 - 4\pi - 4\ln 10\right) >$$
$$> 4\lambda^6 \geqslant 2^{2p}\lambda^4,$$
$$2^{2p}\lambda^4 \ln 3{,}5 - (2 + 2^{p+2} + 6b2^p)\lambda^3 \geqslant 2^{2p}\lambda^4 \left(1{,}25 - \frac{6+6b}{\lambda}\right) > 2^{2p}\lambda^4.$$

Пусть

$$z = x \ln \alpha, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_{p+1}; \quad \sigma = 0, 1, \ldots, s_{p+1} - 1.$$

Воспользуемся неравенством (15″). Из (16), подставив значения $s = s_{p+1}$ и $x = x_{p+1}$, получим неравенство

$$M_{s,x} \leqslant e^{(4+2^{p+1}+2^{p+1}b)\lambda^3 nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)} \leqslant e^{(8+4b)\lambda^4 nN \ln^2 N},$$

так что из (8), (7), (15″) и (22) будем иметь

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant e^{-2^{2p}\lambda^4 n^2 N \ln^2 N} + e^{-\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N + (8+4b)\lambda^4 n N \ln^2 N} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-2^{2p-1}\lambda^4 n^2 N \ln N}, \quad N \geqslant N_3'. \tag{22'}$$

Воспользуемся снова леммой 4. Теперь уже

$$N \leqslant (q-1)\, x_{p+1} \leqslant 2^{p+1}\lambda^3 n N \ln^2 N,$$

а из (18) следует неравенство

$$A_{s,x} \leqslant \exp\{4\lambda^3 n N \ln^2 N + 2^{p+1}\lambda^3 n N \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)\}$$
$$(x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_p;\ s = 0, 1, \ldots, s_p - 1),$$

поэтому, или $f_{s,x}(\xi) = 0$, или

$$|f_{s,x}(\xi)| \geqslant e^{-\gamma\{\lambda^3 6n^2 N \ln^2 N + 2^{p+2}\lambda^3 n^2 N \ln^2 N + O(n^2 N \ln^{3/2} N)\}} \geqslant$$
$$\geqslant e^{-10\gamma\cdot 2^p \lambda^3 n^2 N \ln^2 N + O(n^2 N \ln^{3/2} N)}$$
$$(x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_p,\ t = 0, 1, \ldots, s_p - 1). \tag{23}$$

Для $N \geqslant N_4$ неравенства (22′) и (23) не могут иметь места одновременно, следовательно, для $N \geqslant N_4$ будет $f_{s,x}(\xi) = 0$ и

$$|f_{s,x}(\ln\alpha)| = \left|\int_{\ln\alpha}^{\xi} f'_{s,x}(\eta)\, d\eta\right| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N + 4\lambda^3 n N \ln^2 N + 2^{p+1}\lambda^3 n N \ln^2 N + 2^{p+1} b\lambda^3 n N \ln^2 N + O(Nn \ln^{3/2} N)} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N}, \quad N \geqslant N_5, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_{p+1},$$
$$s = 0, 1, \ldots, s_{p+1}.$$

Лемма А доказана.

Неравенство (20) показывает, что для $p = 0$ условия леммы А выполнены. Последовательно применяя лемму А, мы придем к неравенству

$$|f^{(s)}(x \ln\alpha)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N}, \quad N \geqslant N_5,$$
$$x = 0, \pm 1, \ldots, \pm \bar{x}, \quad s = 0, 1, \ldots, \bar{s} - 1,$$
$$\bar{x} = [\lambda^2 n \ln N], \quad \bar{s} = [\lambda^4 n N \ln N].$$

Применим опять лемму 7. Пусть

$$\zeta = \ln\alpha, \quad y_0 = \bar{x}, \quad t_0 = \bar{s}, \quad \sigma \leqslant q - 1,$$
$$k = \frac{10\lambda n}{\ln\alpha}, \quad k_1 = \frac{7\lambda n}{\ln\alpha}, \quad k_2 = \frac{8\lambda n}{\ln\alpha},$$
$$\varphi(z) = f(z), \quad R = \bar{x}\,|\ln\alpha|,$$
$$\delta = e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 \ln(n+1) N \ln^2 N}.$$

По формуле (4) для $|z| \leqslant \frac{7\lambda n}{|\ln\alpha|}\cdot \bar{x}\,|\ln\alpha| = 7\bar{x}\lambda n$ справедливо неравенство

$$|f^{(\sigma)}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\sigma\ln\sigma+O(nN\ln N)}\left\{\frac{qq_0}{0,2}Cnb^{n-1}(10\lambda^3n^2\ln N)^{q_0-1}e^{10q\lambda^3n^2\ln N}\left(\frac{64\lambda^2n^2+|\ln\alpha|^2}{100\lambda^2n^2-|\ln\alpha|^2}\right)^{\overline{s}\,\overline{x}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{1}{2}\lambda^7n^2\ln(n+1)N\ln^2N+(2+\pi+\ln 65+2\ln\lambda+2\ln n+2\ln b)\overline{x}\overline{s}+O(nN\ln N)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant e^{2\lambda^2N\ln^2N+O(n^2N\ln^{3/2}N)+3\lambda^3Nn\ln^2N+10\lambda^5n^2N\ln^2N-\ln\frac{99}{65}\cdot\lambda^6n^2N\ln^2N}+$$

$$+e^{-\frac{1}{2}\lambda^7n^2\ln(n+1)N\ln^2N+(10+2\ln\lambda+2\ln n+2\ln b)\lambda^6n^2N\ln^2N+O(n^2N\ln^{3/2}N)+2\lambda^2N\ln^2N}. \tag{24}$$

Но для $\lambda \geqslant 120$ всегда $\ln\lambda < \frac{\lambda}{25}$, $\ln b < b$. Поэтому, вследствие (7),

$$\frac{1}{2}\lambda\ln(n+1)-10-2\ln\lambda-2\ln b-2\ln n-\frac{2}{n^2\lambda^5} > \left(\frac{\lambda}{2}-2\right)\ln(n+1)-10-$$

$$-\frac{2\lambda}{25}-2b-\frac{2}{\lambda^5} \geqslant \left(\frac{\lambda}{2}-2\right)\ln 2-2b-10-\frac{2\lambda}{25}-\frac{2}{\lambda^5} > \frac{\lambda}{4}-2(b+1)-$$

$$-9-\frac{2\lambda}{25}-\frac{2}{\lambda^5} > \frac{17\lambda}{100}-\frac{\lambda}{30}-\frac{3\lambda}{40}-\frac{2}{\lambda^5} = \frac{74\lambda}{1200}-\frac{2}{\lambda^5} > 7{,}4-\frac{2}{\lambda^5} > 7,$$

$$\lambda\ln\frac{99}{65}-10-\frac{5}{\lambda^2} > \frac{4\lambda}{10}-\frac{\lambda}{12}-\frac{5}{\lambda^2} > \frac{\lambda}{5},$$

и для $N \geqslant N_6$ будет справедливо неравенство

$$|f^{(\sigma)}(z)| \leqslant e^{-\frac{1}{6}\lambda^6n^2N\ln^2N}, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, q-1, \quad |z| \leqslant 7\lambda\overline{nx}. \tag{25}$$

Далее, для $N \geqslant N_7$ имеет место неравенство

$$2\pi q_0 \leqslant 2\pi\lambda^3n^2\ln N < 7\lambda n(\lambda^2 n\ln N - 1) < 7\lambda\overline{nx},$$

так что неравенство (25) справедливо для $z = 0, 2\pi i, 4\pi i, \ldots, 2q_0\pi i$.

Воспользуемся леммой 6. Из формулы (2) получим неравенство

$$|C_{k,l}| \leqslant e^{-\lambda^6n^2N\ln^2N}qq_02^{q_0-1}(q-1)!\max_{\tau+s=0,1,\ldots,q-1}\left|\frac{\Delta_{l,s+\tau}}{\Delta}\right|\cdot$$

$$\cdot\max_{k+\tau=0,1,\ldots,q_0-1}\left|\frac{\Delta_{1,x,k+\tau}}{\Delta_1}\right| \tag{26}$$

(смысл символов Δ, Δ_1, $\Delta_{l,s+\tau}$, $\Delta_{1,x,k+\tau}$ был указан в условиях леммы 6). Оценим отношения $\Delta_{l,s+\tau}/\Delta$ и $\Delta_{1,x,k+\tau}/\Delta_1$. Воспользуемся равенством

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \ldots & a_p^{p-1} \\ a_0^p & a_1^p & a_2^p & \ldots & a_p^p \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=0}^{i-1}(a_i - a_j). \tag{26'}$$

Считаем числа a_i различными. Символом $\delta_l(z)$ обозначим определитель, получающийся из δ заменой $(l+1)$-го столбца на столбец из величин $1, z, z^2, \ldots, z^p$. Тогда, по формуле (26′),

$$\delta(z)=\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=0}^{i-1}(a_i-a_j)\cdot\prod_{j=0}^{l-1}(z-a_j)\cdot\prod_{i=l+1}^{p}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{i-1}(a_i-a_j)\cdot\prod_{i=l+1}^{p}(a_i-z)=$$

$$=\delta\frac{\prod\limits_{j=0}^{l-1}(z-a_j)\cdot\prod\limits_{i=l+1}^{p}(a_i-z)}{\prod\limits_{j=0}^{l-1}(a_l-a_j)\cdot\prod\limits_{i=l+1}^{p}(a_i-a_l)}.$$

Пусть $\delta_{l,s}$ — алгебраическое дополнение элемента a_l^s определителя δ. Так как $\delta_{l,s}$ является коэффициентом при z^s полинома $\delta_l(z)$, то

$$|\delta_{l,s}|\leqslant\frac{|\delta|\cdot A_{l,s}}{\prod\limits_{j=0}^{l-1}|a_l-a_j|\cdot\prod\limits_{i=l+1}^{p}|a_i-a_l|},$$

где $A_{l,s}$ есть сумма всевозможных произведений по $p-s$ различных множителей, выбранных из чисел $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{l-1}|, |a_{l+1}|, \ldots, |a_p|$.

Пусть $p=q-1$, $a_i=i$. Тогда $\delta=\Delta$, $\delta_{l,s}=\Delta_{l,s}$ и

$$|\Delta_{l,s}|\leqslant\Delta\frac{2^{q-1}(q-1)!}{l!\,(q-l-1)!}\leqslant\Delta\cdot 4^{q-1}. \tag{27}$$

Точно так же

$$|\Delta_{1,x,k}|\leqslant\Delta_1\cdot 4^{q_0-1}. \tag{28}$$

Теперь из (26), (27) и (28) для всех k, l выводим неравенство

$$|C_{k,l}|\leqslant e^{-\frac{1}{6}\lambda^4 n^2 N\ln^2 N+\lambda^3 N\ln^2 N+O(nN\ln^{3/2}N)} \tag{29}$$

Однако, по лемме 4 ($N_0=0$, $A=C$, $M=n-1$, $n_0=n$, $H_0=H\leqslant e^{2N\ln N}$), или $C_{k,l}=0$, или

$$|C_{k,l}|\geqslant e^{-\gamma(n^2+2nN\ln N+\lambda^2 n^2 N\ln^2 N)}\geqslant e^{-4\gamma\lambda^2 n^2 N\ln^2 N}. \tag{30}$$

Для $N\geqslant N_7$ неравенства (29) и (30) противоречивы, поэтому для $N\geqslant N_7$ все $C_{k,l}=0$. Но ξ — алгебраическое число степени n, значит все $C_{k,l}^{(\tau)}$ равны нулю. Но это не так, следовательно, для $N\geqslant N_7$ неравенство (8) невозможно. Увеличив Λ, добьемся того, что неравенство (8) станет невозможным при всех N. Это доказывает неравенство (6′), так как

$$(1+n\ln n+\ln H)\ln(2+n\ln n+\ln H)>\gamma_0 N\ln^2 N,$$

где $\gamma_0>0$ и не зависит от n и H.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\alpha \neq 0, 1$ — *алгебраическое число. Существует такое число* γ_2, *зависящее лишь от* α *и выбора ветви функции* $\ln z$, *что*

$$|P(\ln\alpha)| > e^{-\gamma_2 n^2 \ln(n+1)(1+n\ln n+\ln H)\ln(2+n\ln n+\ln H)},$$

где $P(z) \neq 0$ — *полином с целыми рациональными коэффициентами степени* n *и высоты* H.

Доказательство. Теорема вытекает непосредственно из теоремы 1 для ограниченных n, поэтому считаем $n \geqslant 6$. Пусть γ — некоторое число и

$$|P(\ln\alpha)| \leqslant e^{-\gamma n^2 \ln(n+1)(1+n\ln n+\ln H)\ln(2+n\ln n+\ln H)}.$$

Тогда хотя бы для одного неприводимого делителя $p(z)$ полинома $P(z)$ справедливо неравенство

$$|P(\ln\alpha)| \leqslant e^{-\gamma n_1 n \ln(n+1)(1+n\ln n+\ln H)\ln(2+n\ln n+\ln H)}$$

где n_1 — степень $p(z)$. Если H_1 — высота $p(z)$, то, по лемме 2, $H_1 \leqslant H6^n$, откуда, так как $\ln n > 1$,

$$1 + n_1\ln n_1 + \ln H_1 \leqslant 1 + n\ln n + n\ln 6 + \ln H \leqslant 2(1 + n\ln n + \ln H),$$
$$\ln(n_1\ln n_1 + \ln H_1 + 2) \leqslant \ln 2 + \ln(n\ln n + \ln H + 2) \leqslant 2\ln(n\ln n + \ln H + 2),$$

так что

$$|p(\ln\alpha)| \leqslant e^{-\frac{1}{4}\gamma n_1^2 \ln(n_1+1)(1+n_1\ln n_1+\ln H_1)\cdot\ln(n_1\ln n_1+\ln H_1+2)}$$

Пусть ξ — корень $p(z)$, ближайший к $\ln\alpha$. Тогда, по лемме 5,

$$|\ln\alpha - \xi| \leqslant e^{2n_1^2+n_1\ln H_1-\frac{1}{4}\gamma n_1^2\ln(n_1+1)(1+n_1\ln n_1+\ln H_1)\ln(2+n_1\ln n_1+\ln H_1)} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\left(\frac{\gamma}{4}-2\right)n_1^2\ln(n_1+1)(1+n_1\ln n_1+\ln H_1)\ln(n_1\ln n_1+\ln H_1+2)}$$

и из теоремы 1 вытекает, что $\frac{\gamma}{4} - 2 < \gamma_1$. Итак, достаточно взять $\gamma_2 = 4\gamma_1 + 8$.

ТЕОРЕМА 3. *Существует такое число* γ_3, *что*

$$|\xi - \pi| > e^{-\gamma_3 n(1+n\ln n+\ln H)\ln(2+n\ln n+\ln H)},$$

где ξ — *любое алгебраическое число степени* n *и высоты* H.

Доказательство. Пусть γ — число, введенное в лемме 4 для $\alpha_1 = i$. Положим

$$\lambda = 100(1+\gamma); \quad \Lambda = \lambda^7. \tag{30'}$$

Покажем, что неравенство

$$|\xi - \pi| < e^{-\Lambda nN\ln^2 N}, \quad N = n + \frac{\ln(H+1)}{\ln\ln(H+2)}, \tag{31}$$

для $N \geqslant N_7$ невозможно. Пусть, наоборот, неравенство (31) выполняется для сколь угодно больших N. Пусть

$$q_0 = [\lambda^3 n\ln N], \quad q = [\lambda^2 N\ln N], \quad C = [e^{\lambda^3 N\ln^2 N}]. \tag{32}$$

Снова рассмотрим функцию (10) с q, q_0, C из (32). Производные этой функции удовлетворяют равенству (11). Пусть $|\pi-\xi|\leqslant 1$ и

$$x=0,\pm 1,\ \ldots,\ \pm x_0,\quad s=0,1,\ \ldots,\ s_0-1,\ x_0=[\lambda n\ln N],\quad s_0=[\lambda^3 N\ln N); \tag{33}$$

тогда из формулы (11) вытекает неравенство

$$|f^{(s)}(\pi i x)|\leqslant qq_0Cn(\pi+1)^{n-1}\cdot 2^{s_0-1}(q_0-1)!\,(x_0\pi)^{q_0-1}q^{s_0-1}\leqslant$$
$$\leqslant(2\pi)^{q_0+s_0+n-2}\,nCq_0!\,q^{s_0}x_0^{q_0}.$$

Выражения $\operatorname{Re}f^{(s)}(\pi i x)$ и $\operatorname{Im}f^{(s)}(\pi i x)$ являются линейными однородными формами от $r=qq_0n$ величин $C_{k,l}^{(\tau)}$. Число этих форм $m_0=2s_0(2x_0+1)$. По лемме 1, целые рациональные числа $C_{k,l}^{(\tau)}$, удовлетворяющие условию (10) при C из (32), можно выбрать так, чтобы среди них были отличные от нуля и чтобы выполнялись неравенства

$$|\operatorname{Re}f^{(s)}(\pi x i)|,\ |\operatorname{Im}f^{(s)}(\pi x i)|\leqslant\frac{(2\pi)^{q_0+s_0+n-1}\,n\cdot Cq^{s_0}x_0^{q_0}q_0!}{(C+1)^{\frac{nqq_0}{2s_0(2x_0+1)}-2}}\,.$$
$$x=0,\pm 1,\ \ldots,\ \pm x_0,\quad s=0,1,\ \ldots,\ s_0-1.$$

Из (32) и (33) вытекают неравенства

$$\begin{gathered}q_0!\leqslant\exp\{\lambda^3 n\ln^2 N+O(n\ln^{3/2}N)\},\\ q^{s_0}\leqslant\exp\{\lambda^3 N\ln^2 N+O(N\ln^{3/2}N)\},\\ x_0^{q_0}\leqslant\exp\{\lambda^3 n\ln^2 N+O(n\ln^{3/2}N)\},\\ \frac{nqq_0}{2s_0(2x_0+1)}\geqslant\frac{\lambda n}{4}+O\left(\frac{n}{\ln N}\right),\end{gathered} \tag{34}$$

так что для s и x из (33)

$$|f^{(s)}(\pi i x)|\leqslant|\operatorname{Re}f^{(s)}(\pi i x)|+|\operatorname{Im}f^{(s)}(\pi i x)|\leqslant$$
$$\leqslant 2e^{-\left(\frac{\lambda}{4}-\frac{4}{n}\right)\lambda^3 nN\ln^2 N+O(nN\ln^{3/2}N)}\leqslant e^{-\frac{1}{5}\lambda^4 nN\ln^2 N+O(nN\ln^{3/2}N)} \tag{35}$$

Выражение $f^{(s)}(\pi i x)$ является полиномом от π. Символом $f_{s,x}(z)$ обозначим полином, получающийся из $f^{(s)}(\pi i x)$ заменой π на z. Тогда, вследствие равенства

$$f_{s,x}(\xi)=f_{s,x}(\pi)+\int_\pi^\xi f'_{s,x}(\eta)\,d\eta, \tag{35$'$}$$

из (31) и (35) выводим неравенство

$$|f_{s,x}(\xi)|\leqslant|f_{s,x}(\pi)|+|\xi-\pi|\cdot\max_{\eta=\xi+\theta(\pi-\xi)}|f_{s,x}(\eta)|,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1. \tag{35$''$}$$

Далее,

$$M_{s,x}=\max_{\eta=\xi+\theta(\pi-\xi)}|f'_{s,x}(\eta)|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}|C_{k,l}|\sum_{t=0}^{k}C_s^t\frac{k!\,|x|^{k-t}}{(k-t)!}(k-t)(\pi+1)^{k-t-1}l^{s-t}\right|\leqslant$$
$$\leqslant(2\pi)^{q_0+s+n-1}\,nCq_0!\,q^s(1+|x|)^{q_0}.$$

Для s и x из (33), а также и для $|x| \leqslant 4q_0$,

$$M_{s,x} \leqslant e^{4\lambda^3 N \ln^2 N + O(N \ln^{3/2} N)}, \tag{36}$$

поэтому из (35″), (36) и (31) вытекает неравенство

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant e^{-\lambda^7 N \ln^2 N + 4\lambda^3 N \ln^2 N + O(N \ln^{3/2} N)} + \\ + e^{-\frac{1}{5}\lambda^4 nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)}. \tag{37}$$

Применим к алгебраическому числу $f_{s,x}(\xi)$ лемму 4. Здесь

$$\alpha_1 = i, \quad \xi_1 = \xi, \quad N_0 = 1, \quad M_0 = q_0 + n - 2 = \lambda^3 n \ln N + O(n),$$
$$H_0 = H \leqslant e^{2N \ln N}, \quad n_0 = n.$$

Оценим $A = A_{s,x}$. Вследствие (11),

$$f_{s,x}(\xi) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} \left(\sum_{\tau=0}^{k-1} C_{k,l}^{(\tau)} \xi^\tau \right) \left(\sum_{t=0}^{k} \pm C_s^t \frac{k!\, x^{k-t}}{(k-t)!} \xi^{k-t} l^{s-t} i^a \right),$$

где a равно нулю для четных $k-t$ и равно 1 для нечетных, так что для любых s и x

$$A_{s,x} \leqslant qq_0nC\, 2^s q^s (q-1)!\, (|x|+1)^{q_0-1} \leqslant 2^{s+n} Cq_0!\, q^{s+1} (|x|+1)^{q_0-1}.$$

и для s и x из (33), а также и для $|x| \leqslant 4q$, вследствие (34),

$$A_{s,x} \leqslant \exp\{4\lambda^3 N \ln^2 N + O(N \ln^{3/2} N)\}. \tag{38}$$

По лемме 4, или $f_{s,x}(\xi) = 0$, или

$$|f_{s,x}(\xi)| \geqslant e^{-6\gamma\lambda^3 nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)}. \tag{39}$$

Но для достаточно больших N неравенства (37) и (39) противоречивы, так что для $N \geqslant N_1$ будет $f_{s,x}(\xi) = 0$ и из (35′), (36′) и (31) вытекает, что

$$|f^{(s)}(\pi i x)| = |f_{s,x}(\pi)| \leqslant |\pi - \xi| \cdot M_{s,x} \leqslant e^{-\lambda^7 nN \ln^2 N + 4\lambda^3 N \ln^2 N + O(N \ln^{3/2} N)} \leqslant \\ \leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 nN \ln^2 N}, \quad N \geqslant N_2, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_0, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1. \tag{40}$$

Положим $x_p = 2^p x_0$.

ЛЕММА B. *Пусть неравенство*

$$|f^{(s)}(\pi i x)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 nN \ln^2 N} \tag{41}$$

справедливо для $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_p$, $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, *где* $p \leqslant \frac{\ln 3\lambda^2}{\ln 2}$. *Тогда, если* $N \geqslant N_6$, *то это неравенство будет справедливым для* $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_{p+1}$ *и* $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1. Пусть

$$\zeta = \pi, \quad y_0 = x_p, \quad t_0 = s_0, \quad \sigma \leqslant s_0 - 1, \quad k = 6, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 3,$$
$$\varphi(z) = f(z), \quad R = x_p \pi, \quad \delta = e^{-0{,}5\lambda^7 nN \ln^2 N}.$$

По формуле (4) для $|z| \leqslant 2\pi x_p = \pi x_{p+1}$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |f^{(\sigma)}(z)| &\leqslant \{q q_0 C n (2\pi)^{n-1} (6\pi x_p)^{q_0-1} e^{6\pi q x_p} 2\cdot 3{,}5^{-x_p s_0} + \\ &+ e^{-0{,}5\lambda^7 nN \ln^2 N + (2+\pi+\ln 10) x_p s_0 + O(nN \ln^{3/2} N)}\} e^{s_0 \ln s_0 + O(N \ln N)} \leqslant \\ &\leqslant e^{\lambda^3 N \ln^2 N + O(N \ln^{3/2} N)} \{e^{(2+6\pi 2^p)\lambda^3 nN \ln^2 N - \lambda^4 \cdot 2^p \ln 3{,}5 nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)} + \\ &+ e^{-0{,}5\lambda^7 nN \ln^2 N + (2+\pi+\ln 10)\lambda^4 2^p nN \ln^2 N + O(nN \ln^{3/2} N)}\} \leqslant \\ &\leqslant e^{-2^p \lambda^4 nN \ln^2 N}, \quad N \geqslant N_3, \end{aligned} \tag{42}$$

так как, вследствие (30′),

$$\frac{1}{2}\lambda^7 - \lambda^3 - (2+\pi+\ln 10)\, 2^p \lambda^4 \geqslant \lambda^6 \left(\frac{\lambda}{2} - 1 - 6 - 3\pi - 3\ln 10\right) > $$
$$> 3\lambda^6 \geqslant 2^p \lambda^4,$$
$$\lambda^4 2^p \ln 3{,}5 - \lambda^3 - (2 + 6\pi 2^p)\lambda^3 \geqslant 2^p \lambda^4 \left(1{,}25 - \frac{3+6\pi}{\lambda}\right) > 2^p \lambda^4.$$

Пусть

$$z = \pi i x, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_{p+1}, \quad \sigma = 01, \ldots, s_0 - 1.$$

Воспользуемся неравенством (35″). Из (36), (31), (42) и (30′) и условия, $2^p \leqslant 3\lambda^2$ получим неравенство

$$\begin{aligned} |f_{s,x}(\xi)| &\leqslant e^{-2^p \lambda^4 nN \ln^2 N} + e^{-\lambda^7 nN \ln^2 N + 4\lambda^3 N \ln^2 N + O(N \ln^{3/2} N)} \leqslant \\ &\leqslant e^{-2^{p-1}\lambda^4 nN \ln^2 N}, \quad N \geqslant N_4. \end{aligned} \tag{43}$$

Воспользуемся снова леммой 4. Для $A_{s,x}$ справедлива оценка (38), остальные буквы также сохраняют прежнее значение, так что или $f_{s,x}(\xi) = 0$, или справедливо неравенство (39). Но для $N \geqslant N_5$ неравенства (39) и (43) противоречат друг другу, следовательно, $f_{s,x}(\xi) = 0$. Но тогда (31) и (36) показывают, что

$$|f^{(s)}(\pi i x)| = |f_{s,x}(\pi)| = |\pi - \xi| \cdot \left| \int_\pi^\xi f'_{s,x}(\eta)\, d\eta \right| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda^7 nN \ln^2 N + 4\lambda^3 N \ln^2 N + O(N \ln^{3/2} N)} \leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 nN \ln^2 N},$$
$$N \geqslant N_6, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_{p+1}, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Лемма В доказана.

Неравенство (40) показывает, что для $p = 0$ условия леммы В выполнены. Последовательно применяя лемму В, придем к неравенству

$$|f^{(s)}(\pi i x) \leqslant e^{-0{,}5\lambda^7 nN \ln^2 N}, \quad N \geqslant N_6, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm \bar{x}, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1,$$
$$\bar{x} = 2^{[\ln 3\lambda^2/\ln 2]+1} \cdot x_0 > 3\lambda^2 (\lambda n \ln N - 1) \geqslant 2q_0.$$

Теперь можно воспользоваться формулой (3). Из оценок (27) и (28) получим неравенство

$$\begin{aligned} &|C_{k,l}| \leqslant e^{-0{,}5\lambda^7 nN \ln^2 N + \lambda^3 N \ln^2 N + O(N \ln^{3/2} N)}, \\ &k = 0, 1, \ldots, q_0 - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, q - 1. \end{aligned} \tag{44}$$

Но, по лемме 4 ($N_0 = 0,\ A = C,\ M = n - 1,\ n_0 = n,\ H_0 = H \leqslant e^{2N \ln N}$), или $C_{k,l} = 0$, или

$$|C_{k,l}| \geqslant e^{-\gamma(n^2 + 2nN \ln N + \lambda^3 nN \ln^2 N)} \geqslant e^{-4\gamma\lambda^3 nN \ln^2 N}. \qquad (45)$$

Для $N \geqslant N_7$ неравенства (44) и (45) противоречивы, т. е. все $C_{k,l} = 0$, а так как ξ — алгебраическое число степени n, то и все $C_{k,l}^{(\tau)} = 0$. Но это не так, следовательно, для $N \geqslant N_7$ неравенство (31) невозможно.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Существует такое число γ_4, что*

$$|P(\pi)| > e^{-\gamma_4 n(n \ln n + 1 + \ln H) \ln (n \ln n + 2 + \ln H)},$$

где $P(z) \not\equiv 0$ — полином с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H.

Эта теорема выводится из теоремы 3 точно так же, как теорема 2 была выведена из теоремы 1.

§ 3. Теорема 1 может быть использована для построения примеров трансцендентных чисел. Приведем один такой пример.

Пусть $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, где

$$\alpha_n = \sqrt[k_0]{1 + \frac{1}{m_1}\sqrt[k_1]{1 + \frac{1}{m_2}\sqrt[k_2]{1 + \cdots + \frac{1}{m_n}}}}, \qquad (46)$$

$k_0, k_1, k_2, \ldots;\ m_1, m_2, \ldots$ — натуральные числа, $k_i \geqslant 2$, и везде берутся вещественные положительные значения корней. α — конечное число. Действительно, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ и

$$\alpha_n \leqslant \sqrt{\underset{0}{1} + \sqrt{\underset{1}{1} + \sqrt{\underset{2}{1} \ldots + \underset{n}{1}}}} = \beta_n,$$

а числа β_n ограничены, так как

$$\beta_n^2 = 1 + \beta_{n-1} < 1 + \beta_n,$$
$$\beta_n^2 - \beta_n < 1,$$
$$\left(\beta_n - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4},$$
$$\beta_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Будем записывать число α так:

$$\alpha = \sqrt[k_0]{1 + \frac{1}{m_1}\sqrt[k_1]{1 + \frac{1}{m_2}\sqrt[k_2]{1 + \cdots + \frac{1}{m_n}\delta_n}}}.$$

Оценим разность $\alpha - \alpha_n$. Имеем неравенства:

$$\delta_n \leqslant 1 + \beta, \quad \beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n, \quad \beta \leqslant \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$0 < \alpha - \alpha_n \leqslant \sqrt[k_0]{1 + \frac{1}{m_1}\sqrt[k_1]{1 + \frac{1}{m_2}\sqrt[k_2]{1 + \cdots + \frac{1}{m_n}\sqrt[k_n]{1 + \frac{\beta}{m_{n+1}}}}}} -$$
$$- \sqrt[k_0]{1 + \frac{1}{m_1}\sqrt[k_1]{1 + \frac{1}{m_2}\sqrt[k_2]{1 + \cdots + \frac{1}{m_n}}}}.$$

Пользуясь формулой $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + \cdots + y^{n-1})$ и замечая, что в нашем случае $x > 1$, $y > 1$, получим

$$0 < \alpha - \alpha_n \leqslant \frac{1}{k_0 m_1}\left(\sqrt[k_1]{1 + \frac{1}{m_2}\sqrt[k_2]{1 + \cdots + \frac{1}{m_n}\sqrt[k_n]{1 + \frac{\beta}{m_{n+1}}}}} - \right.$$
$$\left. - \sqrt[k_1]{1 + \frac{1}{m_2}\sqrt[k_2]{1 + \cdots + \frac{1}{m_n}}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \cdots \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2k_0 k_1 \cdots k_n \cdot m_1 m_2 \cdots m_{n+1}} < \frac{2}{k_0 k_1 \cdots k_n \cdot m_1 m_2 \cdots m_{n+1}}. \quad (47)$$

Из равенства (46) последовательным возведением в степень можно получить уравнение, которому удовлетворяет число α_n. При этом степень этого уравнения и величина коэффициентов будут зависеть лишь от чисел $k_0, k_1, \ldots, k_n$ и $m_1, m_2, \ldots, m_n$. С другой стороны, разность $\alpha - \alpha_n$, как видно из (47), зависит еще и от m_{n+1}. Поэтому, выбирая числа m_{n+1} в зависимости от k_i, m_i с $i \leqslant n$, можно построить число α, допускающее сколь угодно хорошую аппроксимацию алгебраическими числами; следовательно, числа m_i можно выбрать так, чтобы из теоремы 1 следовала трансцендентность числа e^α.

Пусть, например,

$$k_0 = k_1 = \cdots = k_s = \cdots = 2, \quad m_s = 2^{2^{2s^2}}.$$

Неравенство (47) показывает, что

$$0 < \alpha - \alpha_k < 2^{-k - \sum\limits_{s=0}^{k+1} 2^{2s^2}} < 2^{-2^{2(k+1)^2}}. \quad (48)$$

Последовательным возведением в квадрат получим из (46) для α_k уравнение степени $n_k = 2^k$. Оценим коэффициенты этого уравнения. Если уравнение для α_k, полученное указанным выше способом, есть

$$P_k(z) = 0,$$

то уравнением для α_{k+1} будет

$$P_{k+1}(z) = (\{P_k(z) + 1\}^2 - 1)m_{k+1} - 1 = 0.$$

Если коэффициенты уравнения $P_k(z) = 0$ по абсолютной величине не превосходили H_k, то

$$H_{k+1} \leqslant (H_k + 1)^2 (2^k + 1)^2 m_{k+1}. \quad (49)$$

Докажем справедливость неравенства

$$H_k \leqslant 2^{2^{2k^2+1}}. \quad (50)$$

Для $k = 1$ это неравенство справедливо, так как уравнение для α_1 имеет вид

$$m_1 z^2 - 1 - m_1 = 0, \quad m_1 = 2^{2^2} = 16,$$

а $H_1 = 17 < 2^{2^3} = 256$. Пусть неравенство (50) справедливо для $k = 1, 2, \ldots, k_0$. Тогда оно верно и для $k = k_0 + 1$. Действительно, из (49) для $k_0 \geqslant k \geqslant 1$ следует неравенство

$$H_{k+1} \leqslant (2^{2^{2k^2+1}} + 1)^2 (2^k + 1)^2 \, 2^{2^{2(k+1)^2}} \leqslant (2^{2^{2k^2+2}} + 2^{1+2^{2k^2+1}} + 1)(2^{2k} + 2^{k+1} + 1) \, 2^{2^{2(k+1)^2}} \leqslant 4 \cdot 2^{2^{2k^2+2}} 4 \cdot 2^{2k} \cdot 2^{2^{2(k+1)^2}} = 2^{2^{2k^2+2} + 2^{2(k+1)^2} + 4 + 2k} < 2^{2^{2(k+1)^2+1}},$$

так как

$$2^{2k^2+2} + 2k + 4 \leqslant 2^{2k^2+2} + 2^2 + 2^k < 2^{2k^2+k+4} < 2^{2(k+1)^2}$$

Пусть γ_0 — любое фиксированное число. Тогда для $k \geqslant k_1$

$$e^{-\gamma_0 n^2_k \ln (n_k+1)(1+n_k \ln n_k + \ln H_k) \ln(2+n_k \ln n_k + \ln H_k)} \geqslant e^{-\gamma_0 k 2^{2k}(1+k2^k+2^{2k^2+1}) \ln (2+k2^k+2^{2k^2+1})} \geqslant e^{-\gamma_0 \cdot 2^{2k} k \cdot 3 \cdot 2^{2k^2+1} (2k^2+3)} > 2^{-2^{2(k+1)^2}}. \quad (51)$$

Теперь из неравенств (6′), (48) и (51) вытекает, что e^α — трансцендентное число.

Пользуясь теоремой 1, можно строить также трансцендентные числа, задавая α в виде бесконечного ряда или бесконечного произведения.

Поступило
15. IX. 1949

ЛИТЕРАТУРА

1 Mahler K., Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, Journ. reine u. ang. Math., 166 (1932), 118—150.

2 Гельфонд А. О., О седьмой проблеме Гильберта, Доклады Ак. Наук СССР, 2 (1934), 1—6.

3 Gelfond A. O., Sur le septième problème de Hilbert, Известия Ак. Наук СССР, сер. ф.-м., 4 (1934), 623—630.

4 Гельфонд А. О., О приближениях трансцендентных чисел алгебраическими, Доклады Ак. Наук СССР, 2 (1935), 177—182.

5 Гельфонд А. О., О приближении алгебраическими числами отношения логарифмов двух алгебраических чисел, Известия Ак. Наук СССР, сер. мат., 3 (1939), 509—518.

6 Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, Доклады Ак. Наук СССР, 66 (1949), 565—567.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 75—90

Д. М. ВОЛКОВ

БИЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В 1945 г. С. Л. Соболевым в статье «О почти периодичности решений волнового уравнения» приводится интеграл краевой задачи, отличный от классического интеграла энергии [1]. Далее, С. Л. Соболевым была поставлена проблема отыскания всей совокупности билинейных интегралов данной краевой задачи, а также смежных задач. Настоящая статья служит ответом на поставленный вопрос.

§ 1. Постановка задачи

В m-мерном эвклидовом пространстве, точки которого характеризуются прямоугольными декартовыми координататами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, имеется конечная односвязная или многосвязная область D, ограниченная поверхностью S. Если к точкам D присоединить точки полного контура S, то получится замкнутая область $\overline{D}$.

Введем следуюшие обозначения: $t = x_{m+1}$ — время, изменяющееся от $-\infty$ до $+\infty$; $x_0 = t\sqrt{-1}$; n — внешняя нормаль к поверхности S (предполагается существующей в каждой точке S), $u = u(x_1, \ldots, x_m, t)$ — искомая функция, $\frac{\partial u}{\partial n} = u_n$ — производная от u по направлению нормали;

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} = u_{ik}, \ldots, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \Box = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

x — совокупность координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ или вектор, идущий из начала координат в точку $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_m$ — элемент объема области D.

За исключением случаев, которые будем специально оговаривать, нам придется рассматривать переходы от прямоугольной системы координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ к специальной, тоже прямоугольной, системе $'x_1, 'x_2, \ldots', x_m$, центр которой помещен в произвольную точку поверхности S, ось $'x_m$ направлена по внешней нормали n, а $'x_1, \ldots, 'x_{m-1}$ — в касательной плоскости. Заметим, что при таких преобразованиях $u_i, u_{jk}, u_{ike}, \ldots$ будут ковариантными тензорами соответствующих рангов.

Рассмотрим множество G функций, удовлетворяющих в $\overline{D}$ волновому уравнению и на поверхности S, сверх того, линейному однородному

пограничному условию $\sigma u = 0$. Для конкретности, в области D поставим следующие четыре предельных задачи.

Задача I.

$$\Box u = 0 \text{ внутри } D,$$
$$u\Big|_S = 0 \text{ на поверхности } S.$$

Задача II.

$$\Box u = 0,$$
$$u_n\Big|_S = 0.$$

Задача III.

$$\Box u = 0,$$
$$(u_n + hu)_S = 0,$$
$$h\Big|_S \geqslant 0.$$

Задача IV.

$$\Box u = 0,$$
$$(u_n + hu_{tt})_S = 0,$$
$$h \geqslant 0.$$

Символ $|_S$ или $(\ \ )_S$ означает, что соответствующее выражение вычисляется в точках контура S. h — здесь функция, заданная на S. (Начальные функции Коши, т. е. значения u и u_t в начальный момент не фиксируются.)

Под решением задачи понимается в дальнейшем комплексная функция u от вещественных аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$ (или от $x_0, x_1, \ldots, x_m$), имеющая в D непрерывные производные до второго порядка включительно, удовлетворяющая волновому уравнению и пограничному условию поставленной задачи. Пусть v — второе решение той же задачи; в частности, можно положить $v = \bar{u}$, где $\bar{u}$ — функция, комплексно-сопряженная с u.

Рассмотрим функционал $I(u, v)$, заданный на множестве T пар функций, определенных в D и удовлетворяющих в D некоторым условиям общего характера (например, достаточно гладких).

Назовем *интегралом задачи на T всякий функционал $I(u, v)$, сохраняющий постоянное значение во времени, на любой паре решений u, v, принадлежащей к T.*

Рассмотрим теперь следующую билинейную форму от производных искомых функций:

$$\omega_N(u, v) = \sum_{l,\nu=0}^{N} \sum_{\substack{\Sigma\alpha_i = l \\ \Sigma\beta_i = \nu}} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m} \partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}} A^{l\nu}_{\substack{\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1} \\ \beta_1 \cdots \beta_{m+1}}}(x) \frac{\partial^\nu v}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_{m+1}^{\beta_{m+1}}} \qquad (1.1)$$

с коэффициентами, зависящими *только* от пространственных координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$, имеющими в D непрерывные производные до порядка $N + 1$ включительно.

Пусть, далее, $\omega_{N-1}(u, v)$ — тоже билинейная форма вида (1.1), содержащая производные от u, v до порядка $N - 1$ включительно, с доста-

точно гладкими, определенными на S коэффициентами (подробнее об условиях на коэффициенты см. в § 4).

Выражение вида

$$I_N(u, v) = \int_D \omega_N(u, v)\, dx + \int_S \omega_{N-1}(u, v)\, dS \tag{1.2}$$

будем называть билинейным интегралом конечного порядка, если оно сохраняет постоянное значение во времени по крайней мере на любых парах решений u, v, имеющих непрерывные в D (при рассматриваемых значениях t) *все производные до порядка $2N+1$ включительно* (множество таких пар решений обозначим через T_N).

Выражения

$$\int_D \omega_N(u, v)\, dx \quad \text{и} \quad \int_S \omega_N(u, v)\, dS$$

будем называть соответственно объемной и поверхностной компонентой билинейного интеграла. Все билинейные интегралы разделим на два следующих класса.

Билинейный интеграл, равный нулю на любой паре решений u, v, принадлежащей к T_N, будем называть интегралом нулевого класса.

Билинейный интеграл, для которого существуют пары u, v, принадлежащие к T_N, такие, что $I(u, v) = C \neq 0$, будем называть *интегралом класса C*.

Нашей целью в этой статье является формулировка необходимых и достаточных условий для того, чтобы выражение (1.2) было интегралом задачи в вышеуказанном смысле.

§ 2. Контурные тождества

Контур S в этом параграфе будем считать достаточно гладким.

Кроме произвольной системы координат $x_1, \ldots, x_m$, введем в дальнейшем в рассмотрение специальную систему координат $'x_1, 'x_2, \ldots, 'x_m$, также прямоугольную, центр которой помещен в произвольную точку O' поверхности S, ось $'x_m$ направлена по внешней нормали к S, а оси $'x_1, \ldots, 'x_{m-1}$ — в касательной плоскости по направлению линий главных кривизн, проходящих через точку касания O'. Штрихи над специальными координатами иногда придется опускать, однако при рассмотрении поверхностной компоненты интеграла, а также при записи контурных дифференциальных тождеств мы будем обычно пользоваться специальными координатами.

На поверхность S налагаются следующие ограничения:

1) В каждой точке O' поверхности S существует касательная плоскость Q.

2) Малая окрестность σ точки O' на поверхности S однозначно проектируется на касательную плоскость Q.

Точнее говоря, существует конечный круг σ' в касательной плоскости

$$\sum_{i=1}^{m-1} {}'x_i^2 \leqslant \rho',$$

на котором поверхность S локально может быть задана явным уравнением

$${}'x_m = {}'x_m[{}'x_1, {}'x_2, \ldots, {}'x_{m-1}]$$

(когда проекция ${}'x_1 \ldots {}'x_{m-1}$ обегает круг σ', проектируемая точка ${}'x_1, {}'x_2 \ldots {}'x_{m-1}\, {}'x_m$ обегает конечную окрестность точки касания O' которую и обозначим дальше через σ).

3) Функция ${}'x_m = {}'x_m[{}'x_1, \ldots, {}'x_{m-1}]$ имеет непрерывные производные до порядка $2N+1$. Введем обозначения:

$$P_j = \frac{\partial' x_m[{}'x_1 \ldots {}'x_{m-1}]}{\partial' x_j}, \qquad P_{ij} = \frac{\partial^2{}' x_m[{}'x_1 \ldots {}'x_{m-1}]}{\partial' x_i\, \partial' x_j}. \tag{2.1}$$

Все производные (2.1), которые встречаются в рассуждении, связанном с установлением факта, что выражение (1.3) является интегралом, будем предполагать непрерывными в замкнутом круге σ'.

В выполнении пунктов 1), 2), 3) и заключается требование достаточной гладкости S (отметим, что в начале координат специальной системы, в силу выбора последней, имеют место равенства $P_j = 0$, $P_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и т. д.).

Для каждой точки O' существует свое число ρ', обладающее перечисленными свойствами, но так как поверхность S есть замкнутое множество, то, по лемме Гейне-Бореля, заключаем, что можно найти одно число $\rho' > 0$, годное для всех точек S одновременно (именно такое число и обозначаем дальше через ρ'). Можно также указать конечное число точек O' таких, что однозначно проектируемые куски σ, перекрывая друг друга, закроют всю поверхность S.

Частные производные вида

$$U_{j_1^{\nu_1} \ldots j_{m+1}^{\nu_{m+1}}} = \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_{m+1}} U}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_{m+1}^{\nu_{m+1}}},$$

когда все аргументы функции u являются независимыми, мы будем называть *объемными производными*. Когда же u рассматривается как сложная функция, где ${}'x_m = {}'x_m[{}'x_1, \ldots, {}'x_{m-1}]$, то полные производные от u по ${}'x_0, {}'x_1, \ldots, {}'x_{m-1}$ обозначаем символами

$$\frac{d^{\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{m-1}} U}{\partial' x_0^{\nu_0} \ldots \partial' x_{m-1}^{\nu_{m-1}}}$$

и называем *полными частными производными*. Объемные производные, содержащие по крайней мере одно дифференцирование по ${}'x_m$ (по нормали), будем называть главными производными, а все производные, не содержащие дифференцирования по ${}'x_m$, назовем параметрическими.

Из пограничного условия, записанного предварительно в виде тождества относительно переменных $'x_1, 'x_2, \ldots, 'x_{m-1}, t$, а также из волнового уравнения, записанного в специальных координатах, можно извлечь, путем дифференцирований и подстановок (образований скобок Пуассона), множество дифференциальных следствий, справедливых на поверхности S. Всю совокупность таких тождеств обозначим через $Su = 0$, $Sv = 0$. Если же из них выделить только те, которые содержат производные порядка не выше N-го, то такую совокупность тождеств обозначаем через $S_N u = 0$, $S_N v = 0$. Например, в случае задачи I предельное условие на S можно переписать в виде тождества

$$u('x_1, \ldots, 'x_{m-1}, 'x_m['x_1, \ldots, 'x_{m-1}], t) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество два раза по $'x_j$, получим два следующих новых тождества:

$$\begin{gathered} \frac{du}{\partial' x_j} = u_j + P_j u_m \equiv 0, \\ u_{jj} + 2\, P_j u_{mj} + u_{mm} P_j^2 + u_m\, P_{jj} \equiv 0. \end{gathered} \qquad (*)$$

Если в тождествах $S_N u = 0$ перейти в начало координат специальной системы, то мы получим совокупность тождеств, которую обозначим через $\overset{\circ}{S}_N u = 0$ (в начале координат тождества $(*)$, например, принимают вид $u_j = 0$, $u_{jj} + u_n P_{jj} = 0$).

При рассмотрении определенной задачи будем писать вместо $S_N u = 0$ и $\overset{\circ}{S}_N u = 0$ символы

$${}^{\mathrm{I}}S_N u = 0, \quad {}^{\mathrm{II}}S_N u = 0, \ldots \text{ и } {}^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{S}_N u = 0, \ldots,$$

указывая верхним римским значком номер рассматриваемой задачи (см. § 1).

Всю совокупность тождеств $S_N u = 0$ можно было бы получить следующим образом. В пространстве $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}$ возьмем поверхность S в фиксированный момент t и через каждую ее точку проведем прямую, параллельную оси времени x_{m+1}; тогда получим цилиндрическую поверхность F. Поверхность F не будет характеристической. Действительно, для волнового уравнения характеристической поверхностью является конус с образующей, наклоненной к оси времени x_{m+1} под определенным углом. Следовательно, для поверхности F имеет смысл постановка классической задачи Коши: *

$$\left.\begin{aligned} \Box u &= 0, && (2_2) \\ u|_F &= \varphi_0, && (2_0) \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_F &= \varphi_1. && (2_1) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

* Точнее говоря, функции φ_0 и φ_1 в дальнейшем будут так фиксированы, что задача (2.2) приобретет смысл.

Для нас важно в каждой задаче среди всего множества производных от искомых функций найти *базис на поверхности* S, состоящий из всех тех функций, которые при наличии тождеств $S_N u = 0$, $S_N v = 0$ можно считать в фиксированный момент произвольными независимыми друг от друга функциями точки поверхности S (поверхностный базис задачи).

В задаче (2.2) функции φ_0 и φ_1 произвольны, однако если принять во внимание, например, пограничное условие задачи I, то $u|_F = \varphi_0 \equiv 0$ и, следовательно, в данном случае остается произвольной на поверхности цилиндра F только одна функция $\varphi_1 = u_n$.

Если же цилиндр F пересечен плоскостью $t = \text{const}$, то в полученном сечении S произвольной будет не только функция $\varphi_1 = u_n$, но, очевидно, и все ее производные по направлению образующей цилиндра, параллельной оси времени t:

$$u^0 = u_n, \ u^1 = u_{nt}, \ \ldots, u^j = \frac{\partial^{1+j} u}{\partial n \partial t^j}, \ \ldots,$$

$\left(\text{соответственно на } \sigma' \text{ базисом будут функции } u^j = \dfrac{\partial^{1+j} u}{\partial' x_m \partial t^j}\right)$.

В задачах II, III, IV функция $\varphi_1 = u_n$ равна нулю или выражается через $u|_F$ (см. § 1), следовательно, базис на S в фиксированный момент образуют функции

$$u^0 = u, \ u^1 = u_t, \ \ldots, u^j = \frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \ \ldots$$

(независимость друг от друга перечисленных функций на S в фиксированный момент следует из произвольности u, u_t в плоскости $t = \text{const}$, в которой лежит и граница S).

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Базисом на поверхности S в фиксированный момент в задачах* II, III, IV *будут функции*:

$$u^0 = u, \ u^1 = u_t, \ \ldots, u^N = \frac{\partial^N u}{\partial t^N}, \ \ldots; \qquad v^0 = v, \ \ldots, v^N = \frac{\partial^N v}{\partial t^N}, \ \ldots$$

а в задаче I—*функции*

$$u^0 = u_n, u^1 = u_{nt}, \ldots, u^N = \frac{\partial^{1+N} u}{\partial n \partial t^N}, \ \ldots; \qquad v^j = \frac{\partial^{1+j} v}{\partial n \partial t^j}, \ \ldots$$

(в задаче I базисом на σ' можно считать также функции:

$$u^j = \frac{\partial^{1+j} u}{\partial' x_m \partial t^j}, \quad v^j = \frac{\partial^{1+j} v}{\partial' x_m \partial t^j}; \quad j = 0, 1, 2 \ldots).$$

Если поставлена задача Коши (2.2), то существует определенный процесс, принадлежащий Софье Ковалевской ([2]), который позволяет, как известно, выразить единственным образом локально на σ все объемные производные искомой функции через полные производные от заданных функций

$\varphi_0 ('x_1, \ldots, 'x_{m-1}, 'x_m ['x_1, \ldots, 'x_{m-1}], t)$, $\varphi_1 ('x_1, X_2, \ldots, 'x_{m-1}, 'x_m ['x_1, \ldots], t)$.

Именно, каждая производная выразится в виде линейного оператора:

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_{m+1}} u}{\partial x_1^{\nu_1}\cdots\partial x_{m+1}^{\nu_{m+1}}} = Z_{\nu_1\cdots\nu_{m+1}}(\varphi_0, \varphi_1). \tag{2.3}$$

Упомянутый процесс состоит в последовательных всевозможных дифференцированиях тождеств (2_0), (2_1), (2_2) соответственно до порядков N, $N-1$, $N-2$ включительно и подстановках одних результатов дифференцирований в другие (в решении систем уравнений).

В случае задач I, II, III, IV в правой части (2.3) пару функций (φ_0, φ_1) можно заменить соответственно задаче на следующие пары: $(0, u_n)$, $(u, 0)$, $(u, -hu)$, $(u, -hu_{tt})$. Таким образом, конечное число действий дает возможность выписать все тождества между производными, обозначенные раньше через $S_N u = 0$. Перечисленные факты можно выразить следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. *Число $\rho' > 0$ можно взять настолько малым, что на σ все объемные производные от u, v до порядка N включительно выразятся явно единственным образом в виде линейных выражений через полные производные от функций поверхностного базиса рассматриваемой задачи.*

Контурные тождества ${}^{\mathrm{I}}S_N u = 0$, ${}^{\mathrm{II}}S_N u = 0$, ${}^{\mathrm{III}}S_N u = 0$, ${}^{\mathrm{IV}}S_N u = 0$ будут подробно выписаны в следующей статье, посвященной интегралам класса C (тогда утверждения теорем 1 и 2 будут непосредственно проверены вычислениями), здесь же конкретный вид перечисленных тождеств нам не нужен.

§ 3. Объемная компонента интеграла нулевого класса

Пусть в плоской области B, точки которой характеризуются прямоугольными декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и которая ограничена достаточно гладким контуром S (область эвклидова пространства E^k, $k \leqslant m$), дано выражение:

$$Z = \int\limits_B \sum_{i,j=0}^{K} \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_k\leqslant N\\ \beta_1+\cdots+\beta_k\leqslant N}} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} u^i}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_k^{\alpha_k}} A^{ij}_{\substack{\alpha_1\cdots\alpha_k\\ \beta_1\cdots\beta_k}}(x_1,\ldots,x_k) \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_k} v^j}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_k^{\beta_k}} dx_1\ldots dx_k + \int\limits_S \omega^* ds, \tag{3.1}$$

где объемные коэффициенты $A^{ij}_{\substack{\alpha_1\cdots\alpha_k\\ \beta_1\cdots\beta_k}}(x_1, \ldots, x_k)$ имеют непрерывные в $\bar{B}$ производные до некоторого достаточно высокого порядка, ω^* — билинейная форма от производных функций $u^0, \ldots, u^K; v^0, \ldots, v^K$ с достаточно гладкими коэффициентами, определенными на S *, и функции $u^i = u^i(x_1, \ldots, x_m, t)$, а также $v^j = v^j(x_1, \ldots, x_m, t)$ определены на неко-

* Коэффициенты объемной и поверхностной билинейных форм не меняются для данного Z.

торой области V, по отношению к которой B является лишь подпространством, и принадлежат на V к некоторому множеству G^N (например, множество достаточно гладких решений линейной краевой задачи, поставленной в D, для той или иной гиперболической системы уравнений).*

Функции $u^0, u^1, \ldots u^K$, принадлежащие G^N, могут оказаться зависимыми на подмножестве B. Мы предполагаем, что среди последних можно выбрать базис $u^0, \ldots, u^\mu$, состоящий из произвольных независимых друг от друга на B в фиксированный момент функций, причем всякая u^i $(i = 0, 1, 2, \ldots, K)$ выражается через функции базиса линейным оператором вида

$$u^i = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k \leqslant N_0} \sum_{l=1}^{\mu} b^{il}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(x) \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} u^l}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_k^{\alpha_k}} \tag{3.2}$$

(аналогично v^j выражаются линейным оператором через функции «объемного» базиса $v^0, v^1, \ldots, v^\mu$).

Выразим Z через функции базисов $u^0, u^1, \ldots, u^\mu$; $v^0, v^1, \ldots, v^\mu$, подставляя (3.2) в (3.1), и затем интегрированием по частям по области B очистим один из базисов от знаков дифференцирований по $x_1, \ldots, x_k$; тогда выражение (3.1) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} Z &= \sum_{i,\,j=0}^{\mu} \int_B \left[\sum_{j_1+\cdots+j_k=0}^{2(N+N_0)} R^{ij}_{j_1\cdots j_k}(x_1,\ldots,x_k) \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_k} u^i}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_k^{j_k}} \right] v^j_{dx_1\cdots dx_k} + \int_S \omega' ds, && (3.3') \\ Z &= \sum_{i,\,j=0}^{\mu} \int_B \left[\sum_{j_1+\cdots+j_k \leqslant 2(N+N_0)} r^{ij}_{j_1\cdots j_k}(x_1,\ldots,x_k) \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_k} v^j}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_k^{j_k}} \right] u^i_{dx_1\cdots dx_k} + \\ &\qquad + \int_S \omega'' ds. && (3.3'') \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Заметим, что при интегрированиях по частям будут выделяться новые члены под знак контурного интеграла, так что ω^* перейдет в ω' или, соответственно, в ω''. Приведение выражения (3.1) к виду (3.3′) или (3.3″) (где $u^0, u^1, \ldots, u^\mu$ и $v^0, v^1, \ldots, v^\mu$ — функции базисов на B в фиксированный момент) будем называть приведением Z к каноническому виду; естественно, интеграл, распространенный на область B в (3.3′), назовем канонической объемной компонентой, а $\int_S \omega' dS$ — канонической поверхностной компонентой (аналогично в (3.3″)).

Коэффициенты $A^{ij}_{\substack{\alpha_1\cdots\alpha_k\\ \beta_1\cdots\beta_k}}(x_1, \ldots, x_k)$, $b^{il}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(x)$ и функции базиса будем предполагать имеющими такое число непрерывных в B производных, что приведение к каноническому виду (3.3) возможно и не выводит за класс непрерывных в B функций; в частности, все $R^{ij}_{j_1 j_2\cdots j_k}(x_1,\ldots,x_k)$, $r^{ij}_{j_1\cdots j_k}(x_1, \ldots, x_k)$ будут непрерывными в $\overline{B}$, и ω' также считаем непре-

* G^N на B характеризуется множеством функций, допустимых в качестве функций базиса.

рывной на S (достаточно потребовать от коэффициентов существования непрерывных производных в $\bar{B}$ до порядка $N+N_0$ и для функций базиса $u^0, u^1, \ldots, u^\mu$; $v^0, v^1, \ldots, v^\mu$ — до порядка $2(N+N_0)$, но для конкретных гиперболических систем, встречающихся часто в математической физике, дело обстоит, собственно, проще).

Докажем теперь следующую теорему, которая используется в дальнейшем:

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы выражение* (3.3) *с непрерывными объемными коэффициентами* $R^{ij}_{j_1\ldots j_k}(x_1, \ldots, x_k)$, $r^{ij}_{j_1\ldots j_k}(x_1, \ldots, x_k)$ *обращалось в ноль на любых функциях базисов* $u^0, u^1, \ldots, u^\mu$; $v^0, v^1, \ldots, v^\mu$, *имеющих непрерывные в* $\bar{B}$ *производные до порядка* $2(N+N_0)$, *необходимо и достаточно обращение в ноль тождественно всех объемных коэффициентов* $R^{ij}_{j_1\ldots j_k}$, $r^{ij}_{j_1\ldots j_k}$ *(при каждой производной от функций базиса) и, кроме того, канонической поверхностной компоненты.*

Достаточность очевидна (если каноническая поверхностная компонента равна нулю и все коэффициенты $R^{ij}_{j_1\ldots j_k}(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0$, то $Z=0$).

Докажем необходимость. Пусть $Z=0$ и не все коэффициенты $R^{ij}_{j_1\ldots j_k}(x_1, \ldots, x_k)$ равны нулю тождественно. Возьмем среди не равных нулю коэффициент $R^{i_0 j_0}_{j^0_1\ldots j^0_k}(x_1, \ldots, x_k)$ с минимальной суммой значков $j^0_1+\cdots+j^0_k=N^0$, и пусть в какой-то внутренней точке $x^0(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_k)$ и, в силу непрерывности, в малой ее окрестности

$$\rho=\sqrt{\sum_{l=1}^{k}(x_l-x^0_l)^2}\leqslant 2\delta,$$

целиком погруженной в B, соблюдается неравенство

$$R^{i_0 j_0}_{j^0_1\ldots j^0_k}(x_1, \ldots, x_k)>0.$$

Выберем следующим образом функции базисов:

$$\left.\begin{aligned} &u^i\equiv 0 \quad \text{при } i\neq i_0; \quad v^j\equiv 0 \quad \text{при } j\neq j_0;\\ &v^{j_0}=\begin{cases}0 & \text{при } \rho\geqslant\delta,\\ l^{\frac{\rho^2}{\rho^2-\delta^2}} & \text{при } \rho<\delta,\end{cases}\\ &u^{i_0}=\frac{x_1^{j^0_1}x_2^{j^0_2}\ldots x_k^{j^0_k}}{(j^0_1!)(j^0_2!)\ldots(j^0_k!)}\,\omega(\rho),\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

где

$$\omega(\rho)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \rho\leqslant\delta,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{th}\,\dfrac{\dfrac{\rho}{2\delta}-\dfrac{3}{4}}{\left(\dfrac{\rho}{2\delta}-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{\rho}{2\delta}\right)} & \text{при} \quad \delta<\rho\leqslant 2\delta,\\ 0 & \text{при} \quad \rho>2\delta.\end{cases}$$

Заметим, что функция $\omega(\rho)$ имеет непрерывные производные всех порядков при любых ρ.

При таком выборе функций базиса поверхностная компонента в выражении (3.3) пропадает, а подинтегральное выражение в объемной компоненте (3.3) сводится к одному положительному члену, и можно написать неравенство:

$$Z = \int\limits_{\rho<\delta} R^{i_0 j_0}_{j_1^0 j_2^0 \ldots j_k^0}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, v^{j_0}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k > 0.$$

Но последнее неравенство противоречит предположению, что $Z=0$ (на любых функциях базиса, имеющих непрерывные производные до порядка $2(N+N_0)$), следовательно, все $R^{ij}_{j_1 \ldots j_k}(x) \equiv 0$, а также $r^{ij}_{j_1 \ldots j_k}(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Билинейную форму от производных, стоящую под знаком объемного интеграла в (3.1), будем в этом случае (когда после приведения к каноническому виду все канонические объемные коэффициенты $R^{ij}_{j_1 \ldots j_k}(x_1, \ldots, x_k)$ и $r^{ij}_{j_1 \ldots j_k}(x_1, \ldots, x_k)$ равны нулю тождественно) называть *принадлежащей к идеалу на базисе* $u^0, u^1 \ldots u^\mu;\ v^0, \ldots, v^\mu$ и обозначать символом

$$o\,[u^0, \ldots, u^\mu;\ v^0, \ldots, v^\mu].$$

Рассмотрим теперь билинейный интеграл волнового уравнения порядка N вида (1.2), принадлежащий к нулевому классу:

$$Z_N(u, v) = \int\limits_D \omega_N(u, v)\, dx + \int\limits_S \omega_{N-1}(u, v)\, dS. \tag{3.5}$$

Введем обозначения

$$u = u^0, \quad \frac{\partial^i u}{\partial t^i} = u^i, \quad \frac{\partial^i v}{\partial t^i} = v^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, N)$$

(u, v — решения волнового уравнения).

Если волновое уравнение продифференцировать всевозможным образом по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ до порядка $N-2$ включительно, то получим совокупность тождеств $\Box_N u = 0$, справедливых в D, в частности, в фиксированный момент. Пользуясь волновым уравнением и его дифференциальными следствиями $\Box_N u = 0$, можно написать следующие зависимости среди функций u:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u^{2i} = \Delta^i u^0, \quad u^{2i+1} = \Delta^i u_t = \Delta^i u^1;$$

аналогично,

$$v^{2i} = \Delta^i v, \quad v^{2i+1} = \Delta^i v_t.$$

Таким образом, все u^i, v^i можно выразить только через четыре функции $u, u_t;\ v, v_t$. Этот процесс изгнания из выражения (3.5) всех производных, содержащих дифференцирования по времени порядка выше первого, можно рассматривать как деление билинейных форм $\omega_N(u, v)$, $\omega_{N-1}(u, v)$ на элементы множеств $\Box_N u = 0$, $\Box_N v = 0$. Что касается функций u, u_t, то они в фиксированный момент (который можно принять за «начальный») задаются, как известно, по произволу независимо друг от друга. Таким образом, объемным базисом в D в данном случае будут

функции u, u_t и, соответственно, v, v_t. Приведя (3.5) к каноническому виду, получим

$$Z_N(u, v) =$$
$$= \sum_{i,\, j=0}^{1} \int_D \sum_{j_1+\cdots+j_m=0}^{2N} \left[R^{ij}_{j_1 \cdots j_m}(x) \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_m} u^i}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_m^{j_m}} \right] v^j\, dx + \int_S \omega'_{N-1}(u, v)\, dS. \quad (3.5^*)$$

Отсюда, применяя теорему 3, получим систему следующих равенств, которую будем называть внутренней или объемной таблицей:

$$\left.\begin{aligned} R^{ij}_{j_1 \cdots j_m}(x) &\equiv 0, \\ \text{или} \quad r^{ij}_{j_1 \cdots j_m}(x) &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

Совокупность тождеств (3.6), означающих, что остаток от упомянутого деления формы $\omega_N(u, v)$ на элементы $\Box_N = 0$, $\Box_N v = 0$ оказался равным нулю, нужно рассматривать как систему тензорных уравнений в частных производных относительно искомых коэффициентов объемной формы $\omega_N(u, v)$. Если коэффициенты формы $\omega_N(u, v)$ удовлетворяют системе (3.6), то $\omega_N(u, v)$ будем называть объемным идеалом волнового уравнения и писать, соответственно,

$$\omega_N(u, v) = o[u, u_t;\ v, v_t].$$

Результат сформулируем в виде теоремы, которая является следствием теоремы 3.

ТЕОРЕМА 3$^\square$. *Для того чтобы выражение* (3.5) *с коэффициентами формы* $\omega_N(u, v)$, *имеющими непрерывные в* $\overline{D}$ *производные до порядка* N *включительно, было интегралом нулевого класса на множестве пар решений волнового уравнения* u, v, *принадлежащих к* T_N, *необходимо и достаточно, чтобы объемная форма принадлежала к объемному идеалу волнового уравнения* $o[u, u_t;\ v, v_t]$ *и, кроме того, чтобы каноническая поверхностная компонента обращалась в ноль на* T_N.

§ 4. Каноническая поверхностная компонента интеграла нулевого класса и общие замечания

Займемся теперь канонической поверхностной компонентой интеграла нулевого класса $Z_S = \int_S \omega'\, ds$, которая, по теореме 3 или 3$^\square$, должна обращаться в ноль. Возьмем функции объемных базисов отличными от нуля в столь малой окрестности точки O' области $\overline{D}$, что все функции поверхностного базиса будут отличны от нуля только в некоторой области, погруженной целиком внутрь σ. Напомним, что σ получается из круга σ' в касательной плоскости $\sum_{k=1}^{m-1} {'x_k^2} \leqslant \rho'$ локальным уравнением поверхности $'x_m = {'x_m}['x_1, \ldots, 'x_{m-1}]$, где число ρ' одно и то же для всех точек O' поверхности S и, как отмечено в § 1, выбрано таким, что:

1) функция $'x_m = {'x_m}['x_1, \ldots, 'x_{m-1}]$ имеет непрерывные в замкнутом круге σ' производные до порядка $2(N + N_0)$ включительно;

2) возможно явное на σ выражение всех объемных производных от искомых функций через полные производные от функций поверхностного базиса.

Интеграл $Z_S = \int\limits_S \omega' ds$ в данном случае превратится в интеграл по σ, и его можно преобразовать в интеграл по касательному кругу σ'. Если все объемные производные выразить через полные от функций поверхностных базисов, положить $ds = \sqrt{1 + \sum\limits_1^{m-1} P_j^2}\, d\sigma'$ и затем привести полученный интеграл по σ' к каноническому виду, то в результате перечисленных преобразований мы получим следующее выражение для Z_S:

$$Z_S = \int\limits_S \omega' ds = \int\limits_\sigma \omega' \, d\sigma =$$

$$= \sum_{i,\, j=0}^{\mu_0} \int\limits_{\sigma'} \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{m-1}<N+N_0 \\ \beta_1+\cdots+\beta_{m-1}<N+N_0}} \frac{d^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{m-1}} u^i}{\partial' x_1^{\alpha_1}\cdots\partial' x_{m-1}^{\alpha_{m-1}}} a^{ij}_{\substack{\alpha_1\cdots\alpha_{m-1} \\ \beta_1\cdots\beta_{m-1}}} ('x_1,\ldots,'x_{m-1}) \cdot$$

$$\cdot \frac{d^{\beta_1+\cdots+\beta_{m-1}} v^j}{\partial' x_1^{\beta_1}\cdots\partial' x_{m-1}^{\beta_{m-1}}} d\sigma' = \sum_{i,\, j=0}^{\mu_0} \int\limits_{\sigma'} \Bigg[\sum_{j_1+\cdots+j_{m-1}<2(N+N_0)-1} \cdot \overset{*}{R}{}^{ij}_{j_1\cdots j_{m-1}} ('x_1,\ldots,'x_{m-1}) \cdot$$

$$\cdot \frac{d^{j_1+\cdots+j_{m-1}} u^i}{\partial' x_1^{j_1}\cdots\partial' x_{m-1}^{j_{m-1}}} \Bigg] v^j\, d'x_1 \cdots d'x_{m-1} =$$

$$= \sum_{i,\, j=0}^{\mu_0} \int\limits_{\sigma'} u^i \Bigg[\sum_{j_1+\cdots+j_{m-1}<2(N+N_0)-1} \overset{*}{r}{}^{ij}_{j_1\cdots j_{m-1}} ('x_1\cdots 'x_{m-1}) \cdot$$

$$\cdot \frac{d^{j_1+\cdots+j_{m-1}} v^j}{\partial' x_1^{j_1}\cdots\partial' x_{m-1}^{j_{m-1}}} \Bigg] d'x_1 \cdots d'x_{m-1}. \qquad (4.1)$$

(контурный интеграл здесь пропадает, так как на контуре σ' все производные от функций поверхностного базиса $u^0, u^1 \ldots, u^{\mu_0}$; $v^0, v^1 \ldots, v^{\mu_0}$ равны нулю).

Отсюда, по теореме 3 (область B в данном случае заменяется через σ'), заключаем, что все определенные на σ канонические коэффициенты $\overset{*}{R}{}^{ij}_{j_1\cdots j_{m-1}}$ и $\overset{*}{r}{}^{ij}_{j_1\cdots j_{m-1}}$ должны обращаться в нуль:

$$\begin{aligned} &\overset{*}{R}{}^{ij}_{j_1\cdots j_{m-1}} ('x_1, \ldots, 'x_{m-1}) \equiv 0; \\ &\overset{*}{r}{}^{ij}_{j_1\cdots j_{m-1}} ('x_1, \ldots, 'x_{m-1}) \equiv 0. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Если условие (4.2) выполнено в конечной окрестности начала координат любой специальной системы, т. е. для всех положений O' на S, то каноническую поверхностную билинейную форму ω' будем называть *принадлежащей к идеалу на поверхностном базисе* и обозначать через $O[u^0, \ldots u^{\mu_0}; v^0, \ldots, v^{\mu_0}]_S$.

В этом и заключается необходимое условие для канонической поверхностной компоненты интеграла нулевого класса.

Докажем, что найденное необходимое условие будет и достаточным.

Рассмотрим функцию E, равную единице в области $\overline{D}$ и в некоторой более широкой области. Конечно, E с точностью до любого $\varepsilon > 0$ можно* заменить на функцию $\dot{E}$, состоящую из конечного числа слагаемых, каждое из которых имеет непрерывные в $\overline{D}$ производные до порядка $2(N+N_0)+2$ и отлично от нуля лишь в малой области, которая целиком помещается внутри m-мерного шара радиуса $\frac{\rho'}{3}$ ($E - \dot{E} = \omega$, где $|\omega| < \varepsilon$ и имеет все производные до порядка $2(N+N_0)$, также по абсолютной величине меньшими ε в $\overline{D}$).

Умножим теперь все функции поверхностного базиса под знаком интеграла $Z_s = \int\limits_s \omega' \, ds$ на единицу E. Так как все рассуждения проводятся нами в фиксированный момент t, то, отбрасывая величины порядка ε, мы можем множитель E заменить на $\dot{E}$ (соответственно Z_s заменится при этом на $\dot{Z}$); тогда все функции базиса u^i, v^j получат множитель $\dot{E}$ и разобьются на конечное число слагаемых u^i_l, v^i_l, каждое из которых отлично от нуля только на малом участке σ_l поверхности S и равно нулю в остальных точках S. (На элементе σ_l возьмем точку O'_l и спроектируем σ_l на касательную плоскость с точкой касания в O'_l, причем проекция σ_l, обозначаемая через σ'_l, тоже помещается внутри круга $\sum\limits_{i=1}^{m-1}{}' x_i^2 < \frac{2\rho'}{3}$.) Интеграл $\dot{Z}_s$ разобьется на конечное число слагаемых вида

$$\dot{Z}_s = \sum_{i,\, j=0}^{\mu_0} \sum_l \int\limits_{\sigma_l'} \omega_l \,(u^i_l,\ v^j_l)\, d\sigma'_l\,. \tag{4.3}$$

---

* Утверждение, конечно, не ново, однако его можно сделать очевидным, например, следующим образом. Рассмотрим в $(m+1)$-мерном пространстве со взаимно перпендикулярными осями $x_1, x_2, \ldots, x_m, E$ плоскость E, x_j. В вертикальную полосу $0 \leqslant E \leqslant 1$ названной плоскости впишем кривую $E = \varphi(x_j)$ типа синусоиды; положим при этом, что $\varphi(x_j)$ имеет непрерывные производные до порядка $2(N+N_0)+2$ включительно, которые в равноотстоящих точках касания M_i, N_i с прямыми $E=0$, $E=1$ все обращаются в нуль $\left(N_{i+1} - N_i = M_{i+1} - M_i = \frac{\rho'}{6m}\right)$. Далее, через кривую $E = \varphi(x_j)$ проводим цилиндрическую поверхность T_j с образующими, параллельными всем другим осям, кроме оси x_j. Разрезами вдоль поверхностей $T_1, T_2, \ldots, T_m$ пласт $0 \leqslant E \leqslant 1$ пространства $x_1, \ldots x_m, E$ разобьется на криволинейные пирамиды; соответственно можно написать равенство $E = \sum \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_m}(x_1, \ldots, x_m)$, причем каждое слагаемое суммы $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_m}(x_1, \ldots, x_m)$ отлично от нуля лишь в m-мерном кубе $N_{i_k} < x_k < N_{i_{k+1}}$, который можно поместить в шар радиуса $\frac{\rho'}{3}$. Слагаемые $\varphi_{i_1 \ldots i_m}$ не имеют непрерывных производных на ребрах пирамиды, т. е. на пересечениях двух упомянутых цилиндрических поверхностей. Поэтому заменим $\varphi_{i_1 \ldots i_m}(x_1, \ldots, x_m)$ приближенно функцией $\psi_{i_1 \ldots i_m}(x_1, \ldots, x_m)$, которая уже имеет непрерывными все производные до порядка $2(N+N_0)+2$, и напишем равенство:

$$E = \sum_D \psi_{i_1 \ldots i_m}(x_1, \ldots, x_m) + \omega = \dot{E} + \omega; \qquad \psi_{i_1 \ldots i_m}(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0$$

вне куба $N_{i_k} < x_k < N_{i_{k+1}}$ (под знаком суммы $\sum\limits_D$ удерживаем только те слагаемые, которые отличны от нуля хоть в одной точке области $\overline{D}$).

Но так как необходимое условие (4.2) выполнено, то каждый из интегралов в правой части (4.3) равен нулю (после приведения к каноническому виду), а тогда и $\dot{Z}$ равен нулю. Следовательно,

$$Z_\varepsilon = Z_\varepsilon - \dot{Z}_\varepsilon = \sum_{i,\, j=0}^{\mu_0} \sum_{l} \int_{\sigma_l} [\omega'(u_l^i,\ \omega v^j) + \omega'(\omega u^i,\ v_l^j)]\, ds +$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{\mu_0} \int_{S} \omega'(\omega u^i,\ \omega v^j)\, ds$$

есть величина порядка ε^2 (интегралы по σ_l обращаются в нуль, в силу (4.2)). Устремляя ε к нулю, находим, что $Z_\varepsilon = 0$, что и требовалось.

Можно было бы не вводить $\dot{E}$, а разрезать S на малые части и доказать, что интегралы по противоположным сторонам разреза сокращаются, в силу достаточной гладкости S (направление внешней нормали противоположно при рассмотрении двух соприкасающихся частей, на которые разбили S). Но такой путь привел бы к сложным вычислениям, в которых нет необходимости.

Резюмируя предыдущее, можно сформулировать следующую теорему общего характера.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы выражение*

$$Z = \int_D \omega_N\, dx + \int_S \omega_{N-1}\, ds,$$

где ω_N, ω_{N-1} — *объемная и поверхностная билинейные формы от производных искомых функций данной линейной гиперболической задачи с достаточно гладкими коэффициентами и* S — *достаточно гладкий контур, было интегралом нулевого класса, необходимо и достаточно, чтобы билинейная форма* ω_N *принадлежала к идеалу на объемном базисе и каноническая поверхностная форма* (определенная на S), *сверх того, принадлежала к идеалу на поверхностном базисе рассматриваемой задачи* (обращалась в нуль, в силу контурных тождеств задачи).

Если иметь в виду предельные задачи I, II, III, IV волнового уравнения (см. § 1), то предыдущей теореме можно придать более определенную формулировку:

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы выражение* (1.2) *было интегралом нулевого класса рассматриваемой задачи* (в смысле определения, данного в § 1, т. е. обращалось в нуль на T_N), *необходимо и достаточно, чтобы объемная билинейная форма* $\omega_N(u, v)$ *была включена в объемный идеал волнового уравнения* $O[u, u_t;\ v, v_t]\, u$, *сверх того, каноническая поверхностная билинейная форма* $\omega'_{N-1}(u,\ v)$ *была включена в поверхностный идеал задачи* (от S или от функции $'x_m[\,'x_1, \ldots, 'x_{m-1}]$ здесь требуется существование непрерывных производных до порядка $2(N-1)$ и от коэффициентов канонической поверхностной формы — до порядка $N-1$ на σ', а от коэффициентов объемной формы $\omega_N(u,\ v)$ — непрерывных в $\bar{D}$ производных до порядка N).

Если иметь в виду другие линейные краевые задачи, не связанные с волновым уравнением, а связанные с той или иной гиперболической системой уравнений, то объемный базис ясен из самой постановки задачи ибо, кроме системы уравнений, справедливых в D, и пограничных условий, должны ставиться определенные начальные условия в фиксированный момент времени t; вся совокупность функций $[u^0, u^1, \ldots, u^{\mu_0}; v^0, v^1, \ldots, v^{\mu_0}]$, которые задаются по произволу (независимо друг от друга), и будет объемным базисом в данной задаче. Поверхностный базис зависит не только от рассматриваемой гиперболической системы уравнений, но и от пограничных условий задачи (выбор базиса может оказаться не единственным).

Возьмем, например, упругие колебания твердого тела, занимающего трехмерную область D, граница которого заделана и остается неподвижной (компоненты вектора смещения u^1, u^2, u^3 удовлетворяют известным уравнениям динамической теории упругости внутри D и на контуре S равны нулю). Из системы динамических уравнений нетрудно усмотреть, что объемным базисом в D будут в данном случае компоненты смещения и их первые производные по времени u^1, u^2, u^3; u^1_t, u^2_t, u^3_t (аналогично для второго решения той же задачи — v^1, v^2, v^3; v^1_t, v^2_t, v^3_t); что касается поверхностного базиса, то его образуют, очевидно, функции

$$u^i_k = \frac{\partial^{k+1} u^i}{\partial n\, \partial t^k}, \qquad v^i_k = \frac{\partial^{k+1} v^i}{\partial n\, \partial t^k},$$

где $i = 1, 2, 3$; $k = 0, 1, \ldots, N-1$ (см. § 2). Аналогично можно найти объемный и поверхностный базис в каждой линейной гиперболической задаче.

В заключение сделаем два следующих замечания.

Замечание 1. Об интегралах I^σ, I^φ. Обозначим через I^σ билинейный интеграл, обращающийся в постоянную на функциях, удовлетворяющих только пограничному условию задачи, и произвольных, достаточно гладких в D (не удовлетворяющих внутри D дифференциальным уравнениям). Обозначим, далее, через I^φ билинейный интеграл, обращающийся в постоянную на совершенно любых парах u, v, достаточно гладких в D (например различные тождества типа формул Грина).

Будем при рассмотрении I^σ для определенности говорить только о задачах I, II, III для волнового уравнения.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6. *При соблюдении пограничных условий:* $u|_S = 0$, *или* $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$, *или* $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)_S = 0$ *интеграл* $I^\sigma = I^\sigma(u, v)$ *может быть только нулем. Отсюда следует, что все интегралы* $I^\varphi = I^\varphi(u, v$ *могут принадлежать только нулевому классу* (в частности, на решениях задач I, II, III).

Пусть $T = T(t)$ — функция, имеющая достаточное число непрерывных производных.

Возьмем интеграл $I^\sigma(u, v) = C$ и рассмотрим его на паре $u^* = uT(t)$, $v^* = vT(t)$, которая одновременно с u, v удовлетворяет перечисленным

пограничным условиям. Дифференцируя по Лейбницу и вычисляя $I^\sigma(u^*, v^*)$, можно написать

$$I^\sigma(u^*, v^*) = I^\sigma(u, v)\, T^2(t) + \sum_{i+j\geq 1} A_{ij}(t) \frac{d^i T}{dt^i} \cdot \frac{d^j T(t)}{dt^j}\ . \qquad (*)$$

Здесь $A_{ij}(t)$ — непрерывные функции от t. Приравняем правую часть (*) произвольной функции $f(t)$ и будем искать $T(t)$ как решение полученного при этом дифференциального уравнения. Если не все коэффициенты упомянутого дифференциального уравнения равны нулю, то мы приходим к равенству $I^\sigma(u^*, v^*) = f(t)$, что противоречит определению I^σ. Следовательно, все $A_{ij}(t)$ и, в частности, свободный член $I^\sigma(u, v) = C$ равны нулю.

Чем шире класс допустимых функций u, v, тем у́же класс интегралов. Так, например, I^σ обращается в постоянную на любых достаточно гладких парах u, v, следовательно, и подавно на функциях, удовлетворяющих пограничным условиям, а тогда множество интегралов I^φ есть лишь часть более широкого множества I^σ. Следовательно, $I^\varphi = I^\varphi(u, v)$ на решениях задач I, II, III может быть только нулем.

Вышеизложенная схема (включения в идеал) может быть применена и для разыскания, например, всех интегралов $I^\varphi(u, v)$ порядка N. Только в данном случае объемным базисом будут, очевидно, функции

$$u,\ u_t, \ldots, \frac{\partial^N u}{\partial t^N};\quad v,\ v_t, \ldots, \frac{\partial^N v}{\partial t^N}\ ,$$

а поверхностным базисом на σ' — функции:

$$u^{ij} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial' x_m^i\, \partial t^j}\,,\quad v^{ij} = \frac{\partial^{i+j} v}{\partial' x_m^i\, \partial t^j}\ .$$

В другом выборе базисов и заключается все отличие. Аналогично находятся все I^σ.

Замечание 2. Об интегралах класса C. Если продифференцировать по времени интеграл конечного порядка $I_N(u, v)$ класса C, то получим уже интеграл

$$\frac{dI_N(u, v)}{dt} = I_N(u_t, v) + I_N(u, v_t),$$

принадлежащий к нулевому классу, для которого необходимые и достаточные условия даются теоремой 4 (или теоремой 5). Таким образом, можно считать найденными необходимые и достаточные условия и для билинейных интегралов класса C.

Ленинградский государственный
ордена Ленина
университет им. А. А. Жданова

Поступило
27.XII.1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., О почти периодичности решений волнового уравнения, Доклады Ак. Наук СССР, т. 48, № 8 (1945), 570—573.

[2] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, М.—Л., 1945.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 91—94

В. Т. МИРОНОВ

К ВОПРОСУ О НУЛЯХ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье с помощью интерполяционных рядов Лагранжа выводится новое необходимое и достаточное условие для гипотезы Римана о нулях дзета-функции.

Известно, что функция $\frac{1}{\zeta(z)}$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) \geqslant 1+\varepsilon$, где ε — любое положительное число, удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{1}{\zeta(z)}\right| < c, \tag{1}$$

где c при фиксированном ε есть некоторое постоянное положительное число.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z^{-q}}{\zeta(z)}, \tag{2}$$

где q — любое положительное число. Функция (2) в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) \geqslant 1+\varepsilon$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| < c\,|z|^{-q}. \tag{3}$$

На основании теоремы, доказанной Р. Лагранжем в шестой главе работы ([1]), заключаем, что функция (2) в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 1+\varepsilon$ может быть представлена интерполяционным рядом:

$$f(z) = a_0 + a_1\frac{z-u}{z+u} + \cdots + a_n\frac{(z-u)\cdots(z-nu)}{(z+u)\cdots(z+nu)} + \cdots, \tag{4}$$

где $u, 2u, \ldots, nu, \ldots$ — интерполяционные точки, лежащие на вещественной оси в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 1+\varepsilon$.

Что касается коэффициентов ряда (4), то они выражаются формулой

$$a_n = (2n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+k-1)!\,f(ku)\,(-1)^{n-k+1}}{k\,[(k-1)!]^2\,(n-k+1)!}. \tag{5}$$

В той же работе, в главах первой и третьей, Лагранж показал, что всякий ряд вида (4) имеет точную полуплоскость сходимости $\operatorname{Re}(z) > \lambda$, причем если точки последовательности $\{-nu\}$ не лежат в этой полуплоскости, то сумма ряда (1) в ней будет аналитической функцией.

Что касается числа λ, то оно находится при помощи следующих формул:

a) если ряд $\sum\limits_0^\infty a_n(-1)^n$ расходится, то

$$\lambda = \frac{u}{2} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| \sum\limits_0^n a_m(-1)^m \right|}{\ln n}. \tag{6}$$

b) если ряд $\sum\limits_0^\infty a_n(-1)^n$ сходится, то

$$\lambda = \frac{u}{2} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| \sum\limits_n^\infty a_m(-1)^m \right|}{\ln n}. \tag{7}$$

Рассматриваемый нами интерполяционный ряд (4) сходится к функции (2) по крайней мере в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 1 + \varepsilon$. Возможно, что этот ряд сходится к функции (2) и в более широкой полуплоскости в зависимости от расположения полюсов функции (2) в критической полосе и характера роста этой функции, но во всяком случае, не более чем в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$, так как функция (2) на прямой $x = \frac{1}{2}$ имеет полюсы. С другой стороны, из формулы (6) видно, что положение точной границы полуплоскости сходимости ряда (4) зависит от u и q.

Таким образом, если мы обозначим через $\lambda(q)$ число, определяющее точную границу сходимости интерполяционного ряда (4), то справедливо следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \leqslant \lambda(q) \leqslant 1. \tag{8}$$

Далее, пользуясь формулами (5) и (6), выразим $\lambda(q)$ через значения функции (2) в интерполяционных точках.

Положим

$$I_n = \sum_0^n a_m(-1)^m.$$

Далее, можно написать:

$$I_n = \sum_{m=0}^{n} (2m+1) \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(m+k-1)!\, f(ku)(-1)^{k-1}}{k[(k-1)!]^2 (m-k+1)!}. \tag{9}$$

После вынесения за скобку множителей вида $f(ku)$, получим:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n+1} A_k f(ku)(-1)^{k-1}, \tag{10}$$

где коэффициент A_k имеет значение

$$A_k = \frac{(2k-2)!}{k\,[(k-1)!]^2}\left[(2k-1)\,C_{2k-2}^{2k-2} + (2k+1)\,C_{2k-1}^{2k-2} + \cdots + (2n+1)\,C_{n+k-1}^{2k-2}\right] \tag{11}$$

$$(k = 1, 2, \ \ldots, \ n+1).$$

Из формулы (11) следует

$$A_k = \frac{(2k-1)!}{k\,[(k-1)!]^2}\sum_{m=0}^{n-k+1}\left(C_{n+k-m-1}^{2k-2} + 2C_{n+k-m-1}^{2k-1}\right). \tag{12}$$

Пользуясь известным свойством сочетаний, найдем

$$A_k = \frac{(2k-1)!}{k\,[(k-1)!]^2}\left(C_{n+k}^{2k-1} + C_{n+k}^{2k}\right). \tag{13}$$

Это дает

$$A_k = \frac{(n+k)!\,(n+1)!}{(k!)^2\,(n-k+1)!}. \tag{14}$$

Следовательно, I_n можно будет выразить в виде:

$$I_n = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+k)!\,f(ku)\,(-1)^{k-1}}{(k!)^2\,(n-k+1)!}. \tag{15}$$

Подставляя это в формулу (6), получим

$$\lambda(q) = \frac{u}{2}\left(1 + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{(n+k)!\,f(ku)\,(-1)^{k-1}}{(k!)^2\,(n+k-1)!}\right|}{\ln n}\right). \tag{16}$$

Теперь естественно вопрос о точной границе полуплоскости сходимости интерполяционного ряда (4) увязать с гипотезой Римана о нулях.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы гипотеза Римана о нулях функции $\zeta(z)$ была верна, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{q\to\infty}\lambda(q) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. а) Допустим, что гипотеза Римана о нулях $\zeta(z)$ верна. Возьмем $\eta > \frac{1}{2}$ и $q_1 > \frac{1-\eta}{2\eta-1}$. В полуплоскости $\mathrm{Re}(z) \geqslant \eta$ будет удовлетворяться неравенство ([2])

$$|f(z)| < c_1\,|z|^{\frac{1-\eta}{2\eta-1}+\delta-q} = c_1\,|z|^{-q_1}, \tag{17}$$

где δ — как угодно малое положительно число, c_1 и q_1 — некоторые положительные числа.

В таком случае, на основании уже отмеченной в начале этой статьи теоремы Лагранжа, мы заключаем, что интерполяционный ряд (4) сходится к $f(z)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > \eta$. Это заключение приводит нас к неравенству: $\frac{1}{2} \leqslant \lambda(q) \leqslant \eta$. Так как число η мы можем взять как угодно близко к $\frac{1}{2}$, то, очевидно, $\lim\limits_{q\to\infty}\lambda(q) = \frac{1}{2}$.

b) Пусть $\lim\limits_{q\to\infty} \lambda(q) = \frac{1}{2}$. Возьмем $\eta > \frac{1}{2}$. Тогда найдется такое q, при котором будет выполняться неравенство $\lambda(q) \leqslant \eta$ и, следовательно, интерполяционный ряд (4) сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > \eta$, причем сумма его в этой полуплоскости является аналитической функцией. С другой стороны, нам известно, что в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > 1+\varepsilon$ этот ряд сходится к функции (2). На основании известного свойства аналитических функций мы заключаем, что сумма ряда (4) будет равна $f(z)$ и в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > \eta$. Следовательно, функция $\zeta(z)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > \eta$ нулей иметь не может. Так как число η мы можем взять как угодно близко к $\frac{1}{2}$, то, очевидно, гипотеза Римана о нулях функции $\zeta(z)$ верна. Теорема доказана.

Если не стремиться как можно дальше проникнуть в критическую полосу, то, положив в формуле (2) $q=0$, мы получим более простую функцию:

$$f(z) = \frac{1}{\zeta(z)}. \tag{2'}$$

Эту функцию, в силу неравенства (1), также можно разложить в интерполяционный ряд вида (4) в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > 1+\varepsilon$. Если же гипотеза Римана верна, то функцию (2′), согласно теореме Лагранжа об интерполировании аналитических функций, можно разложить и в более широкой полуплоскости, причем, как видно из этой теоремы, при возрастании u граница полуплоскости разложения будет перемещаться вправо.

Пользуясь уравнениями

$$\eta = \frac{u}{2}\,\frac{1-\eta}{2\eta-1}, \qquad \eta = \frac{u}{2}\left[\frac{2(1-\eta)}{2\eta-1} - 1\right], \tag{18}$$

которые легко выводятся из теоремы Лагранжа и неравенства (17) при $q=0$, можно подсчитать, что, например, $u=1$, $u=\frac{4}{3}$ и $u=4$ будут соответствовать следующие полуплоскости разложения:

$$\mathrm{Re}(z) > 0{,}65\ldots, \qquad \mathrm{Re}(z) > \frac{2}{3}, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0{,}78\ldots$$

Из вышеизложенного очевидно, что удовлетворительная оценка суммы (16) даже при $q=0$ и $u \in (1,2)$ может привести к весьма существенным результатам в проблеме Римана о нулях $\zeta(z)$.

Поступило
16. V. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lagrange R., Mémoire sur les séries d'interpolation, Acta Math., 64 (1935), 1—80.
[2] Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, § 240, Leipzig, 1909.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 95—103

Р. Ю. МАЦКИНА

О НЕПРЕРЫВНЫХ ОБРАЗАХ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА*

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе исследуются непрерывные отображения пространства Гильберта. Показано, что непрерывный образ гильбертова пространства может быть A-множеством, содержащим замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное произвольному A-множеству. Взаимно однозначный непрерывный образ пространства Гильберта может быть B-множеством сколь угодно высокого класса.

Мы исследуем вопрос о структуре непрерывных образов гильбертова пространства.

Как известно, непрерывная действительная функция, заданная на гильбертовом пространстве, отображает его только на отрезок прямой (открытый, замкнутый или полузамкнутый), прямую или полупрямую, так как это пространство связно. Вследствие этого, существовало предположение, что вообще непрерывными образами гильбертова пространства могут быть только множества достаточно простой природы, например, только B-множества или даже B-множества ограниченного класса.

Из доказанных ниже теорем следует, что непрерывными образами гильбертова пространства могут быть B-множества любого класса α (строго класса α), а также A-множества, не являющиеся B-множествами, и что непрерывными взаимно однозначными образами гильбертова пространства могут быть B-множества сколь угодно высокого класса. Интересно отметить, что первая часть этого утверждения (относительно непрерывных, но не взаимно однозначных отображений гильбертова пространства) справедлива уже для непрерывных отображений гильбертова пространства в эвклидову плоскость.

ТЕОРЕМА I. *Каково бы ни было B-множество E класса $\alpha \geqslant 2$, существует непрерывный образ гильбертова пространства, содержащий замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное множеству E, и являющийся B-множеством класса α.*

---

* Мы рассматриваем отображения гильбертова пространства в гильбертово же пространство или n-мерное эвклидово пространство, которое можно рассматривать как гиперплоскость гильбертова пространства. Все упоминаемые в статье A- и B-множества абсолютны и лежат в метрическом сепарабельном пространстве.

Обозначим через H гильбертово пространство, непрерывный образ которого мы будем строить. Гильбертово пространство, в котором мы будем строить непрерывный образ пространства H, будем для удобства считать отличным от H и обозначать через H^*.*

Построим, прежде всего, в пространстве H некоторым специальным образом замкнутое в H множество, гомеоморфное бэровскому пространству **.

Заметим, что любая сфера Δ в гильбертовом пространстве может быть отображена на любую другую сферу $\widetilde{\Delta}$ в гильбертовом пространстве путем параллельного переноса (преобразование вида $x'_n = x_n + a_n$) с последующим сжатием или растяжением (преобразование вида $x'_n = kx_n$, где k постоянно для всех n). При этом, очевидно, любая сфера δ, лежащая внутри Δ, перейдет в сферу $\widetilde{\delta}$ (радиус которой равен радиусу δ, умноженному на k), лежащую внутри $\widetilde{\Delta}$, и для образов любых сфер, лежащих внутри Δ, сохраняется их взаимное расположение (включение, пересечение и т. п.).

Обозначим теперь сферу (без границы) радиуса 2 с центром в начале координат через Δ_0 и лежащую внутри нее концентрическую ей сферу радиуса, большего чем $\frac{3}{2}$ $\left(\text{например, радиуса } \frac{7}{4}\right)$, через $\widetilde{\Delta}_0$.

Построим счетную последовательность сфер в пространстве H:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \ldots .$$

радиуса $\frac{1}{2}$ так, что центр каждой сферы Δ_{n_1} лежит соответственно в точке с координатами $x_n = 0$, $n \neq n_1$; $x_{n_1} = 1$. Очевидно, что эти сферы попарно не пересекаются, попарно не имеют общих граничных точек и все лежат внутри $\widetilde{\Delta}_0$, также не имея с ней общих граничных точек.

Сферы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n_1}, \ldots$ (без границ) назовем *окрестностями 1-го ранга*. Легко видеть, что сумма замыканий $\overline{\Delta}_{n_1}$ окрестностей Δ_{n_1} есть замкнутое множество.

Если теперь отобразить Δ_0 на каждую из окрестностей Δ_n путем соответственного параллельного переноса и сжатия $\left(k = \frac{1}{4}\right)$, то $\widetilde{\Delta}_0$ отобразится при этом на некоторую сферу $\widetilde{\Delta}_{n_1}$, лежащую строго внутри Δ_{n_1} и концентрическую с ней, а последовательность окрестностей $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n_1}, \ldots$ отобразится на последовательность сфер $\Delta_{n_1 1}, \Delta_{n_1 2}, \ldots, \Delta_{n_1 n_2}, \ldots$, радиуса $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$, лежащих строго внутри окрестности $\widetilde{\Delta}_{n_1}$, попарно не пересекающихся, не имеющих попарно общих граничных точек и таких, что сумма их замыканий $\sum\limits_{n_2} \overline{\Delta}_{n_1 n_2}$ есть замкнутое множество.

Сферы $\Delta_{n_1 n_2}$ $(n_1 = 1, 2, \ldots; n_2 = 1, 2, \ldots)$ назовем *окрестностями 2-го ранга*.

---

* Эти же обозначения мы сохраним и во всем дальнейшем изложении.

** То, что гильбертово пространство содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное бэровскому пространству, факт известный [см. ([4])]. Здесь мы непосредственно строим такое подмножество некоторым специальным образом.

Если построены окрестности k-го ранга $\Delta_{n_1\ldots n_k}$ радиуса $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{k-1}}$, то чтобы построить окрестности $(k+1)$-го ранга, отобразим окрестность Δ_0 путем соответственного параллельного переноса и сжатия $\left(k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{k-1}}\right)$ на каждую из окрестностей $\Delta_{n_1\ldots n_k}$. При этом окрестность $\widetilde{\Delta}_0$ перейдет в сферу $\widetilde{\Delta}_{n_1\ldots n_k}$, лежащую строго внутри окрестности $\Delta_{n_1\ldots n_k}$, а последовательность окрестностей $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n_1}, \ldots$ радиуса $\frac{1}{2}$ — в последовательность сфер (без границ) $\Delta_{n_1\ldots n_k 1}, \ldots, \Delta_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}, \ldots$ радиуса $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{k-1}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^k}$, попарно не пересекающихся, не имеющих попарно общих граничных точек, лежащих строго внутри окрестности $\widetilde{\Delta}_{n_1\ldots n_k}$ и таких, что сумма их замыканий $\sum\limits_{n_{k+1}}\overline{\Delta}_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$ есть замкнутое множество.

Все сферы $\Delta_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$ $(n_i=1, 2, \ldots; i\leqslant k+1)$ назовем *окрестностями ранга* $k+1$.

Построим множество

$$F=\prod_k \sum_{n_1\ldots n_k}\Delta_{n_1\ldots n_k}.$$

Легко видеть, что F есть замкнутое множество $\left(\text{так как } F=\prod\limits_k \sum\limits_{n_1\ldots n_k}\overline{\Delta}_{n_1\ldots n_k}\right)$ и что F гомеоморфно бэровскому пространству.

Перейдем к построению непрерывного образа пространства H.

В гиперплоскости $\{x_1=0\}$ пространства H^* поместим множество $\mathcal{E}$, гомеоморфное множеству E, таким образом, что для координат всякой точки $x\subset\mathcal{E}$ справедливы неравенства $|x_{n+1}|\leqslant\frac{1}{n}$ *. $\mathcal{E}$ является непрерывным образом бэровского пространства и, следовательно, непрерывным образом множества F. Непрерывное отображение F на $\mathcal{E}$ может быть задано с помощью последовательности действительных непрерывных функций:

$$x_{n+1}=\varphi_n(\xi), \; **$$

причем $|\varphi_n(\xi)|\leqslant\frac{1}{n}$. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ $(a_n>0)$ — произвольная последовательность действительных чисел, стремящихся к нулю.

Построим на пространстве H функцию $\Phi(\xi)$ следующим способом.

---

* Иными словами, поместим $\mathcal{E}$ в гильбертов параллелепипед гиперплоскости $\{x_1=0\}$, которая сама представляет собой гильбертово пространство.

** Мы обозначаем через ξ точку в пространстве H, а через x — точку в пространстве H^*.

Образом $\Phi(\xi)$ любой точки ξ пространства H, лежащей вне всех окрестностей Δ_{n_1} первого ранга, будем считать точку $x^{(0)}$ пространства H^* с координатами $x_1^{(0)}=a_0$, $x_{n+1}^{(0)}=\varphi_n(\xi_0)$ $(n\geqslant 1)$, где ξ_0 — произвольная точка множества F.

Образом $\Phi(\xi)$ всякой точки ξ, принадлежащей множеству $\widetilde{\Delta}_{n_1} - \sum_{n_2}\Delta_{n_1 n_2}$ ($\widetilde{\Delta}_{n_1}$ — замыкание окрестности $\widetilde{\Delta}_{n_1}$), считаем точку x пространства H^* с координатами $x_1^{(n_1)}=a_1$, $x_{n+1}^{(n_1)}=\varphi_n(\xi_{n_1})$, где ξ_{n_1} — произвольная точка множества $F\cdot\Delta_{n_1}$.

Каждое множество $\bar{\Delta}_{n_1}-\widetilde{\Delta}_{n_1}$ отобразим непрерывно на отрезок между точками $x^{(0)}$ и $x^{(n_1)}$ в пространстве H^*, а именно, образом $\Phi(\xi)$ точки $\xi\subset\bar{\Delta}_{n_1}-\widetilde{\Delta}_{n_1}$ будем считать точку x пространства H^* с координатами

$$x_1=\frac{a_0\rho(\xi,\widetilde{\sigma}_{n_1})+a_1\rho(\xi,\sigma_{n_1})}{\rho(\xi,\widetilde{\sigma}_{n_1})+\rho(\xi,\sigma_{n_1})},$$

$$x_{n+1}=\frac{x_{n+1}^{(0)}\rho(\xi,\widetilde{\sigma}_{n_1})+x_{n+1}^{(n_1)}\rho(\xi,\sigma_{n_1})}{\rho(\xi,\widetilde{\sigma}_{n_1})+\rho(\xi,\sigma_{n_1})}.$$

(Здесь $\sigma_{n_1\ldots n_k}$ — граница окрестности $\Delta_{n_1\ldots n_k}$, $\widetilde{\sigma}_{n_1\ldots n_k}$ — граница окрестности $\widetilde{\Delta}_{n_1\ldots n_k}$, $\rho(\xi,M)$ — расстояние от точки ξ до множества M.)

Очевидно, что при этом для $\xi\subset\sigma_{n_1}$ $\Phi(\xi)=x^{(0)}$, а для $\widetilde{\xi}\subset\sigma_n$ $\Phi(\xi)=x^{(n_1)}$. Таким образом, образ каждой точки пространства H, лежащей вне всех окрестностей 2-го ранга $\left(\xi\subset H=\sum_{n_1 n_2}\Delta_{n_1 n_2}\right)$, однозначно определен.

Пусть теперь однозначно определен образ $\Phi(\xi)$ каждой точки, лежащей вне всех окрестностей k-го ранга так, что образом всякой точки ξ, принадлежащей границе $\sigma_{n_1\ldots n_k}$ окрестности $\Delta_{n_1\ldots n_k}$, будет соответственно точка $x^{(n_1\ldots n_k)}$ пространства H^* с координатами

$$x_1^{(n_1\ldots n_{k-1})}=a_{k-1},$$

$$x_{n+1}^{(n_1\ldots n_{k-1})}=\varphi_n(\xi_{n_1\ldots n_{k-1}}),$$

где $\xi_{n_1\ldots n_{k-1}}$ — произвольная точка множества $F\cdot\Delta_{n_1\ldots n_{k-1}}$.

Тогда положим для $\xi\subset\widetilde{\Delta}_{n_1\ldots n_k}-\sum_{n_{k+1}}\Delta_{n_1\ldots n_{k+1}}$

$$\Phi(\xi)=x^{(n_1\ldots n_k)},$$

где $x^{(n_1\ldots n_k)}$ — точка пространства H^* с координатами

$$x_1^{(n_1\ldots n_k)}=a_k,$$

$$x_{n+1}^{(n_1\ldots n_k)}=\varphi_n(\xi_{n_1\ldots n_k}),$$

а $\xi_{n_1\ldots n_k}$ — произвольная точка множества $F\cdot\Delta_{n_1\ldots n_k}$.

Множества же $\Delta_{n_1\ldots n_k} - \widetilde{\Delta}_{n_1\ldots n_k}$ непрерывно отобразим соответственно на отрезки между точками $x^{(n_1\ldots n_k-1)}$ и $x^{(n_1\ldots n_k-1 n_k)}$ в пространстве H^*, считая образом $\Phi(\xi)$ точки $\xi \subset \Delta_{n_1\ldots n_k} - \widetilde{\Delta}_{n_1\ldots n_k}$ точку x пространства H^* с координатами

$$x_1 = \frac{a_{k-1}\rho(\xi, \widetilde{\sigma}_{n_1\ldots n_k}) + a_k \rho(\xi, \sigma_{n_1\ldots n_k})}{\rho(\xi, \widetilde{\sigma}_{n_1\ldots n_k}) + \rho(\xi, \sigma_{n_1\ldots n_k})},$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n+1}^{(n_1\ldots n_k-1)}\rho(\xi, \widetilde{\sigma}_{n_1\ldots n_k}) + x_{n+1}^{(n_1\ldots n_k)}\rho(\xi, \sigma_{n_1\ldots n_k})}{\rho(\xi, \widetilde{\sigma}_{n_1\ldots n_k}) + \rho(\xi, \sigma_{n_1\ldots n_k})}.$$

Таким образом, мы однозначно определим образ $\Phi(\xi)$ каждой точки ξ пространства H, лежащей вне множества F.

Для точек множества F положим $\Phi(\xi) = \varphi(\xi)$. *

Легко доказать *непрерывность функции* $\Phi(\xi)$. (Непрерывность в точках $\xi \subset H - F$ очевидна из построения. Для всякой точки $\xi^0 \subset F$ легко показать, что при $\rho(\xi, \xi^0) \to 0$ также и $\rho[\Phi(\xi), \Phi(\xi^0)] \to 0$.)

Множество $\mathscr{E} = \varphi(F) = \Phi(F)$ высекается из образа $\Phi(H)$ пространства H гиперплоскостью $\{x_1 = 0\}$, так как образ любой точки пространства H, не принадлежащей множеству F, имеет, по построению, отличную от нуля координату x_1. Следовательно, $\mathscr{E}$ — замкнутое в $\Phi(H)$ множество.

Оценим класс множества $\Phi(H)$. Очевидно, что

$$\Phi(H) = \Phi(H - F) + \Phi(F) = \Phi(H - F) + \mathscr{E}.$$

$\mathscr{E}$ есть B-множество класса α (так как оно гомеоморфно множеству E). $\Phi(H - F)$ представляет собой, как это видно из построения, счетную сумму лежащих в гильбертовом пространстве отрезков, т. е. абсолютное F_σ.

Следовательно, если $\alpha \geqslant 2$, то класс множества $\Phi(H)$ не выше α; но так как B-множество $\mathscr{E}$ класса α замкнуто в $\Phi(H)$, то, с другой стороны, класс множества $\Phi(H)$ не ниже α.

Итак, непрерывный образ $\Phi(H)$ гильбертова пространства H есть B-множество *строго* класса α.

Имея в виду, что легко построить непрерывный образ гильбертова пространства, являющийся B-множеством 1-го класса, мы можем формулировать такое следствие теоремы 1.

Следствие. *Непрерывным образом гильбертова пространства может быть B-множество любого класса α (строго класса α).*

---

* $\varphi(\xi)$ обозначает отображение: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \varphi_n(\xi)$.

ТЕОРЕМА II. *Каково бы ни было A-множество E, существует непрерывный образ гильбертова пространства, содержащий замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное множеству E.*

Легко видеть, что, подставив в доказательстве предыдущей теоремы вместо B-множества E A-множество, мы докажем утверждение теоремы II. Однако, так как в случае A-множества не стоит вопрос об оценке класса образа гильбертова пространства, то существует более простое доказательство теоремы II, которое мы здесь и приведем.

Поместим в гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$ пространства H^* A-множество $\mathcal{E}$, гомеоморфное множеству E, так, чтобы координаты его удовлетворяли неравенствам $|x_{n+1}| \leqslant \frac{1}{n}$. В пространстве H существует замкнутое подмножество F, гомеоморфное бэровскому пространству. Следовательно, $\mathcal{E}$ является непрерывным образом множества F, причем непрерывное отображение $\varphi(\xi)$ множества F на множество $\mathcal{E}$ может быть задано при помощи действительных непрерывных функций $x_{n+1} = \varphi_n(\xi)$, $n = 1, 2, \ldots$, заданных на множестве F и удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi_{n+1}(\xi)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Так как множество F замкнуто в пространстве H, то для каждой функции $\varphi_{n+1}(\xi)$ существует соответственно действительная непрерывная функция $f_{n+1}(\xi)$, определенная на всем пространстве H, совпадающая с функцией $\varphi_{n+1}(\xi)$ в точках множества F и удовлетворяющая неравенству

$$|f_{n+1}(\xi)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Определим еще на пространстве H функцию $f_1(\xi) = \rho(\xi, F)$. Легко видеть, что отображение $f(\xi)$ пространства H в пространство H^*, заданное при помощи функций $f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi), \ldots$ $(x_n = f_n(\xi))$, непрерывно. При этом $\mathcal{E} = f(F)$ и $\mathcal{E}$ высекается из $f(H)$ гиперплоскостью $\{x_1 = 0\}$ пространства H^*.

Таким образом, A-множество $\mathcal{E}$, гомеоморфное множеству E, оказалось замкнутым в непрерывном образе $f(H)$ гильбертова пространства, и утверждение теоремы доказано.

Примечание. Если множество E лежит в эвклидовом пространстве размерности n, то, как легко видеть, соответствующий непрерывный образ гильбертова пространства может быть построен в эвклидовом пространстве размерности $n+1$. В частности, может быть построено непрерывное отображение гильбертова пространства в эвклидову плоскость, содержащее в качестве замкнутого подмножества любое A-множество, лежащее на эвклидовой прямой.

Если A-множество имеет размерность n, то оно может быть топологически вложено в $(2n+1)$-мерное эвклидово пространство, а значив этом случае размерность соответствующего непрерывного образа гильбертова пространства будет $2n+2$.

Следствие. *Непрерывным образом гильбертова пространства может быть A-множество, не являющееся B-множеством. При этом множество A не B может быть получено как непрерывный образ гильбертова пространства H уже при непрерывном отображении в эвклидову плоскость.*

ТЕОРЕМА III. *Каково бы ни было B-множество E, существует непрерывный взаимно однозначный образ гильбертова пространства, содержащий замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное множеству E.*

Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Если множество M, лежащее в гильбертовом параллелепипеде, содержит замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное бэровскому пространству, то, каково бы ни было B-множество E, существует непрерывный взаимно однозначный образ множества M, содержащий замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное множеству E.*

В гиперплоскости $\{x_{2k+1}=0\}$ пространства H^* поместим множество $\mathcal{E}$, гомеоморфное множеству E, таким образом, чтобы для координат всякой точки, принадлежащей множеству $\mathcal{E}$, были справедливы неравенства $|x_{2k}|\leqslant\frac{1}{k}$.

Множество $\mathcal{E}$, как и всякое B-множество, представляет собой непрерывный взаимно однозначный образ некоторого замкнутого подмножества бэровского пространства. А это значит, что $\mathcal{E}$ представляет собой непрерывный взаимно однозначный образ некоторого замкнутого подмножества F (гомеоморфного замкнутому подмножеству бэровского пространства) множества M. Отображение F на $\mathcal{E}$ может быть задано при помощи непрерывных действительных функций $x_{2k}=\varphi_{2k}(\xi)$, причем $|\varphi_{2k}(\xi)|\leqslant\frac{1}{k}$.

Продолжим непрерывно каждую из этих функций на все множество M, т. е. построим на множестве M непрерывные действительные функции $f_{2k}(\xi)$, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяющие неравенствам $|f_{2k}(\xi)|\leqslant\frac{1}{k}$ и совпадающие соответственно с функциями $\varphi_{2k}(\xi)$ на множестве F.

Определим, кроме того, на множестве M функции:

$$f_1(\xi)=\rho(\xi, F)$$

и

$$f_{2k+1}(\xi)=\frac{1}{a}\cdot\xi_k\cdot\rho(\xi, F)\cdot\quad(k=1, 2, \ldots),$$

где a — верхняя граница расстояний между точками множества M (она существует, так как M лежит в гильбертовом параллелепипеде), а ξ_k — k-я координата точки ξ. Определим отображение $f(\xi)$ M в H, положив $x_n=f_n(\xi)$.

Так как $\rho(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})\leqslant a$ для любых $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, принадлежащих M, то $\rho(\xi, F)\leqslant a$ для любой $\xi\subset M$.

Кроме того, $|\xi_k|\leqslant\frac{1}{k}$ для любой $\xi\subset M$, а значит,

$$|f_{2k+1}(\xi)|\leqslant\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{k}\cdot a=\frac{1}{k}.$$

Исходя из этого, а также из того, что $|f_{2k}(\xi)| \leqslant \frac{1}{k}$ и что каждая $f_n(\xi)$ непрерывна, легко доказать непрерывность построенного нами отображения $f(\xi)$.

Так как $\mathcal{E}$ высекается из $f(M)$ гиперплоскостью $\{x_{2k+1} = 0\}$, то $\mathcal{E}$ замкнуто в M.

Остается доказать, что отображение $f(\xi)$ взаимно однозначно. Что образы двух различных точек, принадлежащих множеству F, различны, ясно из того, что на множестве F $f(\xi)$ совпадает с взаимно однозначным отображением $\varphi(\xi)$ множества F на множество $\mathcal{E}$.

Если две точки ξ' и ξ'' множества M таковы, что $\rho(\xi', F) \neq \rho(\xi'', F)$ (в частности, только одна из точек принадлежит F), то образы этих точек имеют различные координаты x_1 и, следовательно, различны.

Если же для двух различных точек ξ' и ξ'' множества M $\rho(\xi' F) = \rho(\xi'', F)$, то найдется такое n, что $\xi_n' \neq \xi_n''$ и тогда

$$\frac{1}{a} \cdot \xi_n' \rho(\xi', F) \neq \frac{1}{a} \cdot \xi_n'' \rho(\xi'', F),$$

т. е.

$$x_{2n+1}' \neq x_{2n+1}'',$$

а это значит, что образы $f(\xi')$ и $f(\xi'')$ точек ξ' и ξ'' различны.

Итак, лемма доказана полностью.

Доказательство теоремы немедленно следует из того, что само гильбертово пространство может быть топологически вложено в гильбертов параллелепипед и что гильбертово пространство содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное бэровскому пространству.

Следствие. *Гильбертово пространство может иметь в качестве непрерывного взаимно однозначного образа В-множество сколь угодно высокого класса.*

Примечание. В доказательствах теорем, кроме существования замкнутого подмножества, гомеоморфного бэровскому пространству, использовались только общие всем метрическим сепарабельным пространствам свойства гильбертова пространства. Таким образом, все приведенные выше теоремы и следствия из них справедливы не только для гильбертова пространства H, но и для любого метрического сепарабельного пространства, содержащего замкнутое подмножество, гомеоморфное бэровскому пространству. В частности, эти теоремы справедливы для любого метрического сепарабельного A не F_σ*.

В заключение выражаю благодарность Л. В. Келдыш, под руководством которой была выполнена настоящая работа.

Поступило
4.XI.1949

* Всякое метрическое сепарабельное A не F_σ содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное бэровскому пространству [(см. (4)].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Люстерник Л. А., Основные понятия функционального анализа, Успехи матем. наук, в. I (1936), 77 — 140.

[2] Urysohn P., Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. 94 (1925), 262 — 308.

[3] Urysohn P., Zum Metrisationsproblem, Math. Ann. 94 (1925), 309—315.

[4] Hurewicz W., Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A), Fund. Math., 12 (1928), 78 — 109.



СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ ВАВИЛОВ
24.III 1891—25.I 1951

ПАМЯТИ ВЕЛИКОГО ТРУЖЕНИКА И ОРГАНИЗАТОРА НАУКИ СЕРГЕЯ ИВАНОВИЧА ВАВИЛОВА

Советская наука понесла тяжелую утрату. В полном расцвете творческих сил скончался крупнейший ученый, выдающийся государственный и общественный деятель, неутомимый борец за передовую советскую науку, пламенный пропагандист великих идей коммунизма — Президент Академии Наук СССР, депутат Верховного Совета Союза ССР академик Сергей Иванович Вавилов.

С. И. Вавилов родился в Москве в 1891 году. В 1909 году он поступил в Московский университет, где учился и работал под руководством выдающегося русского ученого-физика П. Н. Лебедева. Еще будучи студентом, С. И. Вавилов выполнил оригинальное научное исследование «Тепловое выцветание красителей», удостоенное золотой медали Обществом любителей естествознания при Московском университете. По окончании университета в 1914 году С. И. Вавилову было предложено остаться в университете при кафедре физики, однако он отклонил это предложение и вместе с другими прогрессивными учеными ушел из университета в знак протеста против полицейских преследований передовых ученых.

С 1914 по 1918 год С. И. Вавилов находился на военной службе. За эти годы им выполнен ряд важных научных исследований в области радиофизики.

Выдающиеся дарования Сергея Ивановича, как талантливого ученого и организатора, в полной мере раскрылись после Великой Октябрьской социалистической революции, создавшей исключительно благоприятные условия для развития науки в нашей стране.

С первых дней революции С. И. Вавилов ведет большую педагогическую и научно-исследовательскую работу. Его жизнь и деятельность связаны с работой таких крупнейших научных и учебных учреждений, как Московский университет, Московское высшее техническое училище, Институт физики и биофизики, Государственный оптический институт и Физический институт имени П. Н. Лебедева Академии Наук СССР.

С. И. Вавилову принадлежит около ста научных работ, главным образом по вопросам физической оптики. Более 15 лет его упорных исследований природы фотолюминесценции растворов увенчались большими научными открытиями в этой малоразработанной области физики и позволили создать общую теорию явлений люминесценции.

На основании глубоких теоретических исследований С. И. Вавилова и под его непосредственным руководством разработана технология производства ламп так называемого дневного, или холодного, света, име-

ющих значительные экономические и светотехнические преимущества перед лампами накаливания.

По инициативе С. И. Вавилова в химии, медицине, минералогии, в пищевой, металлообрабатывающей и других отраслях промышленности получил широкое внедрение новый метод анализа вещества — люминесцентный анализ.

Особо важное научное и практическое значение имеет выдающееся открытие С. И. Вавилова и его учеников в области изучения свойств электронов при движении их в веществе со сверхсветовой скоростью. За эти выдающиеся труды Сергей Иванович был дважды удостоен Сталинской премии.

Признанием больших заслуг Сергея Ивановича перед советской наукой явилось избрание его в 1931 году членом-корреспондентом и в 1932 году — действительным членом Академии Наук СССР. Человек большой и разносторонней культуры, Сергей Иванович уделял огромное внимание общим вопросам истории и методологии науки. Многие его работы посвящены вопросам философии естествознания, где он творчески применял великое всепобеждающее учение Ленина — Сталина и показал, что достижения передовой современной науки подтверждают законы диалектического материализма и опровергают идеалистические измышления буржуазных философов и физиков. Горячий патриот Советской Родины, С. И. Вавилов последовательно боролся за приоритет отечественной науки и признание того великого вклада, который внесли ученые нашей Родины в сокровищницу мировой науки и культуры.

В годы Великой отечественной войны, будучи уполномоченным Государственного Комитета Обороны СССР, С. И. Вавилов отдавал свои силы делу разгрома врага.

В 1945 году Сергей Иванович Вавилов был избран Президентом Академии Наук СССР. На посту Президента Академии Наук он проявил себя талантливым организатором, неутомимым борцом за осуществление великих задач, поставленных партией и Советским правительством перед учеными нашей страны.

Все свои силы Сергей Иванович отдал делу развития передовой советской науки.

Он был непримиримым борцом за все новое и передовое в науке, против косности и рутины, начетничества и талмудизма. Во всей своей деятельности С. И. Вавилов руководствовался мудрыми указаниями товарища Сталина о развитии советской науки, «той науки, которая не отгораживается от народа, не держит себя вдали от народа, а готова служить народу, готова передать народу все завоевания науки, которая обслуживает народ не по принуждению, а добровольно, с охотой».

Научные учреждения Академии Наук СССР, руководимой Сергеем Ивановичем, достигли значительных успехов в выполнении исторической задачи, поставленной товарищем Сталиным перед советскими учеными,— не только догнать, но и превзойти в ближайшее время достижения науки за пределами нашей страны.

С. И. Вавилов уделял большое внимание планированию советской науки и внедрению научных достижений в народное хозяйство. Воодушевленный решениями партии и правительства о строительстве гигантских гидротехнических сооружений коммунизма, Сергей Иванович возглавлял работу ученых по оказанию помощи великим сталинским стройкам.

Сергей Иванович неуклонно проводил в жизнь указания товарища Сталина о приобщении к науке широчайших народных масс. Выполняя большие государственные и научные обязанности, С. И. Вавилов стоял

во главе массового движения советских ученых по распространению политических и научных знаний среди трудящихся. Сергей Иванович сам являлся талантливым популяризатором науки. Его произведения «О теплом и холодном свете», «Глаз и солнце» и многие другие представляют образцы популяризации современных достижений науки.

В течение многих лет он возглавлял Комиссию Академии Наук по изданию научно-популярной литературы, являлся главным редактором научно-популярного журнала «Природа», редактировал большое число изданий для народа.

С. И. Вавилов являлся главным редактором нового издания Большой Советской Энциклопедии, призванного обобщать все достижения науки и культуры.

Велика и разнообразна научно-организационная деятельность, которую вел академик Вавилов. Он был Президентом Академии Наук СССР, председателем Всесоюзного общества по распространению политических и научных знаний, председателем Комитета по координации научной деятельности академий наук союзных республик. На этих ответственных постах академик Вавилов с исключительной энергией руководил организацией научной работы и подготовкой научных кадров в центре и на местах.

Широко известна деятельность С. И. Вавилова как пламенного борца за дело мира во всем мире. Беззаветное служение великому делу Ленина — Сталина, жизненным интересам советского народа снискало Сергею Ивановичу глубокое уважение и любовь трудящихся нашей страны. Начиная с 1935 года, С. И. Вавилов был депутатом многих созывов Ленинградского и Московского Советов, депутатом Верховного Совета РСФСР и Верховного Совета СССР.

Советское правительство высоко оценило выдающиеся заслуги академика Вавилова перед Родиной. Сергей Иванович был дважды награжден орденом Ленина, орденом Трудового Красного Знамени и медалями Советского Союза.

Советский народ будет свято чтить светлую память о Сергее Ивановиче Вавилове, выдающемся ученом и патриоте нашей Родины, отдавшем все свои силы и знания великому делу строительства коммунизма в СССР.

Академия Наук СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 109—130

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ МОДУЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

В статье даны общие теоремы, позволяющие указывать верхнюю границу модуля суммы

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)}$$

как в случае, когда $f(x)$ — многочлен степени n (особое внимание здесь уделяется случаям, близким к предельным), так и в более общем случае, когда $f(x)$ — функция, в некотором отношении близкая к многочлену степени n. Имеются в виду случаи, когда n может неограниченно расти.

Верхняя граница модуля суммы вида

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)}$$

в случае, когда $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x$ — многочлен степени n, дана в этой статье как функция от p, n и от знаменателя q_s рационального приближения к коэффициенту a_s, отличному от a_1. Эта граница остается достаточно точной и в близких к предельным случаях, когда порядок q_s очень мал или, наоборот, очень высок и близок к p^s. Для случая, когда все $q_n, \ldots, q_2$ не превосходят p, указана и еще более совершенная граница, в выражение которой вместо одного q_s входит общее наименьшее кратное всех $q_n, \ldots, q_2$. Верхняя граница модуля суммы того же вида в случае, когда $f(x)$ — функция, в некотором отношении близкая к многочлену степени n, также остается достаточно точной в весьма широком классе случаев. Результаты статьи важны при рассмотрении случаев, когда n может неограниченно расти.

Доказательство полностью опирается на некоторые леммы моей книги ([1]) и на результаты предыдущей статьи ([2]), посвященной случаю многочлена. Найденные результаты могли бы быть заменены и еще более точными, но это отразилось бы на простоте и единообразии доказательств.

Следует отметить, что лемма 7 этой статьи полезна при решении других важных вопросов аналитической теории чисел (например, при разыскании аналогичных приведенным здесь верхних границ модулей сумм с простыми числами). Но этих вопросов я здесь не касаюсь.

Обозначения. Символ $\sum_0^M V$ обозначает произведение положительного числа E на сумму не более чем F слагаемых вида V при условии, что $EF \leqslant M$.

Символ (z) обозначает расстояние вещественного числа z до ближайшего целого числа.

Буквою θ обозначаем число с условием $|\theta| \leqslant 1$.

Буквою n обозначаем целое число $\geqslant 11$; полагаем

$$\nu = \frac{1}{n}, \quad b = \left[\frac{5}{4} n + \frac{1}{2}\right], \quad h = n + 2,$$

$$k = \left[\frac{\ln W}{-\ln(1-\nu)} + 1\right], \quad W \geqslant 38, \quad \sigma = (1-\nu)^k.$$

Нетрудно видеть, что имеют место следующие неравенства:

$$\frac{5}{4} n - \frac{1}{4} \leqslant b \leqslant \frac{5}{4} n + \frac{1}{2},$$

$$\left(n - \frac{2}{3}\right) \ln W < k < \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln W + 1, \quad \sigma \leqslant \frac{1}{W}.$$

ЛЕММА 1. *Пусть N и Y — целые, $Y > 1$, $A_0 \geqslant 2\beta \geqslant 2$, y пробегает значения $y = N, \ldots, N + Y - 1$ и для этих значений функция $\Phi(y)$ принимает вещественные значения с условием, что при $y_2 - y_1 = 1$ имеем*

$$\frac{1}{A_0} \leqslant \Phi(y_2) - \Phi(y_1) \leqslant \frac{\beta}{A_0}.$$

Пусть, далее, $U \geqslant 1$ и K — число значений y с условием

$$(\Phi(y)) \leqslant U A_0^{-1}.$$

Тогда

$$K < [Y \beta A_0^{-1} + 1](2U + 1).$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 9, β моей книги ([1]).

ЛЕММА 2. *Пусть $p_1 > (2n)^{Wk}$, $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_1$ — вещественные,*

$$F(x) = \beta_{n+1} x^{n+1} + \ldots + \beta_1 x, \quad T_1 = \sum_{0 < x \leqslant p_1} e^{2\pi i F(x)}.$$

Тогда имеем

$$|T_1|^{2b(k+h)} < \sum_{s_1=2}^{\eta_1} \ldots \sum_{s_k=2}^{\eta_k} \sum_0^{B} K(s_1, \ldots, s_k), \tag{1}$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_k$ — некоторые целые положительные числа, B — некоторое положительное число, $K(s_1, \ldots, s_k) \geqslant 0$,

$$K(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{(x_1, \ldots, x_{n+1})} e^{2\pi i (X_1 x_1 + \ldots + X_{n+1} x_{n+1})}; \quad X_r = \frac{F^{(r)}(x_0)}{r!}.$$

Здесь x_0 — одно из чисел $1, \ldots, [p_1]$, зависящее только от выбора $K(s_1, \ldots, s_k)$. Далее, от замены в левой части неравенства (1) чисел $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_1$ другими в правой части этого неравенства могут измениться лишь числа $X_1, \ldots, X_{n+1}$, где $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_1$ входят в выражения коэффициентов при степенях x_0. Наконец, суммирование распространяется на системы $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, состоящие из целых чисел, причем, каковы бы ни были $z_1, \ldots, z_n$, число систем $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с условием

$$x_1 = z_1, \ldots, x_n = z_n$$

будет $\leqslant \psi$, *где* ψ — *некоторое положительное число с условием*

$$B\psi = (4n)^{2bk} (8n)^{bk(k-1+2h)} b^{nk} 2^{\frac{n^3-4n}{2}k} p_1^{2b(k+h)-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\sigma} 2^{-4(s_1+\ldots+s_k)}.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 7 моей предыдущей статьи ([2]). При этом указано, что $K(s_1, \ldots, s_k) \geqslant 0$ (что ясно из приведенного в указанной статье доказательства) и снято не влияющее на доказательство леммы ограничение, что p_1 — целое число. Кроме того, вместо Un введено W, причем вместо $U \geqslant n+1$ имеем $W \geqslant 38$; вследствие этого некоторые части доказательства незначительно меняются, а именно, теперь имеем

$$p_{k+1} > (2n)^{3n}, \quad p_{k+1}^{\gamma} > (2n)^3,$$

$$2^{\gamma_k} > 4n^3, \quad \gamma_k > 12,$$

$$C = \frac{2b}{1-(2n)^{-3}},$$

$$R_{t, s_t} > (2n)^3 \quad \text{при} \quad t \leqslant k.$$

В остальном доказательство не меняется.

ЛЕММА 3. *Пусть* c — *вещественное,*

$$p_1 > (2n)^{Wk}, \quad T = \sum_{0<x\leqslant p_1} e^{2\pi i(cx^{n+1}+\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x)},$$

$$H = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |T|^{2b(k+h)} d\alpha_n \ldots d\alpha_1.$$

Тогда имеем

$$H < (8n)^{bk(k+2h)+\frac{1}{6}nbk} p_1^{2b(k+h)-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\sigma}.$$

Доказательство. Применим лемму 2. Получим

$$|T|^{2b(k+h)} \leqslant \sum_{s_1=2}^{n_1} \cdots \sum_{s_k=2}^{n_k} \sum_0^{B} K(s_1, \ldots, s_k);$$

$$K(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{(x_1, \ldots x_{n+1})} e^{2\pi i(X_1 x_1+\ldots+X_{n+1}x_{n+1})},$$

где имеем

$$X_1 = \binom{n+1}{1} c x_0^n + \binom{n}{1} \alpha_n x_0^{n-1} + \cdots + \binom{2}{1} \alpha_2 x_0 + \alpha_1,$$

$$X_2 = \binom{n+1}{2} c x_0^{n-1} + \binom{n}{2} \alpha_n x_0^{n-2} + \cdots + \alpha_2,$$

. . . .

$$X_n = \binom{n+1}{n} c x_0 + \alpha_n,$$

$$X_{n+1} = c.$$

Далее, находим

$$X_1x_1 + \cdots + X_{n+1}x_{n+1} = A_{n+1}c + A_n\alpha_n + \cdots + A_1\alpha_1,$$

где

$$A_{n+1} = \binom{n+1}{1}x_0^n x_1 + \binom{n+1}{2}x_0^{n-1}x_2 + \cdots + \binom{n+1}{n}x_0x_n + x_{n+1},$$

$$A_n = \binom{n}{1}x_0^{n-1}x_1 + \binom{n}{2}x_0^{n-2}x_2 + \cdots + x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_2 = \binom{2}{1}x_0x_1 + x_2,$$

$$A_0 = x_1.$$

Но интеграл

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s_1, \ldots, s_k)\, d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

не превосходит числа систем $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с условием $A_n = \ldots = A_1 = 0$, что равно числу систем $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с условием $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Следовательно, указанный интеграл $\leqslant \psi$ и вместе с тем

$$H \leqslant \sum_{s_1=2}^{r_1} \cdots \sum_{s_k=2}^{r_k} B\psi < (4n)^{2bk}(8n)^{bk(k-1+2h)} b^{nk} 2^{\frac{n^2-4n}{2}k} P_1^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\sigma},$$

откуда, замечая, что

$$n < b < n\sqrt{2} < 1{,}5\,n, \quad (b+n)k < \frac{1}{6}nk,$$

мы и убеждаемся в справедливости нашей леммы.

ТЕОРЕМА 1,а. *Пусть N и P — целые, $P > 0$ и в интервале $N \leqslant x \leqslant N + P$ вещественная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$, удовлетворяющую условию*

$$\frac{1}{A} \leqslant \left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{c}{A},$$

где $c \geqslant 1$, $P \leqslant A \leqslant CP^2$. Тогда при целом P_1 с условием $0 < P_1 \leqslant P$ для суммы

$$S = \sum_{x=N}^{N+P_1-1} e^{2\pi i f(x)}$$

имеем неравенство

$$|S| < (8n)^{0,5n(\ln 120n - 1,7)} c\, C^{\frac{\rho}{3}} P^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{3n^2 \ln 120n}.$$

Доказательство. Пусть

$$k = \left[\frac{\ln 6n}{-\ln(1-\nu)} + 1\right], \quad \nu_1 = \frac{1}{n+1}, \quad P_1 = [A^{\nu_1(1-\rho)}].$$

Достаточно рассматривать лишь случай, когда

$$A \geqslant (2n)^{6(n+1)^2k}, \quad P_1 \geqslant 3P^{1-\rho}, \quad C < P^3,$$

так как при несоблюдении одного из этих условий теорема очевидна.

Легко найдем

$$\sigma < \frac{1}{6n}, \quad p_1 > (2n)^{6nk}, \quad p_1 < \sqrt{P}.$$

Полагая при $y = N, \ldots, N + P_1 - p_1$

$$T_0(y) = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i (f(y+x) - f(y))},$$

находим

$$|S| < p_1^{-1} \sum_{y=N}^{N+P_1-p_1} |T_0(y)| + p_1.$$

Применяя формулу Тэйлора, выводим

$$f(y+x) - f(y) = Y_1 x + \cdots + Y_n x^n + \frac{\theta c}{A} p_1^{n+1};$$

$$Y_j = Y_j(y) = \frac{f^{(j)}(y)}{j!}, \quad \frac{c}{A} p_1^{n+1} \leqslant cA^{-\sigma} < cP^{-\sigma}.$$

Каждому $y = N, \ldots, N + P_1 - p_1$ приведем в соответствие область (Ω_y) точек $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ n-мерного пространства, заданную неравенствами

$$Y_n - 0{,}5 p_1^{-n} P^{-\sigma} \leqslant \alpha_n \leqslant Y_n + 0{,}5 p_1^{-n} P^{-\sigma},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_1 - 0{,}5 p_1^{-1} P^{-\sigma} \leqslant \alpha_1 \leqslant Y_1 + 0{,}5 p_1^{-1} P^{-\sigma}.$$

Если точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y), то

$$T_0(y) = T_1 + \theta' 2\pi (c + 0{,}5n) p_1 P^{-\sigma}; \quad T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}.$$

Выбрав для каждой области (Ω_y) свою точку $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ и, следовательно, свое значение T_1, получим

$$|S| < p_1^{-1} \sum_{y=N}^{N+P_1-p_1} |T_1| + (2\pi c + \pi n + 1) P^{1-\sigma} < p_1^{-1} \sum_{y=N}^{N+P_1-p_1} |T_1| + 4cnP^{1-\sigma}.$$

$$|S|^{2b(k+h)} < 2^{2b(k+h)} p_1^{-2b(k+h)} P^{2b(k+h)-1} \sum_{y=N}^{N+P_1-p_1} |T_1|^{2b(k+h)} + (8cnP^{1-\sigma})^{2b(k+h)},$$

откуда также следует, что

$$|S|^{2b(k+h)} < 2^{2b(k+h)} p_1^{-2b(k+h)} P^{2b(k+h)-1} \sum_{y=N}^{N+P_1-p_1} p_1^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\sigma}.$$

$$\cdot \int_{(\Omega_y)} \cdots \int |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + (8cnP^{1-\sigma})^{2b(k+h)}.$$

Пусть G обозначает максимум числа областей (Ω_y), содержащих точки с координатами, отличающимися лишь целыми слагаемыми от координат некоторой точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$. Тогда

$$|S|^{2b(k+h)} < 2^{2b(k+h)} p_1^{-2b(k+h)} P^{2b(k+h)-1} p_1^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\sigma}.$$

$$\cdot G \int_0^1 \cdots \int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + (8cnP^{1-\sigma})^{2b(k+h)}.$$

Если (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две области, содержащие точки, отличающиеся лишь целыми слагаемыми от координат некоторой точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$, то имеем

$$|Y_n(y) - Y_n(y_0)| \leqslant 2p_1^{-n}P^{-\rho} < 3A^{-1+\rho+(1-\rho)\nu_1}P^{-\rho} < 3C^{\nu}P^{2\nu}A^{-1} =$$
$$= 3\nu_1 C^{\nu}P^{2\nu}A_0^{-1}; \quad A_0 = A\nu_1.$$

Кроме того, если y_2 и y_1 — два числа ряда $N, \ldots, N+P$, то имеем

$$\frac{1}{A_0} \leqslant |Y_n(y_2) - Y_n(y_1)| \leqslant \frac{c}{A_0}.$$

Поэтому, согласно лемме 1,

$$G < (c(n+1)+1)(6\nu_1 C^{\nu}P^{2\nu}+1) < 7cC^{\nu}P^{2\nu}.$$

Применяя это неравенство и лемму 3, получим

$$|S|^{2b(k+h)} < 7\cdot 2^{2b(k+h)}(8n)^{bk(k+2h)+\frac{1}{6}nbk}cC^{\nu}P^{2b(k+h)-1+2\nu+n\rho}p_1^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} +$$
$$+ (8cnP^{1-\rho})^{2b(k+h)}.$$

Но имеем

$$p_1^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} \leqslant A^{\frac{n}{2}\sigma} \leqslant C^{\frac{1}{12}}P^{\frac{1}{6}},$$

$$\frac{1-\frac{1}{6}-2\nu-n\rho}{2b(k+h)} > \frac{\frac{5}{6}(1-2{,}5\nu)}{2\left(\frac{5}{4}n+\frac{1}{2}\right)(n-0{,}5)\left(\ln 6n+\frac{4}{3}\right)} >$$
$$> \frac{1}{3n^2(1+3{,}2\nu)\left(\ln 6n+\frac{4}{3}\right)} > \rho,$$

$$\frac{\frac{4}{6}+\frac{2}{6}b(k+h)+bk(k+2h)+\frac{1}{6}nbk}{2b(k+h)} < \frac{1}{6}+\frac{1}{2}(k+h)+\frac{1}{12}n <$$
$$< \frac{1}{2}n(\ln 120n - 1{,}7),$$

$$\frac{\nu+\frac{1}{12}}{2b(k+h)\rho} < \frac{\frac{23}{132}3n^2\ln 120n}{\left(\frac{5}{2}n-\frac{1}{2}\right)\left(\left(n-\frac{2}{3}\right)\ln 6n+n+2\right)} < \frac{23\ln 120n}{110(1-\nu)(\ln 6n+1)} < \frac{1}{3},$$

откуда и убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

ТЕОРЕМА 1, b. *Пусть N и P — целые, $P>0$, и в интервале $N \leqslant x \leqslant N+P$ вещественная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$, удовлетворяющую условию*

$$\frac{1}{A} \leqslant \left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{c}{A},$$

где $c \geqslant 1$, $P \leqslant A \leqslant CP^2$. Пусть, далее, в том же интервале $\Phi(x)$ — неотрицательная монотонная функция, наибольшее значение которой не превосходит Φ_0. Тогда, обозначая символом P_0 любое целое число интервала $0 < P_0 \leqslant P$, будем иметь

$$\left|\sum_{x=N}^{N+P_0-1}\Phi(x)e^{2\pi i f(x)}\right| < \Phi_0(8n)^{0{,}5n(\ln 120n-1{,}6)}cC^{\frac{\rho}{3}}P^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{3n^2\ln 120n}.$$

Доказательство. Эта теорема получается из теоремы 1, a применением преобразования Абеля.

Пример. Пусть $s=\sigma+it$, $\sigma>0$, $t>1$, P и P_0 — целые,

$$t^{\frac{1}{n}} \leqslant P \leqslant t^{\frac{1}{n-1}}, \quad 0<P_0 \leqslant P.$$

Применим теорему 1, b к оценке суммы

$$S=\sum_{x=P}^{P+P_0-1} \frac{1}{x^s}.$$

Здесь имеем

$$S=\sum_{x=P}^{P+P_0-1} \Phi(x) e^{2\pi i f(x)}; \quad \Phi(x)=\frac{1}{x^\sigma}, \quad \Phi_0=\frac{1}{P^\sigma}; \quad f(x)=-\frac{t \ln x}{2\pi},$$

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right|=\frac{1}{2\pi(n+1) x^{n+1}}.$$

Полагая

$$A=\frac{2\pi(n+1) 2^{n+1} P^{n+1}}{t}, \quad c=2^{n+1},$$

$$C=2\pi(n+1) 2^{n+1},$$

будем иметь

$$P<A \leqslant CP^2, \quad \frac{1}{A} \leqslant\left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{c}{A}.$$

Поэтому, применяя теорему 1, b, получим

$$|S|<(8n)^{0,5n \ln 120n} P^{1-\sigma-\rho}; \quad \rho=\frac{1}{3n^2 \ln 120n}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть m и p — целые положительные, $c_{n+1}, \ldots, c_1$ — вещественные, $f(x)=c_{n+1}x^{n+1}+\cdots+c_1 x$,*

$$S=\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i m f(x)},$$

s — одно из чисел $n+1, \ldots, 2$,

$$c_s=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad 1<q<p^s.$$

Тогда, полагая

$$\begin{aligned} q&=p^\tau, && \text{если} \quad 1<q \leqslant p, \\ \tau&=1, && \text{если} \quad p<q \leqslant p^{s-1}, \\ q&=p^{s-\tau}, && \text{если} \quad p^{s-1}<q<p^s, \end{aligned}$$

и вводя для краткости обозначения

$$l=\ln \frac{12n(n+1)}{\tau}, \quad \rho=\frac{\tau}{3n^2 l},$$

будем иметь

$$|S|<(8n)^{0,5nl} m^{\frac{2\rho}{\tau}} p^{1-\rho}.$$

Доказательство. Эта теорема доказана в моей статье [2]. Она необходима в дальнейших исследованиях.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть m и p — целые положительные, $c_{n+1}, \ldots, c_1$ — вещественные, $f(x) = c_{n+1}x^{n+1} + \cdots + c_1 x$,*

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i m f(x)},$$

причем каждое $c_{n+1}, \ldots, c_2$ представлено (что всегда возможно) в форме

$$c_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s p}; \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant p.$$

Тогда, обозначая буквою Q общее наименьшее кратное чисел $q_{n+1}, \ldots q_2$ и полагая

$$Q = p^{\tau}, \quad \text{если} \quad Q \leqslant p,$$
$$\tau = 1, \quad \text{если} \quad Q \geqslant p,$$

при условии $m \leqslant p^{0,05\nu\tau}$, будем иметь

$$|S| < (8n)^{0,5nl} p^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{\tau}{3n(n+1)l}, \quad l = \ln\frac{12(n+1)^2}{\tau}.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда по крайней мере одно из чисел $q_{n+1}, \ldots, q_2$ удовлетворяет условию $q_s > p^{1-0.1\nu}$. Полагая $q_s = p^{\tau_0}$, будем иметь (теорема 2)

$$|S| < (8n)^{0,5nl_0} m^{\frac{2\rho_0}{\tau_0}} p^{1-\rho_0}; \quad \rho_0 = \frac{\tau_0}{3n^2 l_0}, \quad l_0 = \ln\frac{12n(n+1)}{\tau_0},$$

откуда, ввиду

$$l_0 < \frac{12n(n+1)}{(1-0,1\nu)\tau} < l; \quad 0,05\nu\tau\frac{2\rho_0}{\tau_0} - \rho_0 < (0,11\nu - 1)\rho_0 <$$
$$< (0,11\nu - 1)\frac{\tau(1-0,1\nu)}{3n^2 l} < -\rho,$$

и следует справедливость нашей теоремы для рассматриваемого случая.

Теперь рассмотрим случай, когда каждое из чисел $q_{n+1}, \ldots, q_2$ не превосходит $p^{1-0,1\nu}$. Положим

$$W = \frac{3(n+1)^2}{\tau}, \quad k = \left[\frac{\ln W}{-\ln(1-\nu)} + 1\right], \quad Y = [p^{1-0.1\nu\tau}].$$

Достаточно рассматривать лишь случай, когда

$$p \geqslant (2n)^{\frac{n+1}{\rho}} \left(\text{очевидно, } \frac{n+1}{\rho} > Wk\right),$$

так как в противном случае теорема тривиальна.

Здесь $Y < [p^{1-\rho}]$; все рассуждения, приведшие к формуле (9) упомянутой выше моей работы ([2]), сохраняют силу, и эта формула теперь (с новыми значениями k, ρ и Y) примет вид

$$|S|^{2b(k+h)} < 2^{2b(k+h)} p^{\frac{n(n+1)}{2} - 1 + 0,1\nu\tau + n\rho} G \int_0^1 \cdots \int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_n \cdots d\alpha_1 +$$
$$+ (8np^{1-\rho})^{2b(k+h)}; \quad T_1 = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i (c_{n+1}x^{n+1} + \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}, \tag{2}$$

причем G, как показывают дальнейшие рассуждения указанной работы (также сохраняющие силу), можно заменить максимумом числа значений $y = 0, \ldots, Y-1$, удовлетворяющих при выбранном из этих значений y_0 условиям ($D_1 = 1!$, $D_2 = 1!\,2!$, $D_3 = 1!\,2!\,3!, \ldots$)

$$(D_{n-s+2}\, smc_s\,(y-y_0)) < D_{n-s+2}\,(2n)^{n-1}\, p^{-s+1}; \qquad s = n+1, \ldots, 2.$$

Но легко находим

$$D_{n-s+2}\,(2n)^n \leqslant D_n\,(2n)^n < n^{0,5n^2}, \quad D_{n-s+2}\, s < n^{0,5n^2}, \quad n^{n^2} < p^{0,05\nu\tau},$$

$$\frac{D_{n-s+2}\, sma_s\,(y-y_0)}{q_s} = D_{n-s+2}\, smc_s\,(y-y_0) - \frac{\theta_s D_{n-s+2}\, sm\,(y-y_0)}{q_s p}.$$

Расстояние правой части последнего неравенства до ближайшего целого числа должно быть меньше, чем

$$D_{n-s+2}\,(2n)^{n-1}\, p^{-s+1} + \frac{D_{n-s+2}\, smY}{q_s p} < \frac{n^{0,5n^2}\,(q_s p^{-1} + mYp^{-1})}{q_s} <$$

$$< \frac{n^{0,5n^2}\,(p^{-0,1\nu} + p^{-0,05\nu\tau})}{q_s} < \frac{1}{q_s}.$$

Но левая часть указанного неравенства — рациональная дробь со знаменателем q_s. Следовательно, $D_{n-s+2}\, sma_s\,(y-y_0)$ должно делиться на q_s. Отсюда выводим, что $D_n\,(n+1)!\, m\,(y-y_0)$ делится на каждое из чисел $q_{n+1}, \ldots, q_2$ и, таким образом, делится и на Q. Но

$$D_n\,(n+1)! < n^{0,5n^2}, \quad D_n\,(n+1)!\, m < p^{0,1\nu\tau}.$$

Следовательно,

$$G \leqslant \left[\frac{Y}{p^{\tau-0,1\nu\tau}} + 1\right] \leqslant 2p^{1-\tau}.$$

Применяя это неравенство, а также неравенство леммы 3, из (2) выводим

$$|S|^{2b(k+h)} < 2\cdot 2^{2b(k+h)}\,(8n)^{bk(k+2h)+\frac{1}{6}nbk}\, p^{2b(k+h)-\tau+0,1\nu\tau+n\rho+\frac{n(n+1)}{2}\sigma} +$$

$$+ (8np^{1-\rho})^{2b(k+h)}.$$

Но здесь имеем

$$\frac{\tau - 0,1\nu\tau - n\rho - \frac{n(n+1)}{2}\sigma}{2b(k+h)} > \frac{\tau - 0,145\nu\tau - \frac{\tau}{6(1+\nu)}}{2b(k+h)} >$$

$$> \frac{\frac{5}{6}\tau}{\left(\frac{5}{2}n+1\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\ln\frac{3(n+1)^2}{\tau}+\frac{4}{3}\right)} > \rho,$$

$$\frac{\frac{2}{6} - \frac{2}{6}b(k+h) + bk(k+2h) + \frac{1}{6}nbk}{2b(k+h)} < \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(k+h) + \frac{1}{12}n =$$

$$= \frac{1}{2}\left(k + \frac{7}{6}n + \frac{7}{3}\right) < \frac{1}{2}nl.$$

Поэтому

$$|S|^{2b(k+h)} < \frac{1}{2}\left((8n)^{0,5nl}\, p^{1-\rho}\right)^{2b(k+h)} + (8np^{1-\rho})^{2b(k+h)}, \quad |S| < (8n)^{0,5nl}\, p^{1-\rho}.$$

ЛЕММА 4. *Пусть*

$$I=\int_0^1 e^{2\pi i\varphi(x)}\,dx;$$

$$\varphi(x)=u_nx^n+\cdots+u_1x,$$

где $u_n,\ldots,u_1$ — *вещественные и* u_0 *обозначает наибольшее из чисел* $|u_n|,\ldots,|u_1|$. *Тогда имеем*

$$|I|\leqslant\min(1;\,18^n u_0^{-\nu}).$$

Доказательство. Полагая $\varphi(x)=v$, мы можем весь интервал $0\leqslant x\leqslant 1$ интегрирования подразделить на $\leqslant 2n-2$ интервалов, в каждом из которых функция $\varphi'(x)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Пусть $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ — один из таких интервалов, $v_1=\varphi(x_1)$, $v_2=\varphi(x_2)$. Достаточно ограничиться случаем, когда $\varphi'(x)$ — возрастающая неотрицательная функция в указанном интервале. Имеем:

$$I=U+iV;\quad U=\int_{v_1}^{v_2}\cos 2\pi v\,\frac{dv}{\varphi'(x)},\quad V=\int_{v_1}^{v_2}\sin 2\pi v\,\frac{dv}{\varphi'(x)},$$

где $\varphi'(x)$ рассматривается как функция от v. Интервал $v_1\leqslant v\leqslant v_2$ при помощи лежащих внутри него чисел вида $l+0{,}5$, где l — целое число, можно подразделить на ряд интервалов длиною $\leqslant 1$, в соответствии с чем интеграл U представится в виде знакопеременного ряда, откуда будет следовать, что при некоторых v_0 и δ с условиями $v_1\leqslant v_0<v_0+\delta\leqslant v_2$, $\delta\leqslant 1$, будем иметь

$$|U|\leqslant\int_{v_0}^{v_0+\delta}\frac{dv}{\varphi'(x)}\leqslant\int_{v_1}^{v_1+\delta}\frac{dv}{\varphi'(x)}=\psi(v_1+\delta)-\psi(v_1)=x'-x_1,$$

где $x=\psi(v)$ — функция, обратная функции $v=\varphi(x)$, и $x'=\psi(v_1+\delta)$. Пользуясь значениями функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x_1),\ \varphi(x_1+t),\ \ldots,\ \varphi(x_1+(n-1)t),\ \varphi(x');\qquad t=\frac{x'-x_1}{n},$$

и полагая s равным одному из чисел $1,\ldots,n$ при $\Delta x=t$, составим разность $\Delta^s\varphi(x_1)$. Так как указанные значения функции $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_1)\leqslant\delta\leqslant 1$, то имеем

$$|\Delta^s\varphi(x_1)|\leqslant 2^s.$$

С другой стороны, имеем

$$\Delta^s\varphi(x_1)=t^s\Delta^sO^s\,\frac{\varphi^{(s)}(x_1)}{s!}+t^{s+1}\Delta^sO^{s+1}\,\frac{\varphi^{(s+1)}(x_1)}{(s+1)!}+\cdots+t^n\Delta^sO^n\,\frac{\varphi^{(n)}(x_1)}{n!},$$

что, ввиду

$$\frac{\varphi^{(j)}(x_1)}{j!}=\binom{n}{j}x_1^{n-j}u_n+\binom{n-1}{j}x_1^{n-j-1}u_{n-1}+\cdots+\binom{j+1}{j}x_1u_{j+1}+u_j,$$

можно представить в форме

$$\Delta^s\varphi(x_1) = H_s u_s + H_{s+1}u_{s+1} + \cdots + H_n u_n;$$

$$H_r = \binom{r}{s} x_1^{r-s} t^s \Delta^s O^s + \binom{r}{s+1} x_1^{r-s-1} t^{s+1} \Delta^s O^{s+1} + \cdots +$$

$$+ \binom{r}{r-1} x_1 t^{r-1} \Delta^s O^{r-1} + \binom{r}{r} t^r \Delta^s O^r.$$

Но, очевидно, $\Delta^s O^s = s!$, а при $s < m$ имеем

$$\Delta^s O^m = s^m - \binom{s}{1}(s-1)^m + \binom{s}{2}(s-2)^m + \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{1} 1^m < 2^{s-1}s^m,$$

откуда следует, что

$$H_r < \binom{r}{s} t^s s! + \binom{r}{r+1} t^{s+1} 2^{s-1} s^{s+1} +$$

$$+ \binom{r}{r+2} t^{s+2} 2^{s-1} s^{s+2} + \cdots + \binom{r}{r} t^r 2^{s-1} s^r,$$

где в правой части имеется $r - s + 1 \leqslant r \leqslant n$ слагаемых, каждое из которых $\leqslant 2^{s-1} n^s s^s (s!)^{-1} t^s$. Поэтому

$$H_r \leqslant \frac{2^{s-1} n^{s+1} s^s t^s}{s!}, \quad \frac{H_r}{H_s} \leqslant \frac{2^{s-1} n^{s+1} s^s}{s^{2s} e^{-2s}\, 2\pi s} = \left(\frac{2ne^2}{s}\right)^{s+1} \frac{1}{8\pi e^2}.$$

Наибольшее значение последнее выражение имеет при $s = n$. Поэтому

$$\frac{H_r}{H_s} < \frac{1}{8\pi e^2}(2e^2)^{n+1} = \frac{1}{4\pi}(2e^2)^n < \frac{1}{12{,}5}(2e^2)^n$$

и вместе с тем

$$\Delta^s\varphi(x_1) = s!\, t^s \left(u_s + \frac{\theta}{12{,}5}(2e^2)^n (|u_{s+1}| + \cdots + |u_n|)\right).$$

Пусть s_0 — наибольшее целое s с условиями

$$|u_s| \geqslant 1, \quad |u_s| \geqslant C(|u_{s+1}| + \cdots + |u_n|); \quad C = \frac{2}{12{,}5}(2e^2)^n.$$

Тогда имеем

$$|u_{s_0}|\, s_0!\, t^{s_0} \leqslant 2^{s_0+1}, \quad t \leqslant \left(\frac{2^{s_0+1}}{s_0!}\right)^{\frac{1}{s_0}} |u_{s_0}|^{-\frac{1}{s_0}} < 4|u_{s_0}|^{-\nu}.$$

Но, очевидно, все $|u_{s_0+1}|, \ldots, |u_n|$ меньше чем $|u_{s_0}|$. Кроме того, имеем

$$|u_{s_0-1}| \leqslant C(|u_{s_0}| + \cdots + |u_n|) \leqslant C|u_{s_0}|\left(1 + \frac{1}{C}\right) = (C+1)|u_{s_0}|,$$

$$|u_{s_0-2}| \leqslant C\left((C+1)|u_{s_0}| + |u_{s_0}|\left(1 + \frac{1}{C}\right)\right) = (C+1)^2|u_{s_0}|,$$

$$|u_{s_0-3}| \leqslant C\left((C+1)^2|u_{s_0}| + (C+1)|u_{s_0}| + |u_{s_0}|\left(1 + \frac{1}{C}\right)\right) = (C+1)^3|u_{s_0}|,$$

. . . .

$$|u_1| \leqslant (C+1)^{s_0-1}|u_{s_0}|.$$

При этом при любом $s = 1, \ldots, n$ имеем

$$|I| < 4n|u_{s_0}|^{-\nu} < 4n(C+1)^{(s_0-1)\nu}|u_s|^{-\nu} < 4n\left(\frac{2}{12{,}5}(2e^2)^n + 1\right)|u_s|^{-\nu}.$$

ЛЕММА 5. *Пусть M и M_1 — целые, $M < M_1$, и в интервале $M \leqslant x \leqslant M_1$ задана дважды дифференцируемая вещественная функция $f(x)$ с условием, что $f'(x)$ монотонна и*

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда, беря одновременно знаки + или же знаки —, имеем

$$\sum_{x=M}^{M_1} e^{\pm 2\pi i f(x)} = \int_M^{M_1} e^{\pm 2\pi i f(x)}\, dx + 2\theta.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 13 моей книги [1] с незначительным видоизменением формулировки. Именно, условие $f''(x) \geqslant 0$ заменено теперь условием монотонности $f'(x)$, что не меняет доказательства леммы.

ЛЕММА 6. *Пусть p — целое положительное, r — целое положительное и каждое $\beta_1, \ldots, \beta_r$ имеет одно из значений $1, -1$. Тогда, каковы бы ни были целые $l_n, \ldots, l_1$, число V решений системы*

$$\begin{aligned} \beta_1 x_1^n + \cdots + \beta_n x_r^n &= l_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r &= l_1, \end{aligned}$$

когда $x_1, \ldots, x_r$ независимо друг от друга пробегают значения $1, \ldots, p$, не превосходит интеграла

$$V_0 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^r\, d\alpha_n \ldots d\alpha_1; \quad S = \sum_{x=1} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}.$$

Доказательство. Эта лемма есть следствие тождества

$$V = \int_0^1 \cdots \int_0^1 S_1 \ldots S_r e^{-2\pi i(\alpha_n l_n + \cdots + \alpha_1 l_1)}\, d\alpha_n \ldots d\alpha_1;$$

$$S_l = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \beta_l (\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}.$$

ЛЕММА 7. *Пусть $n \geqslant 12$, r — целое, $r \geqslant r_0$,*

$$r_0 = [6{,}5 n^2 \ln 12 n^2].$$

Тогда для интеграла

$$V_0 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^r\, d\alpha_n \ldots d\alpha_1; \quad S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)},$$

имеет место неравенство

$$V_0 \leqslant (8n)^{4{,}3 n^2 (\ln 12 n^2)^2} p^{\,r - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Доказательство. Ограничимся лишь случаем $r = r_0$, так как к этому случаю тривиально сводится и случай $r > r_0$. Положим

$$W = 3n(n+1); \quad k = \left[\frac{\ln W}{-\ln(1-\nu)} + 1\right].$$

Сначала рассмотрим случай

$$p > (2n)^{Wk}.$$

Пусть $\tau_1 = p^{\frac{1}{3}}$, $\tau_s = p^{s-\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}}$ при $s = n, \ldots, 2$. Интервал $0 < \alpha_s \leqslant 1$ интегрирования по α_s мы заменим интервалом

$$-\frac{1}{\tau_s} < \alpha_s < 1 - \frac{1}{\tau_s}.$$

Всякое α_s последнего интервала можно представить в форме

$$\alpha_s = \frac{a_s}{q_s} + z, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant \tau_s, \quad -\frac{1}{q_s\tau_s} < z_s \leqslant \frac{1}{q_s\tau_s}. \qquad (3)$$

Пусть $E\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right)$ обозначает часть интеграла V_0, отвечающую области n-мерного пространства, содержащей точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ с условиями (3). Пусть Q обозначает общее наименьшее кратное чисел $q_n, \ldots, q_2$. Положим

$$V_1 = \sum E\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right),$$

где суммирование распространяется лишь на слагаемые с условием, что $Q \leqslant p^{\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}}$ и что при любом $s = n, \ldots, 2, 1$ имеем $-\frac{1}{\tau_s} < \frac{a_s}{q_s} \leqslant 1 - \frac{1}{\tau_s}$. Часть интеграла V_0, отвечающую области, точки которой не входят ни в одну из областей интегрирования слагаемых суммы V_1, обозначим символом V_2. Имеем (области интегрирования слагаемых суммы V_1 могут перекрываться)

$$V_0 = V_1 + V_2.$$

Сначала оценим V_2. Находим

$$V_2 \leqslant (\max|S|)^{r-2b(k+h)} H; \quad H = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2b(k+h)} \, d\alpha_n \ldots d\alpha_1.$$

К оценке $|S|$ применим теоремы 2 и 3, беря в них $n-1$ вместо n и полагая $m = 1$. Возможны три случая:

1. Среди чисел $q_n, \ldots, q_2$ по крайней мере одно удовлетворяет условию

$$p^{s-1} < q_s \leqslant p^{s-\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}}.$$

2. Среди чисел $q_n, \ldots, q_2$ по крайней мере одно удовлетворяет условию

$$p < q_s \leqslant p^{s-1}.$$

3. Все $q_n, \ldots, q_2$ не превосходят p, но $Q > p^{\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}}$. Во всех этих случаях можно положить

$$|S| < (8n)^{0,5n(n-1)l} p^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}}{3(n-1)nl}, \quad l = \ln \frac{12n^2}{\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}}.$$

откуда следует, что

$$|S| < (8n)^{0,5n \ln 36n^2} p^{1-\rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{1}{9n^2 \ln 36n^2}.$$

Кроме того, согласно лемме 3, находим ($c = 0$)

$$H < (8n)^{bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right)} p^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{6}}.$$

Следовательно,

$$V_2 < (8n)^{(r-2b(k+h))\, 0,5n \ln 36n^2 + bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right)} p^{r-(r-2b(k+h))\rho_0 + \frac{1}{6} - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Но имеем

$$(r - 2b(k+h))\rho_0 > \frac{6,5n^2 \ln 12n^2 - 1 - \left(\frac{5}{2}n+1\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\ln 3n(n+1) + \frac{30}{23}\right)}{9n^2 \ln 36n^2} >$$

$$> \frac{6,5n^2 \ln 12n^2 - 2,5n^2 \ln 12n^2}{9n^2 \ln 36n^2} > \frac{1}{3}, \quad -(r-2b(k+h))\rho_0 + \frac{1}{6} < 0.$$

Далее, находим

$$r - 2b(k+h) < 6,5n^2 \ln 12n^2 - \left(\frac{5}{2}n - \frac{1}{2}\right)\left(\left(n-\frac{2}{3}\right)\ln 3n(n+1) + n + 2\right) <$$

$$< 6,5n^2 \ln 12n^2 - 2,5n^2\left(1 - \frac{13}{15}\nu\right)(\ln 12n^2 - 0,16) < 4,24n^2 \ln 12n^2.$$

$$bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right) < \left(\frac{5}{4}n + \frac{1}{2}\right)\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln 3n(n+1) + 1\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln 3n(n+1) + \frac{13}{6}n + 5\right) <$$

$$< \frac{5}{4}n^3(\ln 12n^2 - 1,2)(\ln 12n^2 + 1,1) < \frac{5}{4}n^3(\ln 12n^2)^2.$$

Следовательно,

$$V_2 < (8n)^{(0,5n \ln 36n^2)(4,24n^2 \ln 12n^2) + \frac{5}{4}n^3(\ln 12n^2)^2} p^{r - \frac{n(n+1)}{2}} <$$

$$< (8n)^{3,7n^3(\ln 12n^2)^2} p^{r - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Теперь оценим V_1. Сначала рассмотрим какое-либо одно $E\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right)$. Введем подстановку $x = Q_1\xi + \eta$, где Q_1 — общее наименьшее кратное чисел Q и q_1, η пробегает значения $1, \ldots, Q_1$, а ξ при заданном η пробегает целые числа интервала

$$-\frac{\eta}{Q_1} < \xi \leqslant \frac{p-\eta}{Q_1}. \tag{4}$$

Тогда сумма S примет вид

$$S \quad \sum_{\eta} L_\eta e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}\eta^n + \cdots + \frac{a_1}{q_1}\eta\right)};$$

$$L_\eta = \sum_{\xi} e^{2\pi i \psi(\xi)}; \quad \psi(\xi) = z_n(Q_1\xi+\eta)^n + \cdots + z_1(Q_1\xi+\eta).$$

Но имеем

$$\psi'(\xi) = (nz_n(Q_1\xi+\eta)^{n-1} + \cdots + z_1)Q_1,$$

что численно

$$\leqslant \left(\frac{np^{n-1}}{p^{n-\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}}} + \cdots + \frac{2p}{p^{2-\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}}} + \frac{1}{q_1 p^{\frac{1}{3}}} \right) Qq_1 <$$

$$< \frac{(n-1)(n+2)}{2} p^{-\frac{\nu}{3}} + p^{-\frac{\nu}{6}} < \frac{1}{2}.$$

Кроме того, $\psi'(\xi)$ — многочлен степени $n-1$ и, следовательно, весь интервал (4) можно подразделить на $\leqslant 2n-2$ интервала, в каждом из которых $\psi'(\xi)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Применяя к каждому из этих интервалов лемму 5, получим

$$L_\eta = \int\limits_{-\eta Q_1^{-1}}^{(p-\eta) Q_1^{-1}} e^{2\pi i \psi(\xi)}\, d\xi + \theta' 6n = \frac{1}{Q_1} \int\limits_0^p e^{2\pi i (z_n x^n + \cdots + z_1 x)}\, dx + \theta 6n.$$

Вместе с тем найдем

$$S = B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \int\limits_0^p e^{2\pi i (z_n x^n + \cdots + z_1 x)}\, dx + \theta 6n Q_1; \tag{5}$$

$$B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) = \frac{1}{Q_1} \sum_{\eta=1}^{Q_1} e^{2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n}\eta^n + \cdots + \frac{a_1}{q_1}\eta\right)}.$$

Следует отметить при этом, что $B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right)$ может не быть равным нулю только в случае, когда q_1 — делитель числа Q. Действительно, если q_1 не делит Q, то, полагая $Q_1 = dQ$, будем иметь $d > 1$. Вводя, далее, подстановку $\eta = Qt + s$, где s пробегает значения $1, \ldots, Q$, а t при данном s пробегает значения $0, \ldots, d-1$, получим

$$B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) = \sum_s \sum_t e^{2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} s^n + \cdots + \frac{a_1}{q_1} s + \frac{a_1 Q}{q_1} t\right)} = 0.$$

Далее, находим

$$E\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) = \int\limits_{-(q_n\tau_n)^{-1}}^{(q_n\tau_n)^{-1}} \cdots \int\limits_{-(q_1\tau_1)^{-1}}^{(q_1\tau_1)^{-1}} |S|^r\, dz_n \ldots dz_1 =$$

$$= 2^n \int\limits_0^{(q_n\tau_n)^{-1}} \cdots \int\limits_0^{(q_1\tau_1)^{-1}} |S|^r\, dz_n \ldots dz_1,$$

причем из (5) следует

$$|S|^r \leqslant 2^{r-1} \left| B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right|^r \left(\int\limits_0^p e^{2\pi i (z_n x^n + \cdots + z_1 x)}\, dx \right)^r + 2^{r-1} 6^r n^r Q_1^r.$$

Вводя здесь подстановку $x=pv$ и затем подстановки $p^n z_n = u_n, \ldots,$ $\ldots, pz_1=u_1$, получим

$$E\left(\frac{a_n}{q_n},\ldots,\frac{a_1}{q_1}\right)\leqslant 2^{r+n-1}p^{r-\frac{n(n+1)}{2}}\left|B\left(\frac{a_n}{q_n},\ldots,\frac{a_1}{q_1}\right)\right|^r \int\limits_0^{p^n(q_n\tau_n)^{-1}}\cdots$$

$$\cdots\int\limits_0^{p(q_1\tau_1)^{-1}}|R|^r\,du_n\ldots du_1+\frac{2^{r+n-1}6^r n^r Q_1{}^r}{q_n\ldots q_1\tau_n\ldots\tau_1};\quad R=\int\limits_0^1 e^{2\pi i(u_nv^n+\cdots+u_1v)}dv. \tag{6}$$

Далее, находим

$$V_1\leqslant V_1'+V_1'',$$

где V_1' — сумма первых, а V_1'' — сумма вторых слагаемых правой части неравенства (6); суммирование распространяется на все системы $\left(\frac{a_n}{q_n},\ldots,\frac{a_1}{q_1}\right)$ с указанными в определении V_1 ограничениями.

Сначала оценим V_1''. Очевидно, a_s при данном q_s пробегает $\leqslant q_s$ значений. Далее, каждое $q_n,\ldots,q_2$ пробегает $\leqslant p^{\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}}$ значений, а q_1 пробегает $\leqslant p^{\frac{1}{3}}$ значений. Поэтому

$$V_1''<\frac{2^{r+n-1}6^r n^r Q_1{}^r p^{\left(\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}\right)(n-1)+\frac{1}{3}}}{\tau_n\ldots\tau_1}<\frac{\left(12{,}1np^{\frac{2}{3}-\frac{\nu}{6}}\right)^r p^{\left(\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}\right)(n-1)+\frac{1}{3}}}{p^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}\right)(n-1)+\frac{1}{3}}}<$$

$$<p^{r\left(\frac{2}{3}-\frac{\nu}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{\nu}{3}\right)(n-1)}<p^{r-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Теперь оценим V_1'. Применяя лемму 4, находим

$$\int\limits_0^{p^n(q_n\tau_n)^{-1}}\cdots\int\limits_0^{p(q_1\tau_1)^{-1}}|R|^r\,du_n\ldots du_1<$$

$$<\int\limits_0^{p^{\frac{1}{3}}}\cdots\int\limits_0^{p^{\frac{1}{3}}}\int\limits_0^{p^{\frac{2}{3}}}(\min(1;\ 18^n u_0^{-\nu}))^r\,du_n\ldots du_2\,du_1,$$

где u_0 — наибольшее из чисел $u_n,\ldots,u_1$. Но

$$(\min(1;\ 18^n u_0^{-\nu}))^r=\min(1;\ 18^{nr}u_0^{-\nu r})=(\min(1;\ 18u_0^{-\nu^2 r}))^n\leqslant$$
$$\leqslant\min(1;\ 18^r u_n^{-\nu^2 r})\ldots\min(1;\ 18^r u_1^{-\nu^2 r}).$$

Следовательно, последний кратный интеграл будет

$$<\left(\int\limits_0^{\infty}\min(1;\ 18^r u^{-\nu^2 r})\,du\right)^n=\left(1+\frac{18^r}{\nu^2 r-1}\right)^n<18^{rn}2^{-n}$$

и вместе с тем

$$V_1' < 18^{rn} 2^r p^{r - \frac{n(n+1)}{2}} \sum \left| B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right|^n <$$

$$< 20^{rn} p^{r - \frac{n(n+1)}{2}} \sum \left| B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right|^n.$$

Далее, имеем

$$\sum \left| B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right|^r = \sum_{Q \leqslant p^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{6}}} U(Q); \quad U(Q) = \sum_Q \left| B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right|^r,$$

где сумма $\sum_Q$ распространяется на слагаемые с условием, что общее наименьшее кратное всех $q_n, \ldots, q_2$ равно Q, причем q_1 является делителем числа Q.

Пусть сначала $Q > (2n)^{Wk}$. Находим

$$U(Q) \leqslant \left(\max \left| B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right| \right)^{r - 2b(k+h)} \sum_Q \left| B\left(\frac{a_n}{b_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right|^{2b(k+h)}.$$

Но, согласно теореме 3, имеем (берем $n-1$ вместо n и полагаем $m=1$)

$$\left| B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right| < (8n)^{0,5n \ln 12n^2} Q^{-\frac{1}{3(n-1)\, n \ln 12n^2}}.$$

Далее, находим

$$\sum_Q \left| B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) \right|^{2b(k+h)} \leqslant Q^{-2b(k+h)} \sum_{b_n=0}^{Q-1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{b_1=0}^{Q-1} \left| \sum_{x=1}^{Q} e^{2\pi i \left(\frac{b_n}{Q} x^n + \cdots + \frac{b_1}{Q} x\right)} \right|^{2b(k+h)} =$$

$$= Q^{-2b(k+h)} M; \quad M = \sum_{b_n=0}^{Q-1} \cdots \sum_{b_1=0}^{Q-1} \sum_{(X_n, \ldots, X_1)} e^{2\pi i \left(\frac{b_n}{Q} X_n + \cdots + \frac{b_1}{Q} X_1\right)},$$

где каждое X_s пробегает лишь целые числа с условием

$$-b(k+h) Q^s \leqslant X_s \leqslant b(k+h) Q^s,$$

причем, каковы бы ни были целые числа $l_n, \ldots, l_1$, число решений системы $X_n = l_n, \ldots, X_1 = l_1$, согласно леммам 6 и 3, будет

$$< (8n)^{bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right)} Q^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{6}}.$$

Очевидно, M равно умноженному на Q^n числу систем $(X_n, \ldots, X_1)$, образованных числами, одновременно кратными Q. Поэтому

$$M \leqslant Q^n \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{2b(k+h) Q^s}{Q} + 1 \right) (8n)^{bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right)} Q^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{6}} <$$

$$< (2b(k+h)+1)^n (8n)^{bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right)} Q^{2b(k+h) + \frac{1}{6}} <$$

$$< (8n)^{bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right) + \frac{7}{3} n} Q^{2b(k+h) + \frac{1}{6}}.$$

Из доказанного следует:

$$U(Q) < (8n)^{0,5\,(r-2b\,(k+h))\, n \ln 12n^2 + bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right)+\frac{7}{3}n} Q^{-\frac{r-2b\,(k+h)}{3\,(n-1)\, n \ln 12n^2}+\frac{1}{6}}.$$

Но из доказанного при оценке V_2 следует:

$$4n^2 \ln 12n^2 < r - 2b\,(k+h) < 4{,}24 n^2 \ln 12n^2,$$

$$bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right)+\frac{7}{3}n < \frac{5}{4}n^3 (\ln 12n^2 - 1{,}2)\,(\ln 12n^2 + 1{,}1) + \\ + \frac{7}{3}n < \frac{5}{4}n^3 (\ln 12n^2)^2.$$

Поэтому

$$U(Q) < (8n)^{3{,}37n^3 (\ln 12n^2)} Q^{-\frac{7}{6}}.$$

При $Q \leqslant (2n)^{Wk}$ это неравенство тривиально. Далее, находим

$$\sum_{Q < p^{\frac{1}{3}-\frac{\nu}{6}}} U(Q) < 7\,(8n)^{3{,}37n^3 (\ln 12n^2)^2},$$

$$V_1' < 20^{rn} 7\,(8n)^{3{,}37n^3 (\ln 12n^2)^2} p^{r-\frac{n\,(n+1)}{2}} < \\ < (8n)^{4{,}25n^3 (\ln 12n^2)^2} p^{r-\frac{n\,(n+1)}{2}}.$$

$$V_0 \leqslant V_1' + V_1'' + V_2 < \left((8n)^{4{,}25n^3 (\ln 12n^2)^2} + 1 + (8n)^{3{,}7n^3 (\ln 12n^2)^2}\right) p^{r-\frac{n\,(n+1)}{2}} < \\ < (8n)^{4{,}3n^3 (\ln 12n^2)^2} p^{r-\frac{n\,(n+1)}{2}}$$

Теперь рассмотрим случай, когда

$$(2n)^{38n \ln (3n^2+3n)} < p \leqslant (2n)^{3n^2 (n+1) \ln (3n^2+3n)}$$

(здесь правая граница, очевидно, $> (2n)^{Wk}$). Положим

$$W_0 = \frac{\ln p}{n \ln (2n)\,(3n^2+3n)}.$$

Тогда найдем

$$W_0 \leqslant \frac{3n^2 (n+1) \ln (3n^2+3n) \ln (2n)}{n \ln (2n) \ln (3n^2+3n)} = 3n\,(n+1),$$

$$W_0 > \frac{38n \ln (3n^2+3n) \ln (2n)}{n \ln (2n) \ln (3n^2+3n)} = 38.$$

Кроме того, полагая

$$k_0 = \left[\frac{\ln W_0}{-\ln (1-\nu)} + 1\right],$$

получим

$$(2n)^{W_0 k_0} < (2n)^{nW_0 \ln W_0} \leqslant (2n)^{\frac{\ln p \ln (3n^2+3n)}{\ln (2n) \ln (3n^2+3n)}} = p.$$

Поэтому можно применить лемму 3, заменив в ней W на W_0 и k на k_0 (положив $c=0$). Найдем:

$$V_0 \leqslant p^{r-2b(k_0+h)} \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S|^{2b(k_0+h)} d\alpha_n \ldots d\alpha_1 <$$

$$< (8n)^{bk_0\left(k_0+2h+\frac{n}{6}\right)} p^{r-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2W_0}} \leqslant$$

$$\leqslant (8n)^{bk_0\left(k_0+2h+\frac{n}{6}\right)} (2n)^{\frac{n^2(n+1)}{2}\ln(3n^2+3n)} p^{r-\frac{n(n+1)}{2}},$$

откуда, ввиду

$$bk_0\left(k_0+2h+\frac{n}{6}\right) \leqslant bk\left(k+2h+\frac{n}{6}\right) < \frac{5}{4} n^3 (\ln 12n^2)^2,$$

$$\frac{n^2(n+1)}{2} \ln (3n^2+3n) < \frac{1}{2} n^3 \ln 12n^2,$$

уже легко убедимся в справедливости нашей леммы для рассматриваемого случая.

Наконец, в случае

$$p \leqslant (2n)^{38n \ln (3n^2+3n)}$$

имеем

$$V_0 \leqslant p^r \leqslant (2n)^{\frac{n(n+1)}{2} 38n \ln (3n^2+3n)} p^{r-\frac{n(n+1)}{2}},$$

откуда убедимся в справедливости нашей леммы и для этого случая.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $n \geqslant 12$, *m и p — целые положительные,* $c_n, \ldots, c_1$ — *вещественные,* $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x$,

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i m f(x)},$$

s — одно из чисел $n, \ldots, 2$,

$$c_s = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 < q < p^s.$$

Тогда, полагая

$$q = p^{\tau} \quad \textit{в случае } 1 < q \leqslant p,$$
$$q = p^{s-\tau} \quad \textit{в случае } p^{s-1} < q < p^s,$$

соответственно этим случаям будем иметь

$$|S| < (8n)^{0,665n \ln 12n^2} m^{\frac{2\rho}{\tau}} p^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{\tau}{6,6n^2 \ln 12n^2}.$$

Замечание. В случае $p < q \leqslant p^{s-1}$ для разыскания верхней границы для $|S|$ следует пользоваться теоремой 2.

Доказательство. Мы рассмотрим лишь случай

$$p \geqslant (2n)^{4n^3 (\ln 12n^2)^2},$$

так как в противном случае теорема тривиальна. Пусть

$$r = [6{,}5n^2 \ln 12n^2], \quad Y = [p^{1-\rho}].$$

Повторим рассуждения доказательства теоремы моей статьи (2), заменяя в нем прежнее значение ρ, прежнее выражение для $f(x)$ и прежнее неравенство для p новыми и беря r вместо $2b(k+h)$. Тогда найдем

$$|S|^r \leqslant 2^r \left(p^{\frac{n(n+1)}{2} - \tau + (n+1)\rho} n^{n^2} m \int_0^1 \ldots \int_0^1 |T_1|^r d\alpha_n \ldots d\alpha_1 + (4np^{1-\rho})^r\right);$$

$$T_1 = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)},$$

откуда, применяя лемму 7, найдем

$$|S|^r < 2^r n^{n^2} (8n)^{4,3n^3 (\ln 12n^2)^2} m p^{r-\tau+(n+1)\rho} + (8np^{1-\rho})^r.$$

Но имеем

$$2 \cdot 2^r n^{n^2} (8n)^{4,3n^3 (\ln 12n^2)^2} < (8n)^{4,32n^3 (\ln 12n^2)^2} < (8n)^{0,665rn \ln 12n^2},$$

$$\frac{\tau - (n+1)\rho}{r} > \frac{0{,}998\tau}{r} > \rho, \quad \frac{1}{r} < \frac{2\rho}{\tau},$$

откуда и убедимся в справедливости нашей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $n \geqslant 12$, m *и* p — *целые положительные*, $c_n, \ldots, c_1$ — *вещественные*, $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x$,

$$S = \sum^{p} e^{2\pi i f(x)}.$$

Каждое $c_n, \ldots, c_2$ *представим (что всегда возможно) в форме*

$$c_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s p}; \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant p.$$

Тогда, обозначая буквою Q *общее наименьшее кратное чисел* $q_n, \ldots, q_2$ *и полагая*

$$Q = p^\tau \text{ в случае } Q \leqslant p,$$

для этого случая при $m \leqslant p^{0,05\nu\tau}$ *будем иметь*

$$|S| < (8n)^{0,665n \ln 12n^2} p^{1-\rho};$$

$$\rho = \frac{\tau}{6{,}6n(n+1)\ln 12n^2}.$$

Замечание. В случае $Q > p$ для разыскания верхней границы для $|S|$ следует пользоваться теоремою 3.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда по крайней мере одно из чисел $q_n, \ldots, q_2$ удовлетворяет условию $q_s > p^{1-0,1\nu}$. Полагая $q = p^{\tau_0}$, согласно теореме 4, будем иметь

$$|S| < (8n)^{0,665n \ln 12n^2} m^{\frac{2\rho_0}{\tau_0}} p^{1-\rho_0};$$

$$\rho_0 = \frac{\tau_0}{6,6n^2 \ln 12n}.$$

Но здесь имеем

$$0,05\nu\tau \frac{2\rho_0}{\tau_0} - \rho_0 < (0,11\nu - 1)\rho_0 \leqslant$$

$$\leqslant (0,11\nu - 1)\frac{\tau(1-0,1\nu)}{6,6n^2 \ln 12n^2} < -\rho,$$

откуда и следует справедливость нашей теоремы для рассматриваемого случая.

Далее, рассмотрим случай, когда каждое из чисел $q_n, \ldots, q_2$ не превосходит $p^{1-0,1\nu}$. Мы рассмотрим лишь случай

$$p \geqslant (8n)^{0,665n\rho^{-1} \ln 12n^2},$$

так как в противном случае теорема тривиальна.

Пусть

$$r = [6,5n^2 \ln 12n^2], \quad Y = [p^{1-0,1\nu\tau}].$$

Повторим рассуждения доказательства теоремы моей статьи (²), заменяя в нем прежнее значение ρ, прежнее выражение для $f(x)$ и прежнее неравенство для p новыми и беря r вместо $2b(k+h)$. Тогда формула (9) указанной статьи примет вид

$$|S|^r < 2^r \left(p^{\frac{n(n+1)}{2} - 1 + 0,1\nu\tau + n\rho} G \int_0^1 \ldots \int_0^1 |T_1|^r d\alpha_n \ldots d\alpha_1 + (4np^{1-\rho})^r\right),$$

причем G можно заменить максимумом числа значений $y = 0, \ldots, Y-1$, удовлетворяющих при выбранном одном из них y_0 условиям ($D_1 = 1!$, $D_2 = 1!\,2!$, $D_3 = 1!\,2!\,3!, \ldots$)

$$(D_{n-s+2}\, smc_s(y - y_0)) < D_{n-s+2}(2n)^{n-1} p^{-s+1};$$
$$s = n, \ldots, 2.$$

Отсюда, подобно тому как при доказательстве теоремы 3, убедимся, что

$$G < 2p^{1-\tau}.$$

Применяя это неравенство, а также лемму 7, находим

$$|S|^r < 2 \cdot 2^r (8n)^{4,3n^3 (\ln 12n^2)^2} p^{r-\tau+0,1\nu\tau+n\rho} + (8np^{1-\rho})^r.$$

Но имеем

$$\frac{\tau - 0,1\nu\tau - n\rho}{r} > \frac{(1 - 0,121\nu)\,\tau}{6,5n^2 \ln 12n^2} > \rho,$$

$$4 \cdot 2^r (8n)^{4,3n^3 (\ln 12n^2)^2} < (8n)^{0,665rn \ln 12n^2},$$

откуда и следует справедливость нашей теоремы.

Поступило
8.I.1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, т. XXIII, 1947.

[2] Виноградов И. М., Верхняя граница модуля тригонометрической суммы, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 199—214.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 131—152

Н. П. РОМАНОВ

ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Часть вторая

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Здесь рассматриваются приложения общих построений, развитых в первой части этой работы ([1]), к конкретным вопросам теории чисел и теории ортогональных систем.

В первой части этой работы доказывалось, что если последовательность элементов пространства Гильберта обладает D_g-свойством, т. е. для нее $(f_n, f_m) = g((n, m))$, где (m, n) — общий наибольший делитель m и n, а $g(t)$ — данная функция от целого аргумента, то последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$, где $\gamma_n = \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, будет ортогональной.

Кроме того, если

$$(\gamma_n, \gamma_n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = G(n) > 0,$$

то $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ образуют, очевидно, ортонормированную последовательность.

Настоящий параграф посвящен построению примеров последовательностей, обладающих D-свойством для случая, когда гильбертово пространство конкретизировано как пространство всех функций, определенных в данной области Δ, с суммируемым по Лебегу квадратом модуля.

Эти последовательности интересны как материал для построения ортонормированных последовательностей. Все возникающие при этом ортонормированные последовательности являются новыми, обладающими свойственным теоретико-числовым функциям «прыгающим» характером поведения.

Укажем два метода построения систем, обладающих D-свойством.

а) Первый метод. Первый пример последовательности, обладающей, согласно принятой здесь терминологии, D-свойством, а также первый пример приложения такой системы к теории чисел был дан Франэлем в его теореме о числах Фарея [см. ([2]), стр. 170]. В указанном месте доказывается, что

$$\int_0^1 f_n(x) f_m(x)\, dx = (n, m)^2,$$

если

$$f_n(x) = \sqrt{12}\, n \left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right).$$

Эту формулу, а также вытекающие из нее арифметические следствия можно существенно обобщить.

Рассмотрим любую вещественную функцию $F(x)$, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$F(mx) = m^{s-1} \sum_{k=0}^{m-1} F\left(x + \frac{k}{m}\right). \tag{1}$$

Тогда, очевидно, тому же уравнению будет удовлетворять и $\Phi(x) = F(x - [x])$:

$$\Phi(mx) = m^{s-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(x + \frac{k}{m}\right). \tag{2}$$

В самом деле, (2) верно при $0 \leqslant x < \frac{1}{m}$, так как тогда оно совпадает с (1), но обе части равенства (2) имеют период, равный $\frac{1}{m}$ и, следовательно, (2) верно при любом x. Предполагая, что $\Phi(x)$ есть функция с суммируемым по Лебегу в интервале (0,1) квадратом модуля, вычислим $\int_0^1 \Phi(mx)\,\Phi(nx)\,dx$.

Рассмотрим сначала случай $n = 1$; тогда

$$\int_0^1 \Phi(mx)\,\Phi(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \Phi(mx)\,\Phi(x)\,dx.$$

Производя в каждом члене замену переменных $x = \frac{k}{m} + t$ и учитывая периодичность $\Phi(x)$ и (2), получаем:

$$\int_0^1 \Phi(mx)\,\Phi(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{m}} \Phi(mt) \sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(t + \frac{k}{m}\right) dt$$

$$= m^{1-s} \int_0^{\frac{1}{m}} \Phi(mt)^2\,dt = m^{-s} \int_0^1 \Phi(t)^2\,dt = Cm^{-s},$$

где

$$C = \int_0^1 \Phi(t)^2\,dt.$$

Рассмотрим случай $(n, m) = 1$. Аналогично предыдущему, здесь

$$\int_0^1 \Phi(mx)\Phi(nx)\,dx = \int_0^{\frac{1}{m}} \Phi(mt) \sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(nt + \frac{nk}{m}\right) dt$$

или, учитывая, что вместе с k nk также пробегает полную систему вычетов по модулю m и поэтому, вследствие периодичности $\Phi(x)$,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(nt + \frac{nk}{m}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(nt + \frac{k}{m}\right) = m^{1-s}\Phi(mnt),$$

имеем

$$\int_0^1 \Phi(mx)\Phi(nx)\,dx = m^{1-s}\int_0^{\frac{1}{m}} \Phi(mt)\Phi(mnt)\,dt =$$

$$= m^{-s}\int_0^1 \Phi(t)\Phi(nt)\,dt = C\,(mn)^{-s}.$$

В случае любых m, n введем обозначения:

$$(m, n) = D, \quad n = n'D, \quad m = m'D.$$

Тогда

$$(m', n') = 1, \quad \int_0^1 \Phi(m'Dx)\Phi(n'Dx)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \Phi(m'x)\Phi(n'x)\,dx = C\,(m'n')^{-s} = C\,\frac{D^{2s}}{m^s n^s}.$$

Отсюда получаем следующую теорему:

Если вещественная функция $F(x)$ с суммируемым по Лебегу квадратом удовлетворяет соотношению (1), *то*

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{C}}\, n^s F(nx - [nx]),$$

где $C = \int_0^1 F(x)^2\,dx$ *обладают* D_g*-свойством со значением* $g(t) = t^{2s}$, *или, иными словами,*

$$\int_0^1 f_n(x) f_m(x)\,dx = (n, m)^{2s}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C\varphi_{2s}(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^s F(dx - [dx])$$

образуют в этом случае ортонормированную систему пространства $L^2(0,1)$.

Пример A_1. Простейшим примером функции, удовлетворяющей соотношению (1) со значением $s = 1$, является

$$F(x) = -\log(2|\sin \pi x|),$$

в чем можно убедиться, пользуясь тождеством:

$$\sin \pi m x = 2^{m-1} \prod_{k=0}^{m-1} \sin\left(\pi x + \frac{\pi k}{n}\right).$$

Здесь

$$C = \int_0^1 (\log 2|\sin \pi x|)^2 dx = \frac{\pi^2}{12},$$

поэтому

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi} n \log(2|\sin \pi n x|)$$

удовлетворяют соотношению

$$(f_n, f_m) = (n, m)^2$$

и, следовательно,

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d \log(2|\sin \pi d x|) \tag{4}$$

образуют ортонормированную систему пространства $L^2(0,1)$.

Пример A_2. Известно [см. (3), стр. 21], что полиномы Бернулли удовлетворяют соотношению

$$B_k(mx) = m^{k-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_k\left(x + \frac{s}{m}\right). \tag{5}$$

Известно также (см. там же, стр. 31), что

$$\int_0^1 B_k(x) B_l(x) dx = (-1)^{l+1} \frac{k! l!}{(k+l)!} B_{k+l}, \tag{6}$$

откуда

$$\int_0^1 B_k(x)^2 dx = \frac{k!^2}{(2k)!} |B_{2k}|.$$

Согласно предыдущему, отсюда следует, что

$$\psi_{n;k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{k!^2}{(2k)!}|B_{2k}|\varphi_{2k}(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k B_k(dx - [dx]) \tag{7}$$

образуют ортонормированную систему пространства $L^2(0,1)$. Эта система указана мною в работе (4). Можно показать, что если $k \not\equiv l \pmod 2$, то функции

$$\begin{matrix} 1, \psi_{1;k}, \psi_{2;k}, \ldots \\ \psi_{1;l}, \psi_{2;l}, \ldots \end{matrix} \tag{8}$$

образуют полную ортонормированную систему $L^2(0,1)$.

Из полноты этой системы следует для любых $f(x)$ и $g(x)$:

$$(f, g) = (f, 1)(g, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_{n;k})(g, \psi_{n;k}) + \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_{n;l})(g, \psi_{n;l}), \tag{9}$$

откуда можно получить много тождеств теоретико-числового характера. Пользуясь примером A_1, легко доказать, что последовательность $f_1^*(x)$, $f_2^*(x)$, $f_3^*(x)$, ..., где

$$f_n^*(x) = \frac{\sqrt{24}\, n}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\log|\sin(2n \operatorname{arc\,tg} x)|}{1 + xi},$$

удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{\infty} f^*_m(x) f^*_n(x)\, dx = (m, n)^2.$$

Легко видеть также, что

$$\sin(2n \operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} Q_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

где $Q_n(t)$ — полином, определяемый соотношением:

$$\sin 2n\varphi = \sin\varphi\, Q_n(\cos\varphi),$$

откуда

$$f_n^*(x) = \frac{\sqrt{24}}{\pi^{\frac{3}{2}}} n \frac{\log\left|Q_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right| + \log\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + xi}.$$

Также легко видеть, что

$$F_n(x) = \frac{\sqrt{24}}{\pi^{\frac{3}{2}}} n \frac{\log|Q_n(x)| + \log 2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[4]{1-x^2}}$$

удовлетворяют соотношению

$$\int_0^1 F_n(x) F_m(x)\, dx = (n, m)^2.$$

Из теоремы 2 первой части этой работы следует, что

$$\psi_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d^*(x)$$

и

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F_d(x)$$

образуют ортонормированные системы пространств $L^2(0, \infty)$ и $L^2(0,1)$ соответственно.

б) Второй метод. Второй метод построения последовательностей, обладающих D-свойством, отличается от первого большей общностью и обладает тем преимуществом, что каждый раз выясняется то подпро-

странство, на котором система будет полной. Этот способ дается непосредственно теоремой 3 первой части этой работы.

Смысл теоремы состоит в том, что если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ образуют ортонормированную систему некоторого функционального гильбертова пространства и $\omega(n)$ — мультипликативная функция со сходящейся суммой квадратов модулей, то

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k) \alpha_{kn}(x)$$

образуют последовательность, обладающую D_g-свойством со значением $g(t) = |\omega(t)|^{-2}$, полную на линейной замкнутой оболочке последовательности $\alpha_n(x)$. Здесь

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2 .$$

Теоремы первой части работы показывают, что $\psi_n(x)$, определяемые формулами

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d(x),$$

где

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) |\omega(d)|^{-2} = |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2,$$

образуют ортонормированную систему, эквивалентную системе $\alpha_n(x)$. Наша задача — выбрать $\alpha_n(x)$ и $\omega(k)$ таким образом, чтобы суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega(k) \alpha_{kn}$ можно было представить в наиболее простой форме. Для случая $L^2(0,1)$ легко указать пример такого выбора, так как известно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^{2r}}$ и $\sum \frac{\sin 2\pi nx}{n^{2r+1}}$ могут быть просто выражены через полиномы Бернулли. Отсюда вновь легко можно получить пример A_2, причем делается очевидным, на основании теорем 4 и 5 первой части, что система $\psi_{n;\,k}(x)$ при k четном эквивалентна системе $\sqrt{2} \cos 2\pi nx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, а при k нечетном эквивалентна системе $\sqrt{2} \sin 2\pi nx$. Две функциональные системы мы называем эквивалентными, если их линейные замкнутые оболочки совпадают. Отсюда, учитывая теорему о полноте тригонометрической системы, легко видеть, что система

$$\psi_{1;\,k},\ \psi_{2;\,k},\ \psi_{3;\,k}, \ldots$$

1

$$\psi_{1;\,l},\ \psi_{2;\,l},\ \psi_{3;\,l}, \ldots$$

есть полная система пространства $L^2(0,1)$, если $k \equiv l \pmod 2$. Случай

$$\alpha_n(x) = \sqrt{2} \cos 2\pi nx, \quad \omega(n) = \frac{1}{n}$$

дает снова пример A_1, причем становится очевидным, что ортонормированная последовательность

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi\sqrt{\varphi_2(n)}} \log \left| \prod_{d/n} (2\sin \pi dx)^{d\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \right|$$

эквивалентна последовательности $\cos 2\pi nx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

В случае, если те же последовательности косинусов или синусов перенумеруем иначе, получим другие примеры. Например, полагая

$$\omega(n) = \frac{1}{n}, \quad \alpha_n(x) = -\sqrt{2}\sin 2\pi(n+n_0)x,$$

получим

$$f_n(x) = -\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin 2\pi(n_0+nk) = \frac{n\sqrt{12}}{\pi}\sin 2\pi n_0 x \log|2\sin \pi nx| +$$
$$+ n\sqrt{12}\cos(2\pi n_0 x)\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi\sqrt{\varphi_2(n)}}\sin 2\pi n_0 x \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) d\log|2\sin 2\pi dx| +$$
$$+ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\cos 2\pi n_0 x \sum \mu\left(\frac{n}{d}\right) d\left(dx - [dx] - \frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

образуют ортонормированную систему, эквивалентную системе

$$\sin 2\pi(n_0+1)x, \ \sin 2\pi(n_0+2)x, \ldots,$$

все функции которой ортогональны к $\sqrt{2}\sin 2\pi kx$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n_0)$ и образуют вместе с последними ортонормированную систему, полную на пространстве всех синусов (всех функций $f(x)$, удовлетворяющих почти всюду условию $f(x) = -f(1-x)$).

Так же можно получить ортонормированную систему

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi\sqrt{\varphi_2(n)}}\cos 2\pi n_0 x \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) d\log|2\sin \pi dx| -$$
$$- \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sin 2\pi n_0 x \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) d\left(dx - [dx] - \frac{1}{2}\right). \tag{11}$$

Ортонормированные системы формул (10) и (11) вместе с конечной системой 1, $\sqrt{2}\sin 2\pi kx$, $\sqrt{2}\cos 2\pi kx$ $(k = 1, 2, \ldots, n_0)$ образуют полную ортонормированную систему $L^2(0, 1)$.

Легко получить разложения в ряды Фурье для различных ортонормированных систем, полученных выше. Пользуясь формулой Куммера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{\pi n}\sin 2\pi nx = \log\Gamma(x-[x]) + \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)(C + \log 2 + \log \pi) -$$
$$- \frac{1}{2}\log \pi + \frac{1}{2}\log|\sin \pi x|, \tag{12}$$

легко получить разложение

$$\gamma(x)=\sqrt{12}\log\Gamma(x-[x])+\left(C+\log 2+\log\pi+\frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right)\psi_1(x)-$$
$$-\sqrt{3}\log\pi+\sqrt{3}\log|\sin\pi x|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\psi_n(x), \qquad (13)$$

где

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum\mu\left(\frac{n}{d}\right)d\left(dx-[dx]-\frac{1}{2}\right),$$

$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта.

Вопрос о том, будет ли ряд Фурье (13), сходящийся к $\gamma(x)$ в смысле метрики гильбертова пространства, сходиться в обычном смысле, мною не решен.

В первой части работы доказывается, что последовательность

$$f_n=\frac{\overline{\omega(n)}^{-1}}{\sqrt{\sigma}}\sum_{\substack{k=1\\(k,\,N)=1}}^{\infty}\omega(k)\alpha_{kn},$$

где

$$\omega(ab)=\omega(a)\omega(b),\qquad \sigma=\sum_{\substack{k=1\\(k,\,N)=1}}^{\infty}|\omega(k)|^2,$$

система $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ортонормирована, обладает свойством: $(f_n, f_m)=g(n, m)$, если $(n, N)=1$, $(m, N)=1$, причем $g(t)=|\omega(t)|^{-2}$. Ввиду того, что соотношение $(f_n, f_m)=g(m, n)$ выполняется не всегда, а только для m и n, взаимно простых с данным N, его можно назвать ограниченным D_g-свойством.

Легко показать, что

$$\psi_n=G(n)^{-\frac{1}{2}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f_d \quad \left(G(n)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)\right),$$

где n пробегает все числа, взаимно простые с N, образуют ортонормированную систему, эквивалентную системе α_n, где n пробегает все значения, взаимно простые с N.

Доказательство этих положений совершенно аналогично доказательству теорем 4 и 5 первой части. Так как α_n с номерами, не взаимно простыми с N, не участвуют в построении ψ_n, то можно взять в качестве α_n любую ортонормированную систему, снабдив все ее элементы только индексами, взаимно простыми с N. Если даны α_n со всеми номерами, то, подразумевая под q любое число, не имеющее ни одного простого делителя, не входящего в N, вводим обозначения:

$$f_n^{(q)}=\frac{\overline{\omega(n)}^{-1}}{\sqrt{\sigma}}\sum_{\substack{k=1\\(k,\,N)=1}}^{\infty}\omega(k)\alpha_{knq},\quad \psi_n^{(q)}=G(n)^{-\frac{1}{2}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f_d^{(q)},$$
$$(n, N)=1,\quad \sigma=\sum_{(k,\,N)=1}|\omega(k)|^2.$$

Тогда, очевидно, $\psi_n^{(q)}$, где n пробегает все значения, взаимно простые с N, а q — все числа, простые делители которых входят в N, образуют ортонормированную систему, эквивалентную $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Здесь в качестве $\omega(n)$ можно взять $\frac{\chi(n)}{n^z}$, $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$, где χ — характер Дирихле по модулю N.

Легко найти конечное выражение для сумм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{2p}} \cos 2\pi nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{2p+1}} \sin 2\pi nx,$$

где χ — характер Дирихле по модулю N.

В самом деле, обозначая $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n^k}$ через $F_k(x)$ и учитывая соотношения:

$$\sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} \sin 2\pi n \left(x + \frac{l}{N}\right) = \frac{1}{2} N \sin 2\pi nx,$$

если $n \equiv \pm a \pmod N$, и

$$\sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} \sin 2\pi n \left(x + \frac{l}{N}\right) = 0,$$

если $n \equiv \pm a \pmod N$, имеем при $N > 2$, $(a, N) = 1$

$$2 \frac{\chi(a)}{N} \sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} F_k\left(x + \frac{l}{N}\right) = \sum_{n \equiv a \pmod N} \frac{\chi(n)}{n^k} \sin 2\pi nx +$$
$$+ \sum_{n \equiv -a} \frac{\chi(-n)}{n^k} \sin 2\pi nx.$$

В случае $\chi(-1) = 1$ получим

$$2 \frac{\chi(a)}{N} \sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} F_k\left(x + \frac{l}{N}\right) = \sum_{n \equiv a \pmod N} \frac{\chi(n)}{n^k} \sin 2\pi nx +$$
$$+ \sum_{n \equiv -a \pmod N} \frac{\chi(n)}{n^k} \sin 2\pi nx.$$

Суммируя по всем $a = 1, 2, \ldots, N$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^k} \sin 2\pi nx = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \chi(a) \cos 2\pi \frac{al}{N} F_k\left(x + \frac{l}{N}\right). \tag{14}$$

В случае $\chi(-1) = -1$ пользуемся соотношением:

$$\sum_{l=1}^{M} \cos 2\pi \frac{al}{N} \cos 2\pi n \left(x + \frac{l}{N}\right) = \begin{cases} +\frac{1}{2} N \cos 2\pi nx, & \text{если } n \equiv a \pmod N, \\ +\frac{1}{2} N \cos 2\pi nx, & \text{если } n \equiv -a \pmod N, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv \pm a \pmod N. \end{cases}$$

Если же

$$F_k^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^k}, \quad \chi(-1)=+1, \quad N>2,$$

то имеем, аналогично,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^k}\cos 2\pi nx=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{a=1}^{N}\chi(a)\cos 2\pi\frac{al}{N}F_k^*\left(x+\frac{l}{N}\right). \tag{15}$$

Вводя сокращенные обозначения:

$$C(N,\chi,l)=\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}\chi(a)\cos 2\pi\frac{al}{N},$$

$$S(N,\chi,l)=\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}\chi(a)\sin 2\pi\frac{al}{N}$$

и учитывая формулы (14) и (15) и то, что

$$\sigma=\sum_{(n,N)=1}^{\infty}|\omega(n)|^2=\sum_{(n,N)=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\prod_{p/N}\left(1-\frac{1}{p^{2k}}\right)\zeta(2k)=N^{-2k}\varphi_{2k}(N)\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}|B_{2k}|,$$

получим

$$f_n(x)=\sqrt{2}\frac{\overline{\omega(n)}^{-1}}{\sqrt{\sigma}}\sum\frac{\chi(m)}{m^k}\sin 2\pi mnx=$$

$$=\left(\frac{k!^2}{2k}|B_{2k}|\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{N^k n^k}{\sqrt{\varphi_{2k}(N)}}\chi(n)\sum_{l=1}^{N}C(N,\chi,l)B_k\left(nx+\frac{l}{N}-\left[nx+\frac{l}{N}\right]\right),$$

если $k\equiv 1 \pmod 2$, $\chi(-1)=1$. В случае четного k

$$F_k^*(x)=\sum\frac{\cos 2\pi mx}{m^k}=\pm\frac{(2\pi)^k}{2k!}B_k(x-[x]),$$

$$f_n(x)=\sqrt{2}\frac{\overline{\omega(n)}^{-1}}{\sqrt{\sigma}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^k}\cos 2\pi mx=\sqrt{2}\frac{n^k\chi(n)N^k}{\sqrt{\sigma\varphi_{2k}(N)}}\sum_{l=1}^{N}C(N,\chi,l)F_k^*\left(x+\frac{l}{N}\right).$$

Поэтому

$$f_n(x)=\left(\frac{k!^2}{(2k)!}|B_{2k}|\varphi_{2k}(N)\right)^{-\frac{1}{2}}N^k n^k\chi(n)\cdot$$

$$\cdot\sum_{l=1}^{N}C(N,\chi,l)B_k\left(nx+\frac{l}{N}-\left[nx+\frac{l}{N}\right]\right)$$

удовлетворяют соотношению $(f_m,f_n)=g((m,n))=(m,n)^{2k}$ при условии $(n,N)=1$, $(m,N)=1$, $\chi(-1)=1$ как при четном, так и при нечетном k. Отсюда следует предложение: *если $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1)=1$, $N>2$ и*

$$C(N,\chi,l)=\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}\cos 2\pi\frac{al}{N}\chi(l),$$

то

$$\psi_{n;\,k}^{(q)}(x) = N^k \left(\frac{k!^2}{(2k)!}\,|B_{2k}|\,\varphi_{2k}(Nn)\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{N} C(N,\ \chi,\ l) \cdot$$
$$\cdot \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k \widetilde{B}_k\left(dqx + \frac{l}{N}\right)\chi(d), \qquad (16)$$

где n пробегает все числа, взаимно простые с N, а q пробегает все числа, не содержащие простых чисел, не входящих в N, образуют ортонормированную систему пространства $L^2(0,1)$, *эквивалентную системе* $\cos 2\pi mx$, *если k четно, и системе* $\sin 2\pi mx$ $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, *если k нечетно.*

Здесь $\widetilde{B}_k(x)$ означает $B_k(x - [x])$.

Точно так же в случае $\chi(-1) = -1$ имеем ортонормированную систему

$$\widetilde{\psi}_{n;\,k}^{(q)}(x,\ \chi) = N^k \left(\frac{k!^2}{(2k)!}\,|B_{2k}|\,\varphi_{2k}(Nn)\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{N} S(N,\ \chi,\ l) \cdot$$
$$\cdot \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k \widetilde{B}_k\left(dqx + \frac{l}{N}\right)\chi(d), \qquad (17)$$

где n и q пробегают указанные числовые множества, и

$$S(N,\ \chi,\ l) = \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N} \sin 2\pi \frac{al}{N}\,\chi(l).$$

Эта система будет эквивалентна системе синусов, если k четно, и системе косинусов, если k нечетно.

Доказательство этого предложения аналогично предыдущему и легко следует из тригонометрических тождеств:

$$\sum_{l=1}^{N} \sin 2\pi \frac{al}{N} \sin 2\pi n\left(x + \frac{l}{N}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} N \cos 2\pi nx, & \text{если } n \equiv a \pmod N, \\ -\frac{1}{2} N \cos 2\pi nx, & \text{если } n \equiv -a \pmod N, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv \pm a \pmod N, \end{cases}$$

$$\sum_{l=1}^{N} \sin 2\pi \frac{al}{N} \cos 2\pi n\left(x + \frac{l}{N}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} N \sin 2\pi nx, & \text{если } n \equiv a \pmod N, \\ \frac{1}{2} N \sin 2\pi nx, & \text{если } n \equiv -a \pmod N, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv \pm a \pmod N. \end{cases}$$

В случае главного характера χ_0 по модулю N выражение для $\psi_{n;\,k}^{(q)}(x,\ \chi_0)$ значительно упрощается.

Можно воспользоваться, например, формулой (6) статьи ([1]):

$$f_n^{(q)} = \omega(n)^{-1} \sum_{d/n} \mu(d)\,\omega(d)\,L_{nqd} f^*,$$

где $f^* = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m)\,\alpha_m$, L_m — изометрический оператор гильбертова пространства, определяемый равенством

$$L_m \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \alpha_\mu = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \alpha_{m\mu},$$

означающий в нашем случае умножение аргумента периодической функции на m.

В нашем случае $\omega(n) = \frac{1}{n^k}$, $\alpha_n(x) = \sqrt{2}\cos 2\pi n x$, если k четно, $\alpha_n(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi n x$, если k нечетно,

$$f^* = f^*(x) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{(2\pi)^k}{k!} B_k(x - [x]),$$

откуда

$$f_n^{(q)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} n^k \sum_{D/N} \mu(D) D^{-k} B_k(Dqnx - [Dqnx]), \qquad \sigma = \sum_{(n,\, N)=1} \frac{1}{n^{2k}}$$

(в обозначениях для $f_n^{(q)}$ из первой части множитель $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ опущен).

Соответствующая ортонормированная система будет

$$\psi_{n;\,k}^{(q)}(\chi_0; x) = \left(\frac{(2k)!}{k!} \,|\, B_{2k} \,|\, \varphi_{2k} \,|\, (Nn)\right)^{-\frac{1}{2}} N^k \cdot$$

$$\cdot \sum_{d/n} \sum_{D/N} \mu(D) D^{-k} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k B_k(Ddqx - [Ddqx]), \tag{18}$$

где n пробегает все числа, взаимно простые с N, q — все числа, не содержащие иных простых множителей, кроме тех, которые входят в N. Очевидно, что

$$1, \psi_{n;\,k}^{(q)}(\chi_0; x), \psi_{0:\,l}^{(q)}(\chi_0; x),$$

где $k \not\equiv l \pmod 2$, n, q изменяются указанным образом, образуют полную ортонормированную систему $L^2(0,1)$. Кроме того, легко видеть, что $\psi_{n;\,k}^{(q)}(\chi_0; x)$ выражаются через ортонормированные системы примера A_2 следующим образом:

$$\psi_{n;\,k}^{(q)}(\chi_0; x) = \frac{N^k}{\sqrt{\varphi_{2k}(N)}} \sum_{D/N} \mu(D) D^{-k} \psi_{n;\,k}(Dqx). \tag{19}$$

Ясно, что

$$1, \psi_{n;\,k}^{(q)}(\chi_1; x), \psi_{n;\,l}^{(q)}(\chi_2; x),$$

если $k \not\equiv l \pmod 2$, $\chi_1(-1) = \chi_2(-1) = 1$, а также

$$1, \tilde{\psi}_{n;\,k}^{(q)}(\chi_1; x), \psi_{n;\,l}^{(q)}(\chi_2; x),$$

если $\chi_1(-1) = -1$, $\chi_2(-1) = 1$, $k \equiv l \pmod 2$, и

$$1, \psi_{n;\,k}^{(q)}(\chi_1; x), \tilde{\psi}_{n;\,l}^{(q)}(\chi_2; x),$$

если $\chi_1(-1) = \chi_2(-1) = -1$, $k \not\equiv l \pmod 2$, образуют ортонормированную полную систему пространства $L^2(0, 1)$, если χ_1, χ_2 — любые характеры по модулю N, n и q изменяются указанным выше образом.

Другую группу примеров получим, интерпретируя гильбертово пространство как совокупность всех комплексных функций двух аргументов x, y с суммируемым квадратом модуля на единичном круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Это

пространство обозначим через $L^2(K)$. В качестве ортонормированной системы α_n возьмем

$$\alpha_n(x, y) = \left\{2\pi\int_0^1 |f_n(r)|^2 r^{2n+1}\,dr\right\}^{-\frac{1}{2}} f_n(r)\,z^n, \quad z = x + iy, \quad r = |z|,$$

где $f_n(r)$ — последовательность функций, определенных в интервале (0,1). В самом деле, ортогональность $f_n(|z|)\,z^n$ очевидна, так как

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f_n(r)\,\overline{f}_m(r)\,z^n\overline{z}^m\,dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} f_n(r)\,\overline{f}_m(r)\,r^{n+m+1}e^{i(n-m)\varphi}dr\,d\varphi = 0,$$

если $n \neq m$. Значение нормирующего множителя вычисляется непосредственно.

Пример A_3. Полагая $f_n(r) = (-\log r)^{s-\frac{1}{2}} r^{-1}$, где $\mathrm{Re}(s) > 0$, имеем

$$\alpha_n(x, y) = \{2\pi n^{2\sigma}\Gamma(2\sigma)\}^{-\frac{1}{2}}\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^{s-\frac{1}{2}}\frac{z^n}{|z|}, \tag{20}$$

где $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$. Отсюда следует:

$$f_n(z) = n^\sigma \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_{nm}(z)}{m^\sigma} = \{2\pi\Gamma(2\sigma)\}^{-\frac{1}{2}} n^{2\sigma}\frac{\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^{s-\frac{1}{2}}}{|z|}\cdot\frac{z^n}{1-z^n}. \tag{21}$$

Соответствующая ортонормированная система $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z), \ldots$ определяется формулой

$$(\psi_n z) = \{2\pi\Gamma(2\sigma)\,\varphi_{2\sigma}(n)\}^{-\frac{1}{2}}(-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}}|z|^{-1}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d^{2\sigma}z^d}{1-z^d}. \tag{22}$$

Для случая $\omega(n) = n^{-\sigma-1}$ (пример A_4)

$$f_n(z) =$$
$$= -n^{\sigma+1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_{mn}(z)}{m^{\sigma+1}} = \{2\pi\,\Gamma(2\sigma)\}^{-\frac{1}{2}} n^{2\sigma+2}(-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}}\log(1-z^n)|z|^{-1}.$$

Соответствующая ортонормированная система будет

$$\psi_n(z) = \{2\pi\Gamma(2\sigma)\,\varphi_{2\sigma+2}(n)\}^{-\frac{1}{2}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^{2\sigma+2}\log(1-z^d)\frac{(-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}}}{|z|}. \tag{23}$$

Указанные два примера дают системы, для которых $1, \psi_n(z), \psi_n(\overline{z})$ образуют полную ортонормированную систему. Из предыдущего следует: *логарифмы многочленов*

$$Q_k(z) = \prod_{d/n}(1-z^d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^k}$$

ортогональны на единичном круге $|z| \leqslant 1$, *если скалярное произведение дано формулой*

$$(f, g) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(z)\,\overline{g(z)}\,|z|^{-2}(-\log|z|)^{k-3}\,dx\,dy.$$

Из общих соображений первой части и из теоремы о полноте системы $1, z, z^2, \ldots, \overline{z}, \overline{z^2}, \overline{z^3}, \ldots$ следует полнота системы $1, \frac{z^n}{1-z^n}, \frac{\overline{z^n}}{1-\overline{z^n}}$ для пространства Гильберта, где (f, g) определено формулой:

$$(f, g) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} f(z)\overline{g(z)}\,|z|^{-2}(-\log|z|)^{2\sigma-1}dx\,dy, \qquad \sigma > -\frac{1}{2}.$$

Легко построить пример последовательности функций на единичном круге с ограниченным D-свойством:

$$(f_n, f_m) = g(m, n),$$

если

$$(n, N) = 1, \quad (m, N) = 1.$$

Для этого достаточно взять $\alpha_n(x, y)$, как в примере A_3, и $\omega(n) = \frac{\chi(n)}{n^s}$, $\sigma > \frac{1}{2}$; тогда получим

$$f_n(z) = \frac{N^\sigma n^{2\sigma}}{\sqrt{2\pi\Gamma(2\sigma)\zeta(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(N)}} \cdot \frac{(-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}}}{|z|} \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m)\, z^{mn} =$$

$$= \frac{N^\sigma n^{2\sigma}}{\sqrt{2\pi\Gamma(2\sigma)\zeta(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(N)}} \frac{(-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}}}{(1-z^{Nn})|z|} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)\, z^{kn},$$

где $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N. Легко найти $f_n^{(q)}(z)$ и соответствующую ортонормированную систему.

Пример A_4. Для пространства функций, определенных на единичной окружности со скалярным умножением

$$(f, g) = \int\limits_0^{2\pi} f(e^{iD})\overline{g(e^{iD})}\,dD$$

простейшим примером ортонормированной последовательности будет $\alpha_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}$. Отсюда $\left(\omega(n) = \frac{1}{n}\right)$ получаем пример последовательности

$$f_n(z) = \frac{n\sqrt{3}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \log(1 - z^n),$$

обладающей D-свойством, и пример последовательности, ортонормированной на единичной окружности:

$$\psi_n(z) = \frac{\sqrt{3}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d \log(1 - z^d). \tag{24}$$

Конечно, здесь z означает $e^{i\varphi}$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, и рассматриваемое пространство есть $L_2(0, 2\pi)$, но по многим причинам оказывается целесообразным изучать функции $\psi_n(z)$ при всех значениях z.

Так, например, можно использовать теорию вычетов при вычислении коэффициентов Фурье

$$\oint f(z)\,\psi_n(\overline{z})\,\frac{dz}{iz}=\oint f(z)\,\psi_n\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{iz},$$

где первоначальный путь интегрирования по единичной окружности может быть заменен другим, если $f(z)$ голоморфна внутри единичного круга. Так как между кругами $|z|\leqslant 1$ и $|z|\leqslant\rho<1$ $\psi_n(z)$ однозначны и голоморфны, то интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,\psi_n(z^{-1})\,\frac{dz}{iz}$$

равен интегралу

$$\oint\limits_{|z|=R} f(z)\,\psi_n(z^{-1})\,\frac{dz}{iz},$$

если $f(z)$ можно продолжить в кольцо $1\leqslant|z|\leqslant R$ как однозначную аналитическую функцию. Очевидно, (24) можно записать в форме

$$\psi_n(z)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi^3\varphi_2(n)}}\log Q_n=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi^3\varphi_2(n)}}\sum_{d/n} d\varphi\left(\frac{n}{d}\right)\log P_d(z), \tag{25}$$

где

$$Q_n(z)=\prod_{d/n}(1-z^d)^{d\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

— полином порядка $\varphi_2(n)$.

Очевидно,

$$Q_n(z)=\prod_{d/n} P_d(z)^{d\varphi\left(\frac{n}{d}\right)},$$

где $P_m(z)$ — полином деления окружности.

Согласно принципу обращения Мебиуса, из (24) следует

$$n\log(1-z^n)=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\sum_{d/n}\sqrt{\varphi_2(d)}\,\psi_d(z). \tag{26}$$

Пример. Интересный пример ортонормированной системы получим, взяв в качестве $\alpha_n(x)$ в теореме 3 первой части ортонормированные в интервале (0,1) функции Лагерра

$$\alpha_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\,e^{\frac{x}{2}}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^{n-1}e^{-x}).$$

Известно (см., например, ([5]) и ([6])), что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)\,t^k=\frac{t}{1-t}\,e^{-\frac{x}{2}\cdot\frac{1+t}{1-t}}, \tag{27}$$

где $|t|<1$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{kn}(x)\,t^{kn}=\frac{1}{n}\sum_{\omega(n)}\frac{\omega t}{1-\omega t}\,e^{-\frac{x}{2}\frac{1+t}{1-t}}, \tag{28}$$

где $\sum\limits_{\omega(n)}$ означает, что ω пробегает все корни n-й степени из единицы. Известно, что

$$\int\limits_0^1 (-\log t)^{s-1} t^{n-1}\, dt = \frac{\Gamma(s)}{n^s},$$

откуда

$$F_n(x) = \bar{n}^s \sum \frac{\alpha_{kn}}{k^s} = \frac{n^{2\sigma-1}}{\Gamma(s)} \sum_{\omega(n)} \int\limits_0^1 \frac{\omega}{1-\omega t} e^{-\frac{x}{2}\frac{1+\omega t}{1-\omega t}} (-\log t)^{s-1}\, dt, \quad (29)$$

$$\mathrm{Re}(s) = \sigma > \frac{1}{2}.$$

Нетрудно доказать, что ряд $\bar{n}^s \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}(x)}{k^s}$ действительно сходится к

$$\frac{n^{2\sigma-1}}{\Gamma(s)} \sum_{\omega(n)} \int\limits_0^{\infty} \frac{\omega}{1-\omega t} e^{-\frac{x}{2}\frac{1+\omega t}{1-\omega t}} (-\log t)^{s-1}\, dt$$

по метрике гильбертова пространства $L^2(0, \infty)$.

Для этого, в силу полноты последовательности $\alpha_n(x)$, достаточно вычислить коэффициенты Фурье (F_n, α_k) и показать, что они совпадают с коэффициентами ряда $\bar{n}^s \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}}{k^s}$. Очевидно, что

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\zeta(2\sigma)}} F_n(x)$$

удовлетворяют соотношению

$$\int\limits_0^{\infty} f_n(x) \overline{f_m(x)}\, dx = (n, m)^{2\sigma}$$

и поэтому

$$\psi_n(x) = \Gamma(s)^{-1} \{\zeta(2\sigma) \varphi_{2\sigma}(n)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{2\sigma-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\omega(d)} \int\limits_0^1 \frac{\omega}{1-\omega t} e^{-\frac{x}{2}\frac{1+\omega t}{1-\omega t}} (-\log t)^{s-1}\, dt \quad (30)$$

образуют полную ортонормированную систему пространства $L^2(0, \infty)$, как следует из теорем 4 и 5 первой части и из теоремы о полноте системы функций Лагерра.

Ввиду известных оценок $\alpha_n(x) = O(n^{-\frac{1}{4}})$ (см. ([6]), а также ([9]), стр. 171) ряд $\sum \frac{\alpha_{kn}}{k^s}$, сходящийся по норме гильбертова пространства $L^2(0, \infty)$ при $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, сходится и в обычном смысле слова при $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{4}$.

Ортонормированная в интервале $(-1, 1)$ последовательность

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

где

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

— полином Лежандра, дает возможность построить последовательность $\Phi_1(x)$, $\Phi_3(x)$, $\Phi_5(x)$, ..., представляющую собой полную на $L^2(-1, 1)$ систему функций, удовлетворяющую условиям

$$\int_{-1}^{1} \Phi_n(x)\overline{\Phi_m(x)}\,dx = (n, m)^{2\sigma+1}$$

при любых нечетных n, m (при четном n $\Phi_n(x)$ не определены).

В самом деле, вводя обозначения

$$\alpha_{2k+1}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)$$

и учитывая известную формулу

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

имеем

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,2)=1}}^{\infty} t^k \frac{\alpha_k(x)}{\sqrt{k}} = \frac{t}{\sqrt{2(1-t^2x+t^4)}}, \tag{31}$$

а также

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,2)=1}}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}(x)}{\sqrt{k}}\,t^{kn} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{\omega(n)} \frac{t\omega}{\sqrt{1-t^2x\omega^2+t^4\omega^4}} \tag{32}$$

откуда следует

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,2)=1}}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}(x)}{(kn)^{s+\frac{1}{2}}} = \frac{n^{-1}}{\sqrt{2}\,\Gamma(s)} \sum_{\omega(n)} \int_0^1 \frac{\omega(-\log t)^{s-1}}{\sqrt{1-t^2x\omega^2+t^4\omega^4}}\,dt$$

или

$$\Phi_n(x) = \frac{n^{2\sigma}}{\sqrt{2}\,\Gamma(s)} \sum_{\omega(n)} \int_0^1 \frac{\omega(-\log t)^{s-1}\,dt}{\sqrt{1-t^2x\omega^2+t^4\omega^4}}.$$

Здесь всюду n — нечетное число, $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 0$. Легко получить выражение для соответствующей ортонормированной системы. В частности, при $s = 1$ получим полную ортонормированную систему пространства $L^2(-1, 1)$:

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varphi_3(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2 \sum_{\omega(d)} \int_0^{\omega} \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2x+t^4}}, \tag{33}$$

где n принимает все нечетные значения, $\omega(d)$ означает, что ω пробегает все корни d-й степени из единицы.

Легко дать примеры пар последовательностей, обладающих относительным D-свойством, и построить из них биортогональные пары последовательностей, пользуясь теоремой 8 ([1]).

Так, легко видеть, что

$$\theta_n(x) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^q B_p(dx - [dx]),$$

$$\theta_n^*(x) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^p B_q(dx - [dx])$$

образуют биортогональную пару

$$\int_0^1 \theta_n(x)\,\theta_m^*(x)\,dx = 0, \quad \text{если } n \neq m,$$

$$\int_0^1 \theta_n(x)\,\theta_m^*(x)\,dx = 0, \quad \text{если } n = m,$$

если $p \equiv q \pmod 2$. Пользуясь теоремой 9 ([1]), можно построить последовательность, биортогональную к

$$f_n(x) = \sqrt{12}\, n\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right).$$

Эта последовательность будет

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\sqrt{\varphi_2(nk)}}\,\psi_{nk}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\varphi_2(nk)} \sum_{d/nk} \varphi\left(\frac{nk}{d}\right) d\left(x\varphi(d) - \varphi(dx, d) - \frac{1}{2}\,\delta_\alpha^1\right).$$

Здесь $\varphi(m, n)$ означает число чисел, не превосходящих m и взаимно простых с n,

$$\delta_\alpha^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } d = 1, \\ 0, & \text{если } d > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что интеграл

$$\int_0^1 \left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) f(x)\,dx,$$

где $f(x) = -f(1 - x)$, равен нулю тогда и только тогда, когда $f(x)$ принадлежит линейной замкнутой оболочке

$$\hat{f}_1(x),\ \hat{f}_2(x),\ \ldots,\ \hat{f}_{n-1}(x),\ \hat{f}_{n+1}(x),\ \ldots.$$

Полагая $f(x) = \Phi'(x)$, $\Phi(0) = 0$, легко заметить, что

$$-\int_0^1 \left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right)\Phi'(x)\,dx = n\int_0^1 \Phi(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\Phi(1).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \Phi(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\Phi(1) = 0,$$

если $\Phi'(x) = f_m(x)$, $m \neq n$. Легко указать критерий для совпадения интеграла с интегральной суммой при различных значениях n. Так, например,

$$\int_0^1 \Phi(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n}\Phi(1)$$

при $n > N$, если $\Phi(0) = 0$,

$$\Phi'(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \hat{f}_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos 2\pi kx,$$

где a и b — любые константы, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$. Система $\hat{f}_n(x)$ представляет интерес в связи с соотношением*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n}\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\sin 2\pi nx, \tag{34}$$

где сходимость рядов понимается как сходимость по норме пространства $L^2(0,1)$. Очевидно,

$$\left\|\sum_{k=m}^{m+p}\frac{\Lambda(n)}{n}\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right)\right\|^2 = \frac{1}{12}\sum_{k=m}^{m+p}\sum_{l=m}^{m+p}\frac{\Lambda(k)}{k^2}\frac{\Lambda(l)}{l^2}(k, l)^2,$$

откуда сходимость ряда, стоящего в левой части равенства, становится очевидной. Равенство (34) доказывается путем вычисления коэффициентов Фурье для его обеих частей по системе синусов, на основании формулы

$$\int_0^1\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right)\sin 2\pi nx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ не делится на } n, \\ -\dfrac{n}{2\pi m}, & \text{если } n \mid m. \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sin 2\pi x}{\pi}. \tag{35}$$

На основании формулы Куммера, равенство (34) перепишется следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) = -\log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)(C + \log 2\pi) +$$
$$+ \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\log\sin\pi x. \tag{36}$$

* $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

Помножая на $\Phi'(x)$ и интегрируя, получим соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left\{ \int_0^1 \Phi(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}^{*} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) \right\} =$$

$$= \int_0^1 \log \frac{\Gamma(x)\sqrt{\sin \pi x}}{\sqrt{\pi}} \Phi'(x)\,dx - A \int_0^1 \Phi(x)\,dx + \frac{A - \log \pi}{2} \Phi(1), \qquad (37)$$

где $A = \log 2\pi + C$, C — константа Эйлера-Маскерони, $\Phi'(x)$ — любая функция с суммируемым по Лебегу квадратом модуля производной, $\sum^{*}$ означает, что последний член суммы должен быть помножен на $\frac{1}{2}$. Аналогично. из (35) следует

$$\pi m \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\{ \int_0^1 \Phi(x)\,dx - \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{nm}{}^{*} \Phi\left(\frac{k}{nm}\right) \right\} = \int_0^1 \Phi'(x) \sin 2\pi mx\,dx, \qquad (38)$$

откуда для случая, когда почти всюду $\Phi'(x) = -\Phi'(1-x)$, получим:

$$2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \Phi(x)\,dx - \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{mn}{}^{*} \Phi\left(\frac{k}{nm}\right) \right\} \mu(n) \right|^2 =$$

$$= \int_0^1 |\Phi'(x)|^2\,dx. \qquad (39)$$

Для

$$\Phi^{*}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{x} \sum_{k=1}^{N} a_k k^2 \hat{f}_k(x)\,dx$$

левая часть (37) делается равной $\sum_{k=1}^{N} a_k \Lambda(k)$. Представляют интерес со стороны приложений к вопросам распределения простых чисел частные случаи $\Phi(x) = x^s$ и $\Phi(x) = e^{\alpha x} - 1$.

Во втором случае

$$\int_0^1 \Phi(t)\,dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}^{*} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} - \frac{e^{\frac{\alpha}{n}} + 1}{2n\left(e^{\frac{\alpha}{n}} - 1\right)} (e^{\alpha} - 1).$$

Обозначая $e^{\alpha} = x$, получим из (37):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left\{ \frac{x-1}{\log x} - \frac{x^{\frac{1}{n}} + 1}{2n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)} (x-1) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \log \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(1-t)} \log x\, x^t\,dt - \frac{A(x-1)}{\log x} + \frac{A - \log \pi}{2}(x-1). \qquad (40)$$

Тождество (40) после вычисления интеграла может быть записано в следующей форме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left\{ \frac{1}{\log x} - \frac{x^{\frac{1}{n}} + 1}{\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) 2n} \right\} (x-1) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \log n \, \frac{(x-1)\log x}{\pi^2 n^2 + \log^2 x} .$$

Последнее соотношение, имеющее некоторое сходство с известным тождеством Ламберта, может быть существенно обобщено.

Некоторые вопросы, аналогичные и частично совпадающие с изложенными здесь в связи с примером $\omega(n) = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \sqrt{2}\sin 2\pi\, nx$, содержатся в работе (7).*

Сделаю еще одно замечание, относящееся к случаю абстрактно заданного пространства.

Изометрические операторы L_n, определяемые формулами

$$L_n \sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha_{kn},$$

где α_k — заданная ортонормированная система, обладают свойством мультипликативности: $L_m L_n = L_{mn}$. Оператор $\zeta(s, L)$, где

$$\zeta(s, L) f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} L_n f,$$

позволяет написать $f_n = \bar{n}^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nk}}{k^s}$ в форме

$$f_n = n^s \zeta(s, L) L_n \alpha_1,$$

а ψ_n — в форме

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{2\sigma}(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \bar{d}^s L_d \zeta(s, L) \alpha_1.$$

Таким образом, операторы

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{2\sigma}(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

превращают α_m в ортонормированную последовательность $A_n \alpha_m (n = 1, 2, 3, \ldots)$, полную на подпространстве, порожденном α_m, α_{2m}, $\alpha_{3m}, \ldots$.

---

* После написания этой работы я заметил ряд работ, посвященных вопросам, аналогичным с рассмотренными здесь, в частности, работу Ph. Hartman'a (8), рассматривающую вопрос о полноте системы $\Phi(t)$, $\Phi(2t)$, $\Phi(3t)$, . . . , где $\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt$ и $a_{nm} = a_n a_m$ при $(n, m) = 1$.

Далее,

$$\alpha_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_{2\sigma}(n)} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \bar{d}^s L_d \zeta(s, L) \alpha_m,$$

где справа стоит разложение α_m в ряд Фурье по ортонормированной системе $L_m \psi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Частный случай системы (7), соответствующий $k = 1$,

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d\left(dx - [dx] - \frac{1}{2}\right), \tag{41}$$

подробно рассмотрен мною в (⁴).

Пользуясь очевидным соотношением

$$-\int_0^1 \Phi'(x)\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) dx = n\left(\int_0^1 \Phi(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}^{*} \Phi\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

легко вычислить коэффициенты Фурье:

$$(\Phi', \psi_n) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2 \left(\int_0^1 \Phi(x)\,dx - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d}{}^{*} \Phi\left(\frac{k}{d}\right)\right).$$

Отсюда и на основании теоремы Фишера-Рисса получается решение следующей проблемы моментов: *как должны быть заданы константы a_n, чтобы существовала функция $\Phi(x)$ с суммируемым по Лебегу квадратом модуля производной такая, что*

$$\int_0^1 \Phi(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}^{*} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) = a_k?$$

Условием, необходимым и достаточным для этого, является сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2 a_d \right|^2.$$

Поступило
21.VI.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Романов Н. П., Пространство Гильберта и теория чисел, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 10 (1946), 3—34.

[2] Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, B. II, Leipzig, 1927.

[3] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, 1924.

[4] Романов Н. П., Об одной специальной ортонормированной системе и ее связи с теорией простых чисел, Матем. сборник, 16 (58): 3 (1945), 353—364.

[5] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, М.—Л., 1945.

[6] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, Л.—М., 1949.

[7] Winther A., Diophantine Approximation and Hilbert space, Amer. Journ. Math., 66 (1944), 564—568.

[8] Hartman Ph., Multiplicative sequences and Töplerian (L^2)-Bases, Duke Math. Journ., v. 14, No. 3 (1947), 755—767.

[9] Szegö G., Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., (1939), 378—393.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 153—176

Н. И. ФЕЛЬДМАН

АППРОКСИМАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ. II.

АППРОКСИМАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ЧИСЕЛ, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЕЙ ВЕЙЕРШТРАССА $\wp(z)$

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе для некоторых трансцендентных чисел ζ устанавливаются неравенства вида $|\zeta-\xi|\geqslant\varphi(H,n)$, $|P(\zeta)|\geqslant\varphi(H,n)$, где ξ — алгебраическое число степени n и высоты H, $P(z)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H, а $\varphi(x,y)$ — некоторая функция.

Настоящая работа является продолжением работы ([1]). Нам потребуются некоторые леммы, доказанные в § 1 работы ([1]). При ссылках на эти леммы рядом с номером леммы будет стоять цифра I.

Кроме того, для дальнейшего будут необходимы еще несколько лемм об эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$.

§ 1. Некоторые свойства эллиптической функции $\wp(z)$

Эллиптическая функция $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{\wp'(z)\}^2=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3. \qquad (1)$$

Постоянные g_2 и g_3 называются инвариантами функции $\wp(z)$.

Пусть ω_1 и ω_2 — некоторая пара основных периодов функции $\wp(z)$. Любой период функции $\wp(z)$ имеет вид $m_1\omega_1+m_2\omega_2$, где m_1 и m_2 — целые числа.

Из уравнения (1) можно получить еще одно дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\wp(z)$:

$$\wp''(z)=6\wp^2(z)-\frac{1}{2}g_2. \qquad (2)$$

В точках $z=m_1\omega_1+m_2\omega_2$ функция $\wp(z)$ имеет полюсы второго порядка. Во всех остальных конечных точках функция $\wp(z)$ регулярна.

ЛЕММА 1. *Для производных функции $\wp(z)$ справедливо равенство*

$$\wp^{(s)}(z)=\sum_{2a+3b+4c=s+2}\gamma_{a,b,c}(\wp(z))^a(\wp'(z))^b(\wp''(z))^c, \qquad (3)$$

где $\gamma_{a,b,c}$ — целые рациональные числа, удовлетворяющие неравенству

$$\max_{2a+3b+4c=s+2}|\gamma_{a,b,c}|=M_s\leqslant 3^s(s+7)!, \qquad (4)$$

а целые числа a, b, c не меньше нуля.

Доказательство. Для $s = 0, 1, 2$ лемма верна и $\gamma_{a, b, c} = 1$. Пусть лемма верна для $s \leqslant s_0$. Покажем, что она верна и для $s = s_0 + 1$. Из (2) находим равенство

$$\wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z). \tag{5}$$

По предположению,

$$\wp^{(s_0)}(z) = \sum_{2a+3b+4c=s_0+2} \gamma_{a, b, c} (\wp(z))^a (\wp'(z))^b (\wp''(z))^c.$$

Продифференцируем это равенство и заменим $\wp'''(z)$, пользуясь (5). Тогда

$$\wp^{(s+1)}(z) = \sum_{2a+3b+4c=s_0+2} \gamma_{a, b, c} \{a(\wp(z))^{a-1}(\wp'(z))^{b+1}(\wp''(z))^c +$$
$$+ b(\wp(z))^a(\wp'(z))^{b-1}(\wp''(z))^{c+1} + 12c(\wp(z))^{a+1}(\wp'(z))^{b+1}(\wp''(z))^{c-1}\}.$$

Так как a, b, c — целые числа, то коэффициенты останутся целыми. Далее,

$$2(a-1) + 3(b+1) + 4c = 2a + 3(b-1) + 4(c+1) =$$
$$= 2(a+1) + 3(b+1) + 4(c-1) = (s_0+1) + 2,$$

так что

$$\wp^{(s_0+1)}(z) = \sum_{2a+3b+4c=s_0+3} \gamma_{a, b, c} (\wp(z))^a (\wp'(z))^b (\wp''(z))^c.$$

Осталось оценить M_{s_0+1}. Элемент

$$(\wp(z))^a(\wp'(z))^b(\wp''(z))^c$$

мог появиться от дифференцирования или

$$(\wp(z))^{a+1}(\wp'(z))^{b-1}(\wp''(z))^c,$$

или

$$(\wp(z))^a(\wp'(z))^{b+1}(\wp''(z))^{c-1},$$

или

$$(\wp(z))^{a-1}(\wp'(z))^{b-1}(\wp''(z))^{c+1},$$

так что

$$\gamma_{a, b, c} = (a+1)\gamma_{a+1, b-1, c} + (b+1)\gamma_{a, b+1, c-1} + (c+1)\cdot 12\cdot\gamma_{a-1, b-1, c+1},$$

причем величины γ, у которых хотя бы один индекс отрицательный следует считать нулем. Таким образом,

$$\max_{2a+3b+4c=s_0+3} |\gamma_{a, b, c}| \leqslant M_{s_0}\{(a+1) + (b+1) + 12(c+1)\} \leqslant$$
$$\leqslant M_{s_0}\{14 + 3(2a+3b+4c)\} = M_{s_0}\{14 + 3(s_0+3)\} <$$
$$< 3M_{s_0}(s_0+8) = 3^{s_0+1}(s_0+8)!$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Для целых положительных l справедливо равенство*

$$\frac{d^s}{dz^s}(\wp^l(z)) = \sum_{2a+3b+4c=s+2l} \gamma_{a, b, c}(l, s)\cdot(\wp(z))^a\cdot(\wp'(z))^b\cdot(\wp''(z)^c, \tag{6}$$

причем для целых рациональных коэффициентов $\gamma_{a,b,c}(l, s)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{2a+3b+4c=s+2l} |\gamma_{a,b,c}(l, s)| \leqslant s! \cdot 2^l \cdot \gamma^s, \tag{7}$$

где γ — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Имеет место равенство ($\rho \geqslant 0$ — целые числа)

$$\frac{d^s}{dz^s}(\wp^l(z)) = \sum_{\rho_1+\cdots+\rho_l=s} s! \frac{\wp^{(\rho_1)}(z)}{\rho_1!} \cdots \frac{\wp^{(\rho_l)}(z)}{\rho_l!}. \tag{8}$$

Из равенств (3), (8) и равенства

$$(\rho_1+2)+(\rho_2+2)+\cdots+(\rho_l+2)=s+2l$$

вытекает справедливость равенства (6) и целочисленность коэффициентов $\gamma_{a,b,c}(l, s)$. Покажем справедливость оценки (7). Оценим число слагаемых в представлении $\wp^{(\rho_k)}(z)$ через $\wp(z)$, $\wp'(z)$ и $\wp''(z)$. Если $\rho_k=0$, то слагаемое одно, причем в этом случае $1=(\rho_k+1)^2$. Если $\rho_k \geqslant 1$, то из равенства (3) следует, что слагаемых не больше, чем

$$\left(\frac{\rho_k+2}{4}+1\right)\left(\frac{\rho_k+2}{3}+1\right)=\frac{\rho_k^2+11\rho_k+30}{12} \leqslant \frac{12\rho_k^2+24\rho_k+6}{12} < (\rho_k+1)^2.$$

Итак, слагаемых в представлении $\wp^{(\rho_k)}(z)$ через $\wp(z)$ $\wp'(z)$ и $\wp''(z)$ не более, чем $(\rho_k+1)^2$. Поэтому, выразив произведение $\wp^{(\rho_1)}(z)\cdots\wp^{(\rho_l)}(z)$ через величины $\wp(z)$, $\wp'(z)$ и $\wp''(z)$, получим не более $(\rho_1+1)^2(\rho_2+1)^2\cdots\cdots(\rho_l+1)^2$ слагаемых. Таким образом,

$$\sum_{2a+3b+4c=s+2l} |\gamma_{a,b,c}(l, s)| \leqslant$$

$$\leqslant s! \sum_{\rho_1+\cdots+\rho_l=s} \frac{M_{\rho_1}(\rho_1+1)^2}{\rho_1!} \frac{M_{\rho_2}(\rho_2+1)^2}{\rho_2!} \cdots \frac{M_{\rho_l}(\rho_l+1)^2}{\rho_l!}. \tag{9}$$

Воспользуемся оценкой (4). Так как число решений уравнения $\rho_1+\ldots+\rho_l=s$ в неотрицательных целых числах ρ_i равно C_{s+l-1}^{l-1}, то

$$I_{s,l}=\sum_{2a+3b+4c=s+2l} |\gamma_{a,b,c}(l, s)| \leqslant$$

$$\leqslant s! \sum_{\rho_1+\cdots+\rho_l=s} \frac{(\rho_1+1)^2 3^{\rho_1}\cdot(\rho_1+7)!}{\rho_1!} \cdots \frac{(\rho_l+1)^2 3^{\rho_l}\cdot(\rho_l+7)!}{\rho_l!} \leqslant$$

$$\leqslant s! \cdot \gamma_1^s \cdot C_{s+l-1}^{l-1} \max_{\rho_1+\cdots+\rho_l=s} \{(\rho_1+1)^9\cdots(\rho_l+1)^9\} \leqslant$$

$$\leqslant s! \cdot \gamma_1^s 2^{s+l-1} \cdot \max_{t_1+\cdots+t_l=s+l} (t_1^9\cdots t_l^9),$$

где γ_1 не зависит от s и l. Максимум достигается при

$$t_1=t_2=\cdots=t_l=\frac{s+l}{l}.$$

Действительно, если среди множителей имеются два различных t' и t'', то, заменив их на два множителя $\frac{t'+t''}{2}$, мы увеличим произведение, не меняя суммы множителей. Таким образом,

$$I_{s,\,l} \leqslant s\,!\,(2\gamma_1)^s 2^l \left(1+\frac{s}{l}\right)^{9l}.$$

Далее, если $l \geqslant s$, то

$$\left(1+\frac{s}{l}\right)^{9l} = \left(1+\frac{s}{l}\right)^{\frac{l}{s}\cdot 9s} \leqslant \gamma_2^s,$$

где γ_2 не зависит от l и s. Если же $l < s$, то

$$\left(1+\frac{s}{l}\right)^{9l} = \left(\frac{s}{l}\right)^{9l} \cdot \left(1+\frac{l}{s}\right)^{9l} \leqslant \left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{l}{s}\,9s} \cdot 2^{9s} \leqslant \gamma_3^s,$$

где γ_3 не зависит от l и s. Мы получаем

$$I_{s,\,l} \leqslant s\,!\,(2\gamma_1)^s\, 2^l \max(\gamma_3^s,\ \gamma_2^s).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть инварианты g_2 и g_3 функции $\wp(z)$ — алгебраические числа, $\wp(\alpha)$ — алгебраическое число, причем $\frac{\alpha}{\omega}$ иррационально для любого периода ω функции $\wp(z)$. Пусть поле алгебраических чисел K степени ν содержит g_2, g_3, $\wp(\alpha)$, $\wp'(\alpha)$, а целое алгебраическое θ — образующее число этого поля. Если l — целое рациональное число, то*

$$\wp(l\alpha) = \frac{\delta_0}{N}, \quad \wp'(l\alpha) = \frac{\delta_1}{N}, \quad \wp''(l\alpha) = \frac{\delta_2}{N}$$

являются числами поля K, причем целое рациональное положительное N не больше $\lambda_{10}^{l^2}$, а δ_i — полиномы от θ степени $\nu-1$ с целыми рациональными коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине $\lambda_{10}^{l^2}$, где λ_{10} зависит от g_2, g_3, α и θ, но не зависит от l.

Доказательство. Для функции $\wp(z)$ имеют место следующие две формулы [(3), стр. 272—273]:

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right\}^2 - 2\wp(z), \tag{10}$$

$$\wp(z+y) = -\wp(z-y) + \frac{\left\{2\wp(z)\wp(y) - \frac{1}{2}g_2\right\}\{\wp(z)+\wp(y)\} - g_3}{\{\wp(z)-\wp(y)\}^2}. \tag{11}$$

Пользуясь уравнениями (1) и (2) и заменив z на kz, мы приведем равенство (10) к виду

$$\wp(2kz) = \frac{16\wp^4(kz) + 8g_2\wp^2(kz) + 32g_3\wp(kz) - g_2^2}{64\wp^3(kz) - 16g_2\wp(kz) - 16g_3}. \tag{12}$$

Заменим в (11) z на $(k+1)z$, а y на kz. Тогда

$$\wp((2k+1)z) = -\wp(z) + \frac{\left\{2\wp((k+1)z)\wp(kz) - \frac{1}{2}g_2\right\}\{\wp((k+1)z)+\wp(kz)\} - g_3}{\{\wp((k+1)z)-\wp(kz)\}^2}. \tag{13}$$

Последовательно применяя равенства (12) и (13), можно для любого целого l выразить $\wp(lz)$ через $\wp(z)$ рационально с коэффициентами из K. Дифференцируя полученные соотношения, выразим таким же образом $\wp'(lz)$ через $\wp'(z)$ и $\wp(z)$. Таким образом, устанавливаем, что $\wp(l\alpha)$, $\wp'(l\alpha)$, $\wp''(l\alpha)$ (последнее, вследствие уравнения (2)) суть числа поля K (знаменатель всегда будет отличен от нуля вследствие несоизмеримости α и периодов).

Пусть

$$\zeta_l = \wp(l\alpha) = \frac{a_{0,l} + a_{1,l}\theta + \dots + a_{\nu-1,l}\theta^{\nu-1}}{b_{0,l} + b_{1,l}\theta + \dots + b_{\nu-1,l}\theta^{\nu-1}} = \frac{\alpha_l}{\beta_l}, \tag{14}$$

$$m_l = \max(|a_{0,l}|, \dots, |a_{\nu-1,l}|, |b_{0,1}|, \dots, |b_{\nu-1,l}|),$$

$$H_m = \max_{2^{m-1}<l\leqslant 2^m} m_l, \quad m = 0, 1, \dots .$$

Пусть $t = 2l+1$ и $2^m < t < 2^{m+1}$. Тогда $2^{m-1} \leqslant l < l+1 \leqslant 2^m$. Воспользуемся формулой (13). Получим равенство

$$\wp(t\alpha) = -\wp(\alpha) + \frac{\{4\alpha_{l+1}\alpha_l - g_2\beta_{l+1}\beta_l\}\{\alpha_{l+1}\beta_l + \alpha_l\beta_{l+1}\} - 2g_3\beta_{l+1}^2\beta_l^2}{2\{\alpha_{l+1}\beta_l - \alpha_l\beta_{l+1}\}^2}.$$

Выразим через θ числа α_l, α_{l+1}, β_l, β_{l+1}, g_2, g_3 и исключим θ^k, $k \geqslant \nu$, посредством уравнения для θ. Это приведет к выражению $\wp(t\alpha)$ в форме (14). Легко видеть, что при этом коэффициенты $a_{i,t}$ и $b_{i,t}$ будут удовлетворять неравенствам

$$|a_{i,t}|, |b_{i,t}| \leqslant \lambda_1 H_m^4, \tag{15}$$

где λ_1 зависит от g_2, g_3 и θ, но не зависит от t и m. Пусть теперь $t = 2l$, $2^m < t \leqslant 2^{m+1}$. Формула (12) приводит к равенству

$$\wp(t\alpha) = \frac{16\alpha_l^4 + 8g_2\alpha_l^2\beta_l^2 + 32g_3\alpha_l\beta_l^3 - g_2^2\beta_l^4}{64\alpha_l^3\beta_l - 16g_2\alpha_l\beta_l^3 - 16g_3\beta_l^4} = \frac{\alpha_t}{\beta_t},$$

причем опять справедливы неравенства

$$|a_{i,t}|, |b_{i,t}| \leqslant \lambda_2 H_m^4, \tag{16}$$

где λ_2 не зависит от t и m. Пусть $\lambda_3 = \max(\lambda_1, \lambda_2, m_1)$; тогда справедливо неравенство

$$H_m \leqslant \lambda_3^{\frac{4^{m+1}-1}{3}}. \tag{17}$$

Действительно, для $m = 1$ это верно, так как, вследствие (16),

$$H_1 \leqslant \lambda_3 H_0^4 \leqslant \lambda_3^5 = \lambda_3^{\frac{4^2-1}{3}}.$$

Пусть неравенство (17) справедливо для $m \leqslant m_0$. Тогда из (15) и (16) будет следовать

$$H_{m_0+1} \leqslant \lambda_3 H_{m_0}^4 \leqslant \lambda_3^{1+4\frac{4^{m_0+1}-1}{3}} = \lambda_3^{\frac{4^{m_0+2}-1}{3}},$$

что и доказывает неравенство (17). Далее, если $2^{m-1} < l \leqslant 2^m$, то

$$m_l \leqslant H_m \leqslant \lambda_3^{\frac{4^{m+1}-1}{3}} < \lambda_3^{\frac{16}{3}\cdot 4^{m-1}} < \lambda_3^{\frac{16}{3}\cdot l^2} = \lambda_4^{l^2}. \tag{18}$$

Функция $\wp(z)$ четная, так что неравенство (18) справедливо и для отрицательных l. Из уравнений (1) и (2) имеем

$$\wp''(l\alpha) = 6\frac{\alpha_l^2}{\beta_l^2} - \frac{1}{2}g_2, \quad (\wp'(l\alpha))^2 = 4\frac{\alpha_l^3}{\beta_l^3} - g_2\frac{\alpha_l}{\beta_l} - g_3. \tag{19}$$

Если N_l — норма числа β_l, то неравенство (18) показывает ($\theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(\nu)}$ — сопряженные числа $\theta = \theta^{(1)}$), что

$$|N_l| \leqslant \left|\prod_{i=1}^{\nu}(b_{0,l} + b_{1,l}\theta^{(i)} + \cdots + b_{\nu-1,l}\theta^{(i)^{\nu-1}})\right| \leqslant \lambda_5^{l^2}, \tag{20}$$

где λ_5 не зависит от l. Поэтому существует целое рациональное $M_l = \lambda_6 N_l$, где λ_6 — постоянное число, зависящее лишь от g_2 и g_3, такое, что $M_l\wp(l\alpha)$, $M_l^3(\wp'(l\alpha))^2$, $M_l^2\wp''(l\alpha)$ — целые числа поля K. Так как $\wp'(l\alpha) \in K$, то $\varepsilon = M_l^2\wp'(l\alpha)$ — целое число поля K. Неравенства (18) и (19) показывают, что ε и все его сопряженные не больше по абсолютной величине, чем $\lambda_7^{l^2}$, где λ_7 не зависит от l; следовательно, существует представление с целыми рациональными $C_{i,l}$ и λ_8

$$\wp'(l\alpha) = \frac{C_{0,l} + C_{1,l}\theta + \cdots + C_{\nu-1,l}\theta^{\nu-1}}{M_l^2\cdot\lambda_8}, \quad |C_{i,l}| \leqslant \lambda_9^{l^2},$$

где λ_8 и λ_9 не зависят от l. Вследствие (19), аналогичное представление имеет и $\wp''(l\alpha)$. Пусть $N = \lambda_8 M_l^2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4* (А. О. Гельфонд). *Пусть α отлично от нуля и не является периодом эллиптической функции $\wp(z)$, а q и q_0 — целые положительные числа. Положим*

$$f_{0,k}(z) = P_k[\wp(z+\alpha)], \quad k = 0, 1, \ldots, q_0 - 1,$$

$$L(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} f_{0,k}(z)\cdot z^k,$$

где $P_k(y)$ — полином степени не выше $q-1$. Если $f_{0,q_0-1}(z) \not\equiv 0$, то разложение $L(z)$ в ряд по степеням z начинается с z^t, где

$$0 \leqslant t < 2qq_0 + \frac{1}{2}q_0^2. \tag{21}$$

Доказательство. Так как $L(z)$ регулярна в точке $z=0$, то $t \geqslant 0$. Для производных функции $L(z)$ справедливо равенство (считаем $f_{s,q_0}(z) \equiv 0$)

$$L^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} f_{s,k}(z)\cdot z^k, \quad f_{s,k}(z) = f'_{s-1,k}(z) + (k+1)f_{s-1,k+1}(z),$$

где $f_{s,k}(z)$ — эллиптические функции порядка не выше $2q-2+s$, регулярные в точке $z=0$. Рассмотрим функцию

* Эта ранее не опубликованная лемма используется здесь с разрешения А. О. Гельфонда.

$$(L^{(s)}(z))_\nu = \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu L^{(s)}(z)}{\partial z^\nu} = \sum_{k=\nu}^{q_0-1}\frac{k!}{(k-\nu)!\,\nu!} f_{s,\,k}(z)\,z^{k-\nu} = \sum_{k=\nu}^{q_0-1} C_k^\nu f_{s,\,k}(z)\,z^{k-\nu}.$$

Она регулярна в точке $z=0$. Далее,

$$\frac{d}{dz}(L^{(s)}(z))_\nu = \sum_{k=\nu}^{q_0-1}\left\{\frac{k!z^{k-\nu}}{(k-\nu)!\nu!} f'_{s,\,k}(z) + \frac{k!\,(k-\nu)}{(k-\nu)!\nu!} f_{s,\,k}(z)\cdot z^{k-\nu-1}\right\} =$$

$$= \sum_{k=\nu}^{q_0-1}\left\{\frac{k!f'_{s,\,k}(z)}{\nu!\,(k-\nu)!} + \frac{(k+1)!\,(k+1-\nu)}{\nu!\,(k+1-\nu)!} f_{s,\,k+1}(z)\right\} z^{k-\nu} =$$

$$= \sum_{k=\nu}^{q_0-1}\frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}\{f'_{s,\,k}(z) + (k+1)\,f_{s,\,k+1}(z)\}\,z^{k-\nu} =$$

$$= \sum_{k=\nu}^{q_0-1}\frac{k!\,z^{k-\nu}}{\nu!\,(k-\nu)!} f_{s+1,\,k}(z) = (L^{(s+1)}(z))_\nu.$$

Отсюда легко выводится равенство

$$\frac{d^s}{dz^s}L_\nu(z) = \left(\frac{d^sL(z)}{dz^s}\right)_\nu. \tag{22}$$

Рассмотрим определитель Вронского функций $L(z),\ L_1(z),\ \ldots,\ L_{q_0-1}(z)$.

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} L(z) & L_1(z) & \cdots & L_{q_0-1}(z) \\ \frac{dL(z)}{dz} & \frac{dL_1(z)}{dz} & \cdots & \frac{dL_{q_0-1}(z)}{dz} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \frac{d^{q_0-1}L(z)}{dz^{q_0-1}} & \frac{d^{q_0-1}L_1(z)}{dz^{q_0-1}} & \cdots & \frac{d^{q_0-1}L_{q_0-1}(z)}{dz^{q_0-1}} \end{vmatrix} \tag{23}$$

Если $\Delta(z)\equiv 0$, то существуют в совокупности отличные от нуля числа $C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{q_0-1}$ такие, что

$$C_0L(z) + C_1L_1(z) + \cdots + C_{q_0-1}L_{q_0-1}(z) \equiv 0.$$

Подставим значение функций $L_i(z)$. Тогда

$$0 \equiv \sum_{\nu=0}^{q_0-1} C_\nu \sum_{k=\nu}^{q_0-1} C_k^\nu f_{0,\,k}(z)\,z^{k-\nu} \equiv \sum_{\nu=0}^{q_0-1} C_\nu \sum_{t_1=0}^{q_0-\nu-1} C_{t_1+\nu}^\nu f_{0,\,t_1+\nu}(z)\,z^{t_1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{t_1=0}^{q_0-1} z^{t_1} \sum_{\nu=0}^{q_0-t_1-1} C_\nu\cdot C_{t_1+\nu}^\nu f_{0,\,t_1+\nu}(z).$$

Так как $\wp(z)$ не является алгебраической функцией, то

$$\sum_{\nu=0}^{q_0-t_1-1} C_\nu C_{t_1+\nu}^\nu f_{0,\,t+\nu}(z) \equiv 0,\quad t_1 = 0,\ 1,\ \ldots,\ q_0-1.$$

Пусть $C_0 = C_1 = \ldots = C_{k-1} = 0$, $C_k \neq 0$, $0 \leqslant k \leqslant q_0 - 1$ и $t_1 = q_0 - 1 - k$. Тогда

$$0 \equiv \sum_{\nu=0}^{k} C_\nu C_{t+\nu}^\nu f_{0,\,t+\nu}(z) \equiv C_k C_{t+k}^k f_{0,\,q_0-1}(z).$$

Но это невозможно, так как $f_{0, q_0-1}(z) \not\equiv 0$.

Итак, $\Delta(z) \not\equiv 0$.

Воспользуемся равенством (22).

$$\Delta(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{q_0-1} f_{0,k}(z) z^k & \sum\limits_{k=1}^{q_0-1} C_k^1 f_{0,k}(z) z^{k-1} & \cdots & \sum\limits_{k=q_0-2}^{q_0-1} C_k^{q_0-2} f_{0,k}(z) z^{k+2-q_0} & f_{0,q_0-1}(z) \\ \sum\limits_{k=0}^{q_0-1} f_{1,k}(z) z^k & \sum\limits_{k=1}^{q_0-1} C_k^1 f_{1,k}(z) z^{k-1} & \cdots & \sum\limits_{k=q_0-2}^{q_0-1} C_k^{q_0-2} f_{1,k}(z) z^{k+2-q_0} & f_{1,q_0-1}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_{k=0}^{q_0-1} f_{q_0-1,k}(z) z^k & \sum\limits_{k=1}^{q_0-1} C_k^1 f_{q_0-1,k}(z) z^{k-1} & \cdots & \sum\limits_{k=q_0-2}^{q_0-1} C_k^{q_0-2} f_{q_0-1,k}(z) z^{k+2-q_0} & f_{q_0-1,q_0-1}(z) \end{vmatrix}.$$

Вычтем из i-го столбца ($i = 0, 1, \ldots, q_0 - 2$) последний столбец, умноженный на $C_n^i z^{n-1}$. После этого во всех столбцах, кроме последнего, не будет слагаемых с $f_{j, q_0-1}(z)$, $j = 0, 1, \ldots, q_0 - 1$. Затем вычтем из i-го столбца ($i = 0, 1, \ldots, q_0 - 3$) новый $(q_0 - 2)$-й столбец, умноженный на $C_{q_0-2}^i z^{q_0-2-i}$, и т. д. Окончательно получим равенство

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} f_{0,0}(z) & f_{0,1}(z) \cdots f_{0,q_0-1}(z) \\ f_{1,0}(z) & f_{1,1}(z) \cdots f_{1,q_0-1}(z) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{q_0-1,0}(z) & f_{q_0-1,1}(z) \cdots f_{q_0-1,q_0-1}(z) \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

Если $t \leqslant q_0-1$, то лемма верна. Пусть $t > q_0 - 1$. Тогда разложение $\frac{d^s L_\nu(z)}{dz^s}$, $s \leqslant q_0-1$, начинается с z^{t-s}. Так как функции $\frac{d^s L_\nu(z)}{dz^s}$ регулярны в точке $z = 0$, то из (23) видим, что $\Delta(z)$ делится на z^{t-q_0+1}. С другой стороны, из (24) следует, что $\Delta(z)$ — эллиптическая функция порядка не выше

$$(2q-2) + (2q-1) + 2q + \cdots + (2q-2+q_0-1) = q_0 \frac{4q+q_0-5}{2},$$

так что $\Delta(z)$ в точке $z = 0$ имеет нуль порядка не выше $\frac{1}{2} q_0(4q+q_0-5)$; поэтому

$$t \leqslant q_0 - 1 + \frac{1}{2} q_0 (4q + q_0 - 5) \leqslant 2qq_0 + \frac{1}{2} q_0^2.$$

§ 2. Аппроксимация некоторых чисел, связанных с функцией $\wp(z)$ *

В этом параграфе инварианты g_2 и g_3 функции $\wp(z)$ считаем алгебраическими числами.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть ω — период функции $\wp(z)$. Существует такое число γ_5, зависящее лишь от ω и $\wp(z)$, что*

$$|\xi - \omega| > e^{-\gamma_5 n^4 (n \ln n + 1 + \ln H) \ln^4 (n \ln n + 2 + \ln H)},$$

где ξ — любое алгебраическое число степени n и высоты H.

* Формулировки доказываемых в § 2 теорем были приведены в работе автора [2].

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что функция $\wp(z)$ не имеет периодов вида $a\omega$, $0 < a < 1$. Так как $\wp'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, то $\wp\left(\frac{\omega}{2}\right)$ — алгебраическое число. Далее, вследствие (12), (1) и (2), алгебраическими числами будут $\wp\left(\frac{\omega}{4}\right)$, $\wp'\left(\frac{\omega}{4}\right)$, $\wp''\left(\frac{\omega}{4}\right)$.

Пусть эти три числа содержатся в поле K степени ν, θ — образующее число поля K, а γ — число из леммы 4,I для случая $\alpha_1 = \theta$. Символами $\lambda_0, \lambda_*, \lambda_1, \ldots$ будем обозначать положительные числа, не зависящие от n, N и числа λ. Положим

$$\lambda_0 = \max\left(1, |\omega|, \left|\wp\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|, \left|\wp'\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|, \left|\wp''\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|\right),$$

$$\lambda = 40\{3 + \gamma + 7\lambda_{11}(\lambda_7^{-1} + 1)^2 |\omega|^2\}, \quad \Lambda = \lambda^{12}, \tag{24'}$$

где числа λ_7 и λ_{11} будут определены впоследствии. Покажем, что неравенство

$$|\xi - \omega| < e^{-\Lambda n^4 N \ln^5 N}, \quad N = n + \frac{\ln(H+1)}{\ln\ln(H+2)}, \tag{25}$$

для $N \geqslant N_{10}$ невозможно. Пусть это не так. Положим

$$q = [\lambda^2 N \ln N], \quad q_0 = [\lambda^4 n^2 \ln^2 N], \quad C = [e^{\lambda^4 n N \ln^3 N}] \tag{26}$$

и рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q_0-1} C_{k,l} z^k \wp^l\left(z + \frac{\omega}{4}\right), \quad C_{k,l} = \sum_{\tau=0}^{n-1} C_{k,l}^{(\tau)} \xi^\tau, \quad |C_{k,l}^{(\tau)}| \leqslant C. \tag{27}$$

Для производных этой функции справедливо равенство

$$f^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} \sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\, z^{k-t}}{(k-t)!} \left(\wp^l\left(z + \frac{\omega}{4}\right)\right)^{(s-t)}. \tag{28}$$

Пусть $|\omega - \xi| < \lambda_0$ и

$$x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_0; \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1; \quad x_0 = [\lambda n \ln N],$$
$$s_0 = [\lambda^4 n N \ln^2 N]; \tag{29}$$

тогда из (28) получаем

$$|f^{(s)}(\omega x)| \leqslant q q_0 C n (2\lambda_0)^n 2^{s_0} (q_0 - 1)! (\lambda_0 x_0)^{q_0-1} \max_{\substack{0 \leqslant l \leqslant q-1 \\ 0 \leqslant s \leqslant s_0-1}} \left|\left(\wp^l\left(z + \frac{\omega}{4}\right)\right)^{(s)}_{z=\omega x}\right|.$$

Из леммы 2 вытекает неравенство

$$\left|\left(\wp^l\left(z + \frac{\omega}{4}\right)\right)^{(s)}_{z=\omega x}\right| \leqslant s!\, \lambda_*^{l+s}, \tag{29'}$$

так что

$$|f^{(s)}(\omega x)| \leqslant C q_0! s_0! x_0^{q_0} \lambda_1^{q+q_0+s_0+n}.$$

Разобьем $f^{(s)}(\omega x)$ на вещественную и мнимую части. Получим $m_0 = 2s_0(2x_0 + 1)$ линейных однородных форм от $r = q q_0 n$ величин $C_{k,l}^{(\tau)}$. По лемме 1, целые рациональные числа $C_{k,l}^{(\tau)}$, в совокупности отличные от

нуля и удовлетворяющие условию (27), можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$|\operatorname{Re} f^{(s)}(\omega x)|,\ |\operatorname{Im} f^{(s)}(\omega x)| \leqslant \frac{2Cq_0!\, s_0!\, x_0^{q_0}\lambda_1^{q+q_0+s_0+n}}{(C+1)^{\frac{nqq_0}{2s_0(2x_0+1)}-2}},$$

$$x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_0; \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Из (26) и (29) вытекают неравенства

$$\begin{gathered} q_0! \leqslant \exp\{2\lambda^4 n^2 \ln^3 N + O(n^2 \ln^{5/2} N)\}, \\ s_0! \leqslant \exp\{2\lambda^4 nN \ln^3 N + O(nN \ln^{5/2} N)\}, \\ x_0^{q_0} \leqslant \exp\{\lambda^4 n^3 \ln^3 N + O(n^2 \ln^{5/2} N)\}, \\ \frac{nqq_0}{2s_0(2x_0+1)} \geqslant \frac{\lambda n}{4} + O\left(\frac{n}{\ln N}\right), \end{gathered} \tag{30}$$

так что для s и x из (29), вследствие (24′), имеем

$$|f^{(s)}(\omega x)| \leqslant e^{-\left(\frac{\lambda}{4}-\frac{6}{n}\right)\lambda^4 n^2 N \ln^3 N + O(n^2 N \ln^{5/2} N)} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{\lambda^5}{5} n^2 N \ln^3 N + O(n^2 N \ln^{5/2} N)}.$$

Выражение $f^{(s)}(\omega x)$ является полиномом от ω. Символом $f_{s,x}(z)$ обозначим полином, получающийся из $f^{(s)}(\omega x)$ заменой множителей ω на z.

Легко вывести неравенство $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant |f_{s,x}(\omega)| + |\omega - \xi| \max_{\eta=\xi+\theta(\omega-\xi)} |f'_{s,x}(\eta)| =$$
$$= |f_{s,x}(\omega)| + |\omega - \xi| \cdot M_{s,x}. \tag{31′}$$

Вследствие (29′),

$$M_{s,x} \leqslant \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} |C_{k,l}| \sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\,|x|^{k-t}}{(k-t)!} (k-l)(2\lambda_0)^{q_0-2} \left| \left(\wp^l\left(z+\frac{\omega}{4}\right)\right)^{(s-t)}_{z=\omega x} \right| \leqslant$$
$$\leqslant Cq_0!\,(|x|+1)^{q_0} s!\, \lambda_2^{q+q_0+n+s}. \tag{32}$$

Для $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm 2q_0$, $s < 2\lambda^7 n^2 N \ln^3 N$, вследствие (30), получаем

$$M_{s,x} \leqslant e^{O(n^2 N \ln^4 N)}, \tag{33}$$

поэтому из (25), (31′) и (33) для s и x из (29) имеем

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant e^{-\lambda^{12} n^4 N \ln^5 N + O(n^2 N \ln^4 N)} + e^{-\frac{\lambda^5}{5} n^2 N \ln^3 N + O(n^2 N \ln^{5/2} N)}. \tag{34}$$

$f_{s,x}(\xi)$ является полиномом от ξ, $\wp\left(\frac{\omega}{4}\right)$, $\wp'\left(\frac{\omega}{4}\right)$ и $\wp''\left(\frac{\omega}{4}\right)$. Пусть $\lambda_3\wp\left(\frac{\omega}{4}\right)$, $\lambda_3\wp'\left(\frac{\omega}{4}\right)$ и $\lambda_3\wp''\left(\frac{\omega}{4}\right)$ выражаются через θ в виде полинома с целыми рациональными коэффициентами, причем λ_3 — также целое рациональное число. Рассмотрим выражение

$$\lambda_3^{s+q} f_{s,x}(\xi) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} \left(\sum_{\tau=0}^{n-1} C_{k,l\tau}\xi^\tau\right) \left(\sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\,x^{k-t}}{(k-t)!} \xi^{k-t} \cdot \lambda_3^{s+q} \{\wp^l(z)\}^{(s-t)}_{z=\frac{\omega}{4}}\right). \tag{34′}$$

По лемме 2, выражение $\lambda_3^{s+q}\{\wp^l(z)\}^{(s-t)}_{z=\frac{\omega}{4}}$ является полиномом от θ степени не выше $\lambda_4(s+q)$ с целыми рациональными коэффициентами, сумма

абсолютных величин которых не превосходит величины $s!\,\lambda_5^{s+q}$. Применим к алгебраическому числу $\lambda_3^{s+q} f_{s,x}(\xi)$ лемму 4.I. Здесь

$$\alpha_1 = \theta, \quad \xi_1 = \xi, \quad n_0 = n, \quad H_0 = H \leqslant e^{2N \ln N},$$
$$M = q_0 + n - 2 = \lambda^4 n^2 \ln^2 N + O(n), \quad N_0 \leqslant \lambda_4 (s + q).$$

Оценим $A_{s,x}$. Из (34′) имеем

$$A_{s,x} \leqslant q q_0 n C 2^s (q_0 - 1)!\,(|x| + 1)^{q_0 - 1} s!\,\lambda_5^{s+q} \tag{35}$$

и для s и x из (29) получаем

$$A_{s,x} \leqslant \exp\{6\lambda^4 nN \ln^3 N + O(nN \ln^{5/2} N)\}, \quad N_0 < 2\lambda_4 \lambda^4 nN \ln^2 N.$$

По лемме 4, I, или $f_{s,x}(\xi) = 0$, или

$$|f_{s,x}(\xi)| \geqslant e^{-8\gamma\lambda^4 n^2 N \ln^3 N + O(n^2 N \ln^{5/2} N)}. \tag{36}$$

Для достаточно больших N неравенства (34) и (36) противоречивы, так что для $N \geqslant N_1$ и s и x из (29) $f_{s,x}(\xi) = 0$. Теперь обычным путем выводим неравенство

$$|f^{(s)}(\omega x)| \leqslant e^{-0,5\cdot\lambda^{12} n^4 N \ln^5 N}, \quad N \geqslant N_2; \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_0; \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1. \tag{37}$$

Положим $x_p = 2^p x_0, \quad s_p = 2^p s_0$.

ЛЕММА С. *Пусть неравенство*

$$|f^{(s)}(\omega x)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^{12} n^4 N \ln^5 N} \tag{37′}$$

справедливо для $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_p$; $s = 0, 1, \ldots, s_p - 1$, *где* $p \leqslant \ln(2\lambda^3 n \ln N)/\ln 2$. *Тогда, если* $N \geqslant N_9$, *то это неравенство справедливо для* $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_{p+1}$; $s = 0, 1, \ldots, s_{p+1} - 1$ *и для тех же* s *и* x *будет* $f_{s,x}(\xi) = 0$.

Доказательство. Существует такой период ω' функции $\wp(z)$, что все периоды функции $\wp(z)$ имеют вид $m\omega + m'\omega'$, где m, m' — целые рациональные числа. Единственными конечными особенностями функции $f(z)$ будут полюсы в точках $\left(m + \frac{3}{4}\right)\omega + m'\omega'$. Порядок этих полюсов не выше $2(q-1)$. Введем функции $f_T(z)$ и $F_T(z)$ (T — целое положительное) по формулам:

$$F_T(z) = \prod_{r=-T}^{T} \cos^{2q-2}\left(\frac{\pi z}{\omega} - \pi r \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\pi}{4}\right),$$
$$f_T(z) = f(z) \cdot F_T(z).$$

В точках $\left(m + \frac{3}{4}\right)\omega + m'\omega'$, $-\infty < m < \infty$, $-T \leqslant m' \leqslant T$, функция $F_T(z)$ имеет нули порядка $2q - 2$, так что функция $f_T(z)$ регулярна в полосе $\tau\omega + \tau'\omega'$, $-\infty < \tau < \infty$, $-T - 1 < \tau' < T + 1$. Пользуясь формулой Коши для производной аналитической функции, получим неравенство

$$|F_T^{(s)}(z)| \leqslant s!\,e^{\lambda_6 q T(T + |z|)}. \tag{38}$$

Впишем в полосу $\tau\omega + \tau'\omega'$, $-T - \frac{1}{2} \leqslant \tau' \leqslant T + \frac{1}{2}$, $-\infty < \tau < \infty$, окружность Γ_T с центром в точке $z = 0$; ее радиус равен $\lambda_7 T$. Внутри этой окруж-

ности и на границе функция $f_T(z)$ регулярна. Оценим $f_T(z)$ на Γ_T. Для этого оценим $f_T(z)$ на границе L_T параллелограмма с вершинами в точках $\pm\lambda_8 T\omega \pm \left(T+\frac{1}{2}\right)\omega'$, где целое число λ_8 подобрано так, чтобы окружность Γ_T содержалась внутри L_T. Выберем λ_9 так, чтобы L_T, в свою очередь, содержалась внутри окружности $\Gamma'_T : |z| = \lambda_9 T$. На L_T функция $\wp\left(z+\frac{\omega}{4}\right)$ ограничена числом λ_{10}, а функция $F_T(z)$ ограничена своим максимумом на окружности Γ'_T, так что на L_T, а значит, и на Γ_T, вследствие (38),

$$|f_T(z)| \leqslant qq_0Cn(2\lambda_0)^{n-1}(\lambda_9 T)^{q_0-1}\lambda_{10}^{q-1}{}^{\lambda_6 qT^2(1+\lambda_9)} \leqslant$$
$$\leqslant Ce^{\lambda_{11}(qT^2+q_0\ln T)}, \quad \lambda_{11} \geqslant \lambda_6. \tag{39}$$

Пусть $T=[7|\omega|\lambda_7^{-1}x_p]$. Из равенства

$$f_T^{(s)}(\omega x) = \sum_{t=0}^{s} C_s^t f^{(t)}(\omega x) F_T^{(s-t)}(\omega x)$$

и неравенств (37), (38) для $x=0, \pm 1, \ldots, \pm x_p$; $s=0, 1, \ldots, s_p-1$, учитывая границы для p и вытекающее из (24′) неравенство

$$4\lambda_6(7|\omega|^2\lambda_7^{-1}+49|\omega|^2\lambda_7^{-2}) < 28\cdot 7\lambda_{11}(1+\lambda_7^{-1})^2|\omega|^2 < \lambda < \frac{\lambda^2}{10},$$

получим оценку

$$|f^{(s)}(\omega x)| \leqslant$$
$$\leqslant 2^s e^{-\frac{1}{2}\lambda^{12}n^4N\ln^5 N + s\ln s + \lambda_6\lambda^2 N\ln N\cdot|\omega|7\lambda_7^{-1}2^p\lambda n\ln N(7|\omega|\lambda_7^{-1}2^p\lambda n\ln N+|\omega|\lambda n\ln N)} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^{12}n^4N\ln^5 N+\lambda_6(7|\omega|^2\lambda_7^{-1}+49\lambda_7^{-2}|\omega|^2)2^{2p}\lambda^4n^2N\ln^3 N+O(n^2N\ln^4 N)} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{2}{5}\lambda^{12}n^4N\ln^5 N}, \quad N \geqslant N_3. \tag{40}$$

Воспользуемся леммой 7,I. Пусть

$$\zeta=\omega, \quad l_0=s_p, \quad \sigma=0, \quad k=6, \quad k_1=2,$$
$$k_2=3, \quad R=|\omega|x_p, \quad \varphi(z)=f(z), \quad \delta=e^{-0,4\lambda^{12}n^4N\ln^5 N}.$$

По формуле (4,I), вследствие (40), для $|z| \leqslant 2|\omega|x_p$ справедливо неравенство

$$|f_T(z)| \leqslant e^{O(n^2N\ln^3 N)}\{2\max_{|z|\leqslant 6|\omega|x_p}|f_T(z)|\cdot 3{,}5^{-x_ps_p}+$$
$$+e^{-0,4\lambda^{12}n^4N\ln^5 N+(2+\pi+\ln 10)x_ps_p+O(n^2N\ln^3 N)}\}.$$

Так как для $N \geqslant N_4$ будет $6x_p|\omega| < \lambda_7 T$, то, вследствие (39),

$$\max_{|z|\leqslant 6x_p|\omega|}|f_T(z)| \leqslant e^{(1+49\lambda_{11}|\omega|^2\lambda_7^{-2})\lambda^4n^2 2^{2p}N\ln^3 N+O(n^2\ln^3 N)},$$

так что для $|z| \leqslant 2|\omega|x_p$

$$|f_T(z)| \leqslant e^{\lambda^4(1+49\lambda_{11}|\omega|^2\lambda_7^{-2})2^{2p}N\ln^3 N-\lambda^6\ln 3{,}5\cdot 2^{2p}n^2N\ln^3 N+O(n^2N\ln^{5/2} N)}+$$
$$+e^{-0,4\lambda^{12}n^4N\ln^5 N+(2+\pi+\ln 10)4\lambda^{11}n^4N\ln^5 N+O(n^4N\ln^{9/2}N)}.$$

Однако, вследствие выбора λ,

$$\lambda\cdot\ln 3{,}5-(1+49\lambda_{11}|\omega|\lambda_7^{-2})>1{,}25\lambda-(1+49\lambda_{11}|\omega|\lambda_7^{-2})>\lambda,$$
$$\frac{2}{5}\lambda-4(2+\pi+\ln 10)>48-40>4,\qquad 4\lambda^6n^2\ln^2 N\geqslant 2^{2p},$$

поэтому для $N\geqslant N_5$

$$|f_T(z)|\leqslant e^{-2^{2p}\lambda^5n^2N\ln^3 N},\qquad |z|\leqslant x_{p+1}|\omega|. \tag{41}$$

Но нам нужна оценка величин $f^{(s)}(\omega x)$, для вывода которой из (41) следует оценить снизу функцию $F_T(z)$ в окрестности точек $z=\omega x$. Функция $F_T(z)$ имеет период ω, поэтому достаточно рассмотреть окрестность точки $z=0$. Пусть

$$\frac{\omega'}{\omega}=\alpha+\beta i,\quad \frac{1}{\omega}=\alpha_1+\beta_1 i,\quad \varepsilon=\min\left\{\frac{|\omega|}{8},\ \frac{|\beta|}{2\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|\alpha_1\sin\theta+\beta_1\cos\theta|}\right\}.$$

Как известно, $\beta\neq 0$. Рассмотрим круг $|z|\leqslant\varepsilon$. На его границе

$$A_r(z)=\cos\left(\frac{\pi z}{\omega}-\frac{\pi r\omega'}{\omega}-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\cos\left(\{\pi\alpha_1+\pi\beta_1 i\}\varepsilon\{\cos\theta+i\sin\theta\}-\pi r\alpha-\pi r\beta i-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\cos\left(\pi r\alpha-\pi\varepsilon\{\alpha_1\cos\theta-\beta_1\sin\theta\}+\frac{\pi}{4}+\pi r\beta i-\pi\varepsilon\{\alpha_1\sin\theta+\beta_1\cos\theta\}i\right).$$

Так как функция $|e^x-e^{-x}|$ для вещественных x растет вместе с $|x|$, а

$$|\beta-\varepsilon(\alpha_1\sin\theta+\beta_1\cos\theta)|\geqslant\frac{1}{2}|\beta|,$$

то для $r\neq 0$ и $|z|<\varepsilon$

$$|A_r(z)|\geqslant\frac{1}{2}\left|e^{\pi r|\beta|-\pi\varepsilon(\alpha_1\sin\theta+\beta_1\cos\theta)}-e^{-\pi r|\beta|+\pi\varepsilon(\alpha_1\sin\theta+\beta_1\cos\theta)}\right|\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\left|e^{\frac{1}{2}\pi|\beta|}-e^{-\frac{1}{2}\pi|\beta|}\right|=\lambda_{12}>0,$$

а для $r=0$, вследствие условия $\varepsilon\leqslant\frac{|\omega|}{8}$,

$$|A_0(z)|=\left|\cos\left(\frac{\pi}{\omega}\varepsilon e^{i\theta}-\frac{\pi}{4}\right)\right|\geqslant\lambda_{13}>0.$$

Таким образом, в кругах $|z-\omega x|\leqslant\varepsilon$ справедлива оценка

$$|F_T(z)|\geqslant\lambda_{14}^{2(q-1)(2T+1)}\geqslant e^{O(2^pnN\ln^3 N)}.$$

Отсюда и из (41) для $|z-\omega x|\leqslant\varepsilon$, $x=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm x_{p+1}$, $N\geqslant N_6$, выводим

$$|f(z)|=|f_T(z)\cdot F_T^{-1}(z)|\leqslant e^{-0{,}5\lambda^5 2^{2p}n^2N\ln^3 N},$$

а оценив интеграл Коши, получим неравенство

$$|f^{(s)}(\omega x)|\leqslant\frac{s!}{2\pi i}\left|\int\limits_{|\zeta-\omega x|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\omega x)^{s+1}}\right|\leqslant e^{s_{p+1}\ln s_{p+1}-s_{p+1}\ln\varepsilon-0{,}5\lambda^5n^2 2^{2p}N\ln^3 N}\leqslant$$
$$\leqslant e^{-0{,}4\lambda^5 2^{2p}n^2N\ln^3 N},\quad N\geqslant N_7;\ x=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm x_{p+1};$$
$$s=0,\ 1,\ \ldots,\ s_{p+1}-1. \tag{42}$$

Для этих s и x снова воспользуемся леммой 4, I. Теперь уже

$$N_0 < 2\lambda_4 2^p \lambda^4 nN \ln^2 N,$$

$$A = A_{s,x} \leqslant \exp\{5\lambda^4 nN \ln^3 N + 3\lambda^4 2^p nN \ln^3 N + O(2^p nN \ln^{5/2} N)\},$$

поэтому или $f_{s,x}(\xi) = 0$, или

$$|f_{s,x}(\xi)| \geqslant e^{-\gamma(7+3\cdot 2^p)\lambda^4 n^2 N \ln^3 N + O(2^p n^2 N \ln^{5/2} N)}. \tag{43}$$

Для $N \geqslant N_8$ неравенства (42) и (43) становятся противоречивыми и, следовательно, $f_{s,x}(\xi) = 0$, а

$$|f^{(s)}(\omega x)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^{12} n^4 N \ln^5 N},$$

$$N \geqslant N_9; \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_{p+1}; \quad s = 0, 1, \ldots, s_{p+1}.$$

Лемма C доказана.

Неравенство (37) показывает, что для $p = 0$ условия леммы C выполнены. Последовательно применяя лемму C, придем к равенствам:

$$f_{s,x}(\xi) = 0, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm \bar{x}; \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1,$$

$$\bar{x} = 2^{[\ln(2\lambda^8 n \ln N)/\ln 2]+1} x_0 > \lambda^4 n^2 \ln^2 N \geqslant q_0, \quad N \geqslant N_{10} = \max(N_2, N_9). \tag{44}$$

Выберем qq_0 равенств

$$f_{s,x}(\xi) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} \sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\,(\xi x)^{k-t}}{(k-t)!} p_{l,s-t} = 0, \quad p_{l,m} = \frac{d}{dz^m} \wp^l(z)\Big|_{z=\frac{\omega}{4}},$$

$$x = 0, 1, \ldots, q_0 - 1; \quad s = 0, 1, \ldots, q - 1.$$

Это — система линейных однородных уравнений относительно qq_0 величин $C_{k,l}$. Рассмотрим определитель D этой системы.

Пусть

$$A_{s,x}^{l,k}(z) = \sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\,x^{k-t}}{(k-t)!} z^{k-t} p_{l,s-t}.$$

Введем определитель

$$D(z) = \left| A_{s,x}^{l,k}(z) \right|_{\substack{s,\, l=0, 1, \ldots, q-1 \\ x,\, k=0, 1, \ldots, q_0-1}},$$

тогда $D = D(\xi)$. Строку определителя $D(z)$, отвечающую индексам s, x, будем называть строкой (s, x). Определитель $D(z)$ является полиномом от z степени $\frac{1}{2} qq_0(q_0 - 1)$. Для производных этого определителя справедливо равенство

$$D^{(s)}(z) = \sum_{\sigma_1+\ldots+\sigma_{qq_0}=s} D_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{qq_0}}(z),$$

где определитель $D_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{qq_0}}(z)$ получается из $D(z)$ заменой элементов i-й строки на их производные порядка σ_i, $i = 1, 2, \ldots, qq_0$, а суммирование ведется по всем возможным решениям уравнения $\sigma_1 + \sigma_2 \ldots + \sigma_{qq_0} = s$ в целых $\sigma_i \geqslant 0$. Рассмотрим $D^{(s)}(0)$. Так как

$$\frac{d^\sigma}{dz^\sigma} A_{s,x}^{l,k}(z)\Big|_{z=0} = \begin{cases} C_s^{k-\sigma}\, k!\, x^\sigma p_{l,s-k+\sigma}, & k \geqslant \sigma, \\ 0, & k < \sigma, \end{cases}$$

то $D_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{qq_0}}(0) = 0$, если хотя бы для одного $s = \bar{s}$ две строки $(\bar{s}, x_1)$ и $(\bar{s}, x_2)$ продифференцированы одинаковое число раз, так как после вынесения за знак определителя из строки $(\bar{s}, x_1)$ множителя x_1^{σ}, а из строки $(\bar{s}, x_2)$ множителя x_2^{σ} получим две равных строки.

Таким образом, если $D^{(s)}(0) \neq 0$, то хотя бы один из определителей $D_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{qq_0}}(z)$, $\sigma_1 + \cdots + \sigma_{qq_0} = s$ обладает тем свойством, что среди его индексов σ_i нет $q+1$ элементов, равных одному и тому же числу. Но тогда

$$s = \sigma_1 + \cdots + \sigma_{qq_0} \geqslant q \cdot 0 + q \cdot 1 + q \cdot 2 + \cdots + q(q_0 - 1) = \frac{1}{2} qq_0(q_0 - 1),$$

т. е. в точке $z = 0$ первая отличная от нуля производная $D^{(s)}(z)$ имеет порядок не меньше степени полинома $D(z)$, так что $D(z)$ сводится к своему старшему члену:

$$D(z) = d_0 z^{\frac{1}{2} qq_0(q_0-1)} = \left| x^k z^k p_{l,s} \right|_{\substack{s,\, l = 0, 1, \ldots, q-1 \\ x,\, k = 0, 1, \ldots, q_0 - 1}} =$$

$$= \left| x^k p_{l,s} \right|_{\substack{s,\, l = 0, 1, \ldots, q-1 \\ x,\, k = 0, 1, \ldots, q_0 - 1}} \cdot z^{\frac{1}{2} qq_0(q_0-1)}.$$

Пусть

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} p_{0,0} & \ldots & p_{q-1,0} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ p_{0,q-1} & \ldots & p_{q-1,q-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2^{q_0-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 1 & q_0 - 1 & \ldots & (q_0-1)^{q_0-1} \end{vmatrix},$$

тогда символически d_0 можно записать так:

$$d_0 = \left| (x^k;\ \Delta_0) \right|_{x,\, k = 0, 1, \ldots, q_0 - 1},$$

подразумевая под $(x^k;\ \Delta_0)$ квадратную таблицу, состоящую из элементов определителя Δ_0, каждый из которых умножен на x^k. Пусть

$$\delta_0 = |a_{i,j}|_{i,j = 0, 1, \ldots, q_0 - 1} \neq 0, \quad \delta_1 = |b_{ij}|_{i,j = 0, 1, \ldots, q-1} \neq 0, \quad b_{0,0} \neq 0.$$

Рассмотрим определитель

$$d_1 = |(b_{i,j};\ \delta_0)|_{i,j = 0, 1, \ldots, q-1},$$

подразумевая под $(b_{i,j};\ \delta_0)$ квадратную таблицу, состоящую из элементов определителя δ_0, каждый из которых умножен на $b_{i,j}$. Вычитанием столбцов приведем его к виду

$$d_1 = \begin{vmatrix} (b_{0,0}; \delta_0) & 0 & \ldots & 0 \\ (b_{1,0}; \delta_0) & (b'_{1,1}; \delta_0) & \ldots & (b'_{1,q-1}; \delta_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ (b_{q-1,0}; \delta_0) & (b'_{q-1,1}; \delta_0) & \ldots & (b'_{q-1,q-1}; \delta_0) \end{vmatrix} =$$

$$= b_{0,0}^{q_0} \delta_0 \left| (b'_{i,j}; \delta_0) \right|_{i,j = 1, 2, \ldots, q-1}.$$

Продолжая этот процесс дальше, придем к равенству

$$d_1 = \delta_0{}^q \gamma_0,$$

где γ_0 не зависит от элементов определителя δ_0. Аналогичным образом получаем равенство

$$d_1 = \delta_1^{q_0} \gamma_1,$$

где γ_1 не зависит от элементов определителя δ_1, так что

$$d_1 = \gamma_2 \delta_1^q \delta_0^{q_0},$$

где γ_2 не зависит от элементов определителей δ_0 и δ_1. Если положить

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & 1 \end{vmatrix},$$

то увидим, что $\gamma_2 = 1$.

Итак, $d_1 = \delta_0{}^q \delta_1{}^{q_0}$, а

$$d_0 = \Delta_0^{q_0} \Delta_1^q,$$

где Δ_1 — определитель Вандермонда, отличный от нуля. Покажем, что и $\Delta_0 \neq 0$.

Формула для производной произведения нескольких функций приводит к равенству

$$p_{l,\, s} = s! \sum_{s_1 + \ldots + s_l = s} \frac{p_{1,\, s_1}}{s_1!} \cdots \frac{p_{1,\, s_l}}{s_l!}.$$

Пусть $s = \sum_{i=0}^{s} i \cdot a_i$, $l = a_0 + a_1 + \cdots + a_s$, a_i — целые неотрицательные числа. Положим

$$\pi_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_s} = p_{1,\,0}^{a_0} \cdot p_{1,\,1}^{a_1} \cdots p_{1,\,s}^{a_s} = p_{1,\,0}^{a_0}\, \tau_{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_s};$$

тогда

$$p_{l,\, s} = \sum_{\substack{a_0 + \cdots + a_s = l \\ a_1 + 2a_2 + \cdots + sa_s = s}} B_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_s} \pi_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_s},$$

где

$$B_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_s} = \frac{s!}{2!^{a_2} \cdot 3!^{a_3} \ldots s!^{a_s}} C_l^{a_0} C_{l-a_0}^{a_1} \cdots C_{l-a_0-\cdots-a_{s-2}}^{a_{s-1}} = C_l^{a_0} \cdot A_{a_1,\, \ldots,\, a_s},$$

причем $A_{a_1,\, \ldots,\, a_s}$ не зависит от l и a_0. Наименьшим l, при котором в разложении $p_{l,\, s}$ (s фиксировано) встретится элемент $\tau_{a_1,\, \ldots,\, a_s}$, будет, очевидно,

$$l_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_s \leqslant s$$

и коэффициентом при этом элементе будет число

$$B_{0,\, a_1,\, \ldots,\, a_s} = A_{a_1,\, \ldots,\, a_s}.$$

В разложениях чисел $p_{l_0+\lambda,\, s}$, $\lambda > 0$ будет слагаемое

$$C_{l_0+\lambda}^{l_0}\, p_{1,0}^{\lambda} A_{a_1,\, \ldots,\, a_s} \tau_{a_1,\, \ldots,\, a_s}.$$

Для вычисления Δ_0 проделаем следующее*: сперва из l-го столбца

* Величина определителя Δ_0 равна величине минора элемента $p_{0,0}$, так как $p_{0,i} = 0$, $i > 0$. Наши рассуждения относятся к вычислению этого минора.

($l=2,3,\ldots,q-1$) вычтем первый, умноженный на $C_l^1 p_{1,0}^{l-1}$, затем из нового l-го столбца ($l=3,4,\ldots,q-1$) — новый второй столбец, умноженный на $C_l^2 p_{1,0}^{l\,2}$, затем из получившегося после этой операции l-го столбца — третий столбец, умноженный на $C_l^3 p_{1,0}^{l-3}$, и т. д. Закончим процесс, вычтя из последнего столбца $q-3$ раза преобразованный предпоследний, умноженный на $C_{q-1}^{q-2} p_{1,0}$. В результате все слагаемые вида $B_{a_0,\ldots,a_s}\pi_{a_0,\ldots,a_s}$ с $a_0>0$ будут уничтожены. Эта операция приведет к уничтожению всех элементов определителя, стоявших правее главной диагонали, так как все такие элементы имели $l>s$ и, следовательно, состояли из слагаемых с $a_0>0$. На главной диагонали $l=s$, и если $a_0=0$, то равенства $a_1+\cdots+a_s=s$ и $a_1+2a_2+\cdots+sa_s=s$ показывают, что $a_2=a_3=\cdots=a_s=0$, $a_1=s$, так что в s-й строке на главной диагонали останется лишь элемент $s!\,p^s{}_{11}$ и

$$\Delta_0=\prod_{s=1}^{q-1}(s!\,P_{1,1}^s)=\prod_{s=1}^{q-1}s!\cdot P_{1,1}{}^{\frac{1}{2}q(q-1)}.$$

В точке $\frac{\omega}{4}$ функция $\wp'(z)$ отлична от нуля, так что $\Delta_0\neq 0$.

Итак, $d_0\neq 0$, и если $\xi\neq 0$ (а это можно предположить), то $D(\xi)\neq 0$. Но тогда все числа $C_{k,l}$ равны нулю, а так как ξ — алгебраическое число степени n, то все числа $C_{k,l}^{(\tau)}$ равны нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть ω — период функции $\wp(z)$. Существует такое число γ_6, зависящее лишь от ω и $\wp(z)$, что*

$$|P(\omega)|>e^{-\gamma_6 n^4(\ln H+n\ln n+1)\ln^4(\ln H+n\ln n+2)},$$

где $P(z)\neq 0$ — полином с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H.

Эта теорема выводится из теоремы 1 так же, как теорема 2,I была выведена из теоремы 1,I.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\wp(\alpha)$ — алгебраическое число, $\varkappa>0$. Существует такое число γ_7, зависящее лишь от $\varkappa$ g_2, g_3 и α, что*

$$|\xi-\alpha|>e^{-\exp\{\ln\ln H+n^{2+\varkappa}+n\gamma_7\sqrt{\ln\ln H+n^{2+\varkappa}}\}},$$

где ξ — любое алгебраическое число степени n и высоты H.

Доказательство. Считаем, что отношение α/ω иррационально для любого периода ω функции $\wp(z)$. Если это не так, то теорема вытекает из теоремы 1.

Пусть $N^{2+2\varkappa}=\ln\ln H+n^{2+\varkappa}$. Буквами λ_0, λ_1, λ_2, ... будем обозначать положительные числа, зависящие лишь от $\varkappa$, α, g_2 и g_3, но не зависящие от n, H, N и λ. Уравнения (1) и (2) показывают, что $\wp'(\alpha)$ и $\wp''(\alpha)$ — также алгебраические числа. Пусть поле алгебраических чисел K степени ν, образованное присоединением к полю рациональных чисел целого числа θ, содержит элементы $\wp(\alpha)$, $\wp'(\alpha)$, $\wp''(\alpha)$, а γ — число из леммы 4,I, соответствующее случаю $\alpha_1=\theta$. Положим

$$\lambda=25(2+\gamma+|\ln\lambda_3|+|\ln\lambda_5|+|\gamma\ln\lambda_7|),\quad \Lambda=2\lambda^2. \qquad 44'$$

Покажем, что неравенство

$$|\xi-\alpha| < e^{-\exp\{N^{2+2\varkappa}+\Lambda n N^{1+\varkappa}\}} \tag{45}$$

для $N \geqslant N_{10}$ невозможно. Пусть, наоборот, неравенство (45) выполняется для сколь угодно больших N. Положим

$$q=[\lambda n^{-1}N^{-1-\varkappa}e^{N^{2+2\varkappa}}], \quad q_0=[ne^{\lambda^2 n N^{1+\varkappa}}], \quad C=[e^{\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}] \tag{46}$$

и рассмотрим функцию

$$\begin{gathered} f(z)=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} z^k \wp^l(z+\alpha), \\ C_{k,l}=\sum_{\tau=0}^{n-1} C_{k,l}^{(\tau)}\xi^\tau, \quad |C_{k,l}| \leqslant C. \end{gathered} \tag{47}$$

Для производных этой функции справедливо равенство

$$f^{(s)}(z)=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l}\sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\, z^{k-t}}{(k-t)!}(\wp^l(z+\alpha))^{(s-t)}. \tag{48}$$

Оценим числа $p_{l,s,x}=(\wp^l(z+\alpha))^{(s)}_{z=2\alpha x}$. Из леммы 2 имеем

$$\begin{gathered} p_{l,s,x}=\sum_{2a+3b+4c=s+2l} \gamma_{a,b,c}^{(ls)} p_{1,0,x}^a p_{1,1,x}^b p_{1,2,x}^c, \\ \sum_{2a+3b+4c=s+2l} |\gamma_{a,b,c}^{(l,s)}| \leqslant s!\, \lambda_1^{s+l}, \end{gathered} \tag{48'}$$

а из леммы 3

$$|p_{1,0,x}|, \quad |p_{1,1,x}|, \quad |p_{1,2,x}| \leqslant \lambda_2^{x^2+1},$$

поэтому

$$|p_{l,s,x}| \leqslant s!\, \lambda_1^{s+l} \lambda_2^{(x^2+1)(s+l)}. \tag{49}$$

Пусть

$$\begin{gathered} x=0, \pm 1, \ldots, \pm x_0; \quad s=0, 1, \ldots, s_0-1; \quad x_0=[N^{1+\varkappa}], \\ s_0=[N^{-2-2\varkappa}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}]. \end{gathered} \tag{50}$$

Из (48) и (49) находим

$$|f^{(s)}(2\alpha x)| \leqslant C q_0!\, x_0^{q_0} s_0!\, \lambda_3^{x_0^2(s_0+q)+q_0}.$$

Разобьем $f^{(s)}(2\alpha x)$ на вещественную и мнимую части. Получим $m_0=2s_0(2x_0+1)$ линейных однородных форм от $r=qq_0n$ величин $C_{k,l}^{(\tau)}$. По лемме 1,I целые рациональные в совокупности отличные от нуля числа $C_{k,l}^{(\tau)}$ можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли условию (47) и чтобы выполнялись неравенства

$$|f^{(s)}(2\alpha x)| \leqslant \operatorname{Re} f^{(s)}(2\alpha x)| + |\operatorname{Im} f^{(s)}(2\alpha x)| \leqslant \frac{4Cq_0!\, x_0^{q_0} s_0!\, \lambda_3^{x_0^2(s_0+q)+q_0}}{(C+1)^{\frac{nqq_0}{2s_0(2x_0+1)}}-2}, \tag{51}$$

$$x=0, \pm 1, \ldots, \pm x_0; \quad s=0, 1, \ldots, s_0-1.$$

Из (46) и (50) вытекают неравенства

$$\left.\begin{aligned} &q_0! \leqslant \exp\left\{\lambda^2 n^2 N^{1+\varkappa} e^{\lambda^2 n N^{1+\varkappa}} + n \ln n e^{\lambda^2 n N^{1+\varkappa}}\right\}, \\ &x_0^{q_0} \leqslant \exp\left\{n(1+\varkappa)\ln N e^{\lambda^2 n N^{1+\varkappa}}\right\}, \\ &s_0! \leqslant \exp\left\{e^{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}} + O\left(N^{-\frac{1}{2}\varkappa} e^{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}}\right)\right\}, \\ &\lambda_3^{x_0^2(s_0+q)+q_0} \leqslant \exp\left\{\left[\ln\lambda_3 + O\left(N^{-\frac{1}{2}\varkappa}\right)\right] e^{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}}\right\}, \\ &\qquad \frac{nq q_0}{2s_0(2x_0+1)} \geqslant \frac{\lambda n}{4} + O\left(\frac{n}{\ln N}\right), \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

так что, вследствие выбора λ,

$$|f^{(s)}(2\alpha x)| \leqslant e^{-\left\{\frac{\lambda n}{4} - 2\ln\lambda_3 + O\left(\frac{n}{\ln N}\right)\right\}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\lambda n}{5}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}, \quad N \geqslant N_1;\ x = 0, \pm 1, \ldots, \pm x_0;\ s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1. \quad (53)$$

Выражение $f^{(s)}(2\alpha x)$ является полиномом от α. Символом $f_{s,x}(z)$ обозначим полином, получающийся из $f^{(s)}(2\alpha x)$ заменой α на z. Тогда $f_{s,x}(\alpha) = f^{(s)}(2\alpha x)$. Из равенства

$$f_{s,x}(\xi) - f_{s,x}(\alpha) = \int_\alpha^\xi f'_{s,x}(\eta)\, d\eta$$

и (45) выводим неравенство

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant |f_{s,x}(\alpha)| + e^{-\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda n N^{1+\varkappa}\}} M_{s,x}, \quad (54)$$

где

$$M_{s,x} = \max_{\eta=\xi+\theta(\alpha-\xi)} |f'_{s,x}(\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\eta=\xi+\theta(\alpha-\xi)} \left| \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} \sum_{t=0}^{k-1} C_s^t \frac{k!\, x^{k-t} \eta^{k-t-1}}{(k-t-1)!} p_{l,s-t,x} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C q_0! (|x|+1)^{q_0} s!\, \lambda_4^{(x^2+1)(s+q)+q_0}. \quad (55)$$

Для s и x из (40), вследствие (52), (53) и (55),

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant e^{-\frac{\lambda n}{5}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}} +$$

$$+ e^{-\exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\} + O(\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\})} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\lambda n}{6}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}, \quad N \geqslant N_2. \quad (56)$$

Вследствие (48) получаем:

$$f_{s,x}(\xi) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} \left(\sum_{\tau=0}^{n-1} C_{k,l}^{(\tau)} \xi^\tau \right) \left(\sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\,(2x)^{k-t}}{(k-t)!} \xi^{k-t} p_{l,s-t,x} \right). \quad (57)$$

По лемме 3, числа $p_{1,0,x}$, $p_{1,1,x}$ и $p_{1,2,x}$ можно представить в виде полинома от θ степени $\nu-1$ с рациональными коэффициентами, причем числители коэффициентов и их общий знаменатель W по абсолютной величине не превосходят числа $\lambda_5^{(2x+1)^2}$, так что, вследствие (48'), число $W^{s+l}\,p_{l,s,x}$ будет полиномом от θ степени $\overline{N} \leqslant (\nu-1)(s+l)$ с целыми коэффициентами, абсолютная величина которых не больше $s!\,\lambda_6^{(s+l)(2x+1)^2}$. Выражение $f_{s,x}(\xi)\cdot W^{s+q}=\beta_{s,x}$ будет полиномом с целыми рациональными коэффициентами от θ и ξ. Воспользуемся леммой 4,I. Здесь

$$\alpha_1=\theta,\quad \xi_1=\xi,\quad M=q_0+n-2,\quad n_0=n,\quad H_0 \leqslant \exp e^{N^{2+2\varkappa}},$$
$$N_0 \leqslant (\nu-1)(s+q).$$

Оценим A.

$$A=A_{s,x} \leqslant qq_0\,nC2^s\cdot(q_0-1)!\,(2|x|+1)^{q_0}\cdot s!\,\lambda_6^{(s+q)(2x+1)^2} \leqslant$$
$$\leqslant Cq_0!\,(2|x|+1)^{q_0}\,s!\,\lambda_7^{(s+q)(2x+1)^2} \tag{58}$$

и для s и x из (50), вследствие (52),

$$A_{s,x} \leqslant e^{\{2+4\ln\lambda_7+O(\ln^{-1}N)\}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\}}.$$

Возьмем s и x из (50). Если $f_{s,x}(\xi) \neq 0$, то, по формуле (1,1)

$$|f_{s,x}(\xi)| \geqslant W^{-s_0-q}.$$
$$\cdot\, e^{-\gamma\{(q_0+n-2)(n+e^{N^{2+2\varkappa}})+n[\nu(s_0+q)+\{2+\ln\lambda_7+O(\ln^{-1}N)\}\exp(N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 nN^{1+\varkappa})]\}} \geqslant$$
$$\geqslant e^{-n\{4\ln\lambda_5+3\gamma+4\gamma\ln\lambda_7+O(\ln^{-1}N)\}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\}}. \tag{59}$$

Условие (44') показывает, что для $N \geqslant N_3$ неравенства (56) и (59) становятся противоречивыми; следовательно, $f_{s,x}(\xi)=0$ для s и x из (50) и $N \geqslant N_3$. Теперь обычным путем, как и при доказательстве теоремы 1, приходим к неравенству

$$|f^{(s)}(2\alpha x)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\}},\quad N \geqslant N_4;\quad s=0,1,\ldots,s_0-1;$$
$$x=0,\pm 1,\ldots,\pm x_0. \tag{60}$$

Пусть ω и ω' — основные периоды функции $\wp(z)$. Функция $f(z)$ регулярна везде, кроме точек $m\omega+m'\omega'-\alpha$, где m и m' — целые рациональные числа. В этих точках $f(z)$ может иметь полюсы, но порядка не выше $2q-2$. Пусть T — целое положительное число. Введем функции

$$F_T(z)=\prod_{r=-T}^{T}\sin^{2q-2}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\alpha}{\omega}-\pi r\frac{\omega'}{\omega}\right),$$
$$f_T(z)=f(z)\cdot F_T(z). \tag{61}$$

Функция $F_T(z)$ в точках $z=m\omega+m'\omega'-\alpha$, $-\infty<m<+\infty$, $-T \leqslant m' < T$, имеет нули порядка $2q-2$, так что функция $f_T(z)$ регулярна в полосе G: $z=\tau\omega+\tau'\omega'-\alpha$, $-\infty<\tau<\infty$, $-T-\frac{1}{2} \leqslant \tau' \leqslant T+\frac{1}{2}$.

По аналогии с неравенством (38) выводится неравенство

$$|F_T^{(s)}(z)| \leqslant s!\, e^{\lambda_8 q T (T+|z|)}. \tag{61'}$$

Впишем в полосу G окружность Γ_T с центром в точке $z = -\alpha$. Пусть ее радиус равен ρ_T. Тогда

$$\lambda_9 T + O(1) \leqslant |-\alpha + \rho_T e^{2\pi i \theta_1}| \leqslant \lambda_{10} T. \tag{62}$$

Внутри окружности Γ_T и на ее границе функция $f_T(z)$ регулярна. Оценим $f_T(z)$ на Γ_T. Для этого оценим $f_T(z)$ на границе параллелограмма L_T с вершинами в точках

$$\pm\left(\lambda_{11} T + \frac{1}{2}\right)\omega \pm \left(T + \frac{1}{2}\right)\omega' - \alpha,$$

где целое число λ_{11} подобрано так, чтобы окружность Γ_T содержалась в L_T. Параллелограмм L_T, в свою очередь, можно поместить внутрь окружности $|z| = \lambda_{12} T$. На границе L_T функция $\wp(z+\alpha)$ ограничена числом λ_{13}, а функция $F_T(z)$ не превосходит по абсолютной величине своего максимума на окружности $|z| = \lambda_{12} T$. Поэтому, вследствие (61′), на границе L_T, а значит, и на границе Γ_T,

$$|f_T(z)| \leqslant e^{\lambda_8 q T (T+|z|)} q q_0 C n \lambda_{14}^{n-1} (\lambda_{12} T)^{q_0 - 1} \lambda_{13}^{q-1} \leqslant C e^{\lambda_{15}(qT^2 + q_0 \ln T)}. \tag{63}$$

Выясним поведение $F_T(z)$ в окрестности точек $z = 2\alpha x$. Положим $\lambda_0 = \min|2\alpha + m\omega + m'\omega'|$, где m и m' — целые числа. Очевидно, $\lambda_0 > 0$. Пусть

$$(2x+1)\alpha = r\omega' + k\omega + \varepsilon\omega,$$
$$(2x+3)\alpha = r_1\omega' + k_1\omega + \varepsilon_1\omega,$$

где r, r_1, k, k_1 — целые числа. Тогда

$$2\alpha + (r - r_1)\omega' + (k - k_1)\omega = (\varepsilon_1 - \varepsilon)\omega;$$

следовательно,

$$|\varepsilon_1| + |\varepsilon| \geqslant \frac{\lambda_0}{|\omega|}.$$

Итак, мы доказали, что хотя бы для одного из любых двух соседних чисел $x_1 = x$ и $x_2 = x + 1$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\pi(2x_i + 1)\alpha - \pi r\omega'}{\omega} - k\pi\right| \geqslant \frac{\pi\lambda_0}{2|\omega|},$$

где r и k — любые целые числа. Если $|z - 2\alpha x_i| \leqslant \frac{\lambda_0}{4}$, то

$$\left|\pi\frac{z+\alpha}{\omega} - \pi\frac{r\omega'}{\omega} - k\pi\right| \geqslant \frac{\pi\lambda_0}{4|\omega|}$$

для любых целых r и k. Но это условие означает, что

$$\left|\sin\left(\frac{\pi(z+\alpha)}{\omega} - \pi r\frac{\omega'}{\omega}\right)\right| \geqslant \lambda_{16}, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Таким образом, среди $2x_0 + 1$ чисел $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm x_0$ существует x_0 таких (назовем их $t_1 = 0,\ t_2, \ldots, t_{x_0}$), что

$$|F_T(z)| \geqslant \lambda_{16}^{2(2T+1)(q-1)}, \quad |z - 2t_i\alpha| \leqslant \frac{\lambda_0}{4}; \quad i = 1, 2, \ldots, x_0. \tag{64}$$

Положим $s_p = 2^p s_0$.

ЛЕММА D. *Пусть неравенство*

$$|f^{(s)}(2\alpha x)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\}} \tag{65}$$

справедливо для $x = t_1, t_2, \ldots, t_{x_0}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, s_p - 1$, *где*

$$p \leqslant \frac{\ln(3\lambda N^{1+\varkappa})}{\ln 2}.$$

Тогда, если $N \geqslant N_9$, *это неравенство справедливо для* $x = t_1, t_2, \ldots, t_{x_0}$ *и* $s = 0, 1, 2, \ldots, s_{p+1} - 1$, *и для тех же* s *и* x *будет* $f_{s,x}(\xi) = 0$.

Доказательство. Пусть

$$T = \left[\exp\left(\frac{\lambda^2 n}{2} N^{1+\varkappa}\right)\right].$$

Неравенство (63) и условия (46) показывают, что на границе Γ_T

$$|f_T(z)| \leqslant M = e^{\exp\{N^{2+2\varkappa} + n\lambda^2 N^{1+\varkappa}\}\{1+O(\ln^{-1} N)\}}. \tag{66}$$

Воспользуемся формулой для интерполирования с кратными узлами. Получим равенство

$$f_T(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_T}\left\{\frac{(z-2t_1\alpha)(z-2t_2\alpha)\cdots(z-2t_{x_0}\alpha)}{(\zeta-2t_1\alpha)(\zeta-2t_2\alpha)\cdots(\zeta-2t_{x_0}\alpha)}\right\}^{s_p}\frac{f_T(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+\sum_{i=1}^{x_0}\sum_{s=0}^{s_p-1}\frac{f_T^{(s)}(2t_i\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_i}\left\{\frac{(z-2t_1\alpha)(z-2t_2\alpha)\cdots(z-2t_{x_0}\alpha)}{(\zeta-2t_1\alpha)(\zeta-2t_2\alpha)\cdots(\zeta-2t_{x_0}\alpha)}\right\}^{s_p}\frac{(\zeta-2t_i\alpha)^s}{z-\zeta}\,d\zeta,$$

где Γ_i — окружность $|2t_i\alpha - \zeta| = |\alpha|$, а z находится внутри Γ_T и вне всех окружностей Γ_i. Пусть $|z| = 4x_0|\alpha|$. Тогда, вследствие (62) и (66),

$$|f_T(z)| \leqslant \frac{\lambda_{10}TM}{O(1) - 4x_0|\alpha| + \lambda_9 T}\left(\frac{6x_0|\alpha|}{\lambda_8 T + O(1) - 2x_0|\alpha|}\right)^{x_0 s_p} +$$

$$+ x_0 s_p |\alpha| \max_{\substack{0\leqslant s\leqslant s_p-1\\ 1\leqslant i\leqslant x_0}} |f_T^{(s)}(2t_i\alpha)|\left(\frac{6x_0|\alpha|}{|\alpha|}\right)^{x_0 s_p}\frac{(|\alpha|^{s_p}+1)}{x_0|\alpha|}.$$

Далее, в силу (65) и (61′), для $s = 0, 1, \ldots, s_p - 1$ получаем

$$|f_T^{(s)}(2t_i\alpha)| = \left|\sum_{\sigma=0}^{s} C_s^{\sigma} f^{(\sigma)}(2\alpha t_i)\cdot F_T^{(s-\sigma)}(2\alpha t_i)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{s_p} e^{-\frac{1}{2}\exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\}} s_p^{s_p} e^{\lambda_8 qT(T+2x_0|\alpha|)} \leqslant$$

$$\leqslant e^{0{,}5\exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\}+O(N^{1+\varkappa}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\})} \leqslant$$

$$\leqslant e^{0{,}4\exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\}}, \quad N \geqslant N_5.$$

Кроме того,

$$\frac{6x_0|\alpha|}{\lambda_8 T + O(1) - 2x_0|\alpha|} \leqslant O\left(N^{1+\varkappa}\exp\left\{-\frac{\lambda^2 n}{2}N^{1+\varkappa}\right\}\right),$$

$$2^p N^{-1-\varkappa}\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\}\{1+O(\ln^{-1}N)\} \leqslant s_p x_0 \leqslant$$

$$\leqslant 3\lambda\exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 nN^{1+\varkappa}\},$$

так что

$$\max_{|z| \leqslant 4x_0|\alpha|} |f_T(z)| \leqslant e^{-\{\lambda^2 n 2^{p-1}+O(n \ln^{-1} N)-1\} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}} +$$
$$+ e^{-0,4 \exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}+O(\ln N \cdot \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\})} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda^2 n 2^{p-2} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}, \quad N \geqslant N_6. \tag{67}$$

Пусть $|z-2t_i\alpha| \leqslant \frac{\lambda_0}{4}$, $i = 1, 2, \ldots, x_0$, тогда, вследствие (64) и (67),

$$|f(z)| = |f_T(z)|\,|F_T(z)|^{-1} \leqslant e^{-\lambda^2 n 2^{p-3} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}, \quad N \geqslant N_7.$$

Пусть $s = 0, 1, \ldots, s_{p+1}-1$. Тогда

$$|f^{(s)}(2\alpha t_i)| = \left|\frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-2\alpha t_i| = \frac{\lambda_0}{4}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-2\alpha t_i)^{s+1}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda^2 n 2^{p-3} \exp\{N^{2+2\varkappa}+n\lambda^2 N^{1+\varkappa}\}+2^{p+1} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}\{1+O(\ln^{-1} N)\}} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda^2 n 2^{p-4} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}, \quad N \geqslant N_8. \tag{68}$$

Рассмотрим снова $f_{s,x}(\xi)$, $x = t_1, t_2, \ldots, t_{x_0}$; $s = 0, 1, \ldots, s_{p+1}-1$. Из неравенств (54), (55) и (68) имеем

$$|f_{s,x}(\xi)| \leqslant e^{-\lambda^2 n 2^{p-4} \exp\{N^{2+2\varkappa}+n\lambda^2 N^{1+\varkappa}\}} +$$
$$+ e^{-\exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}+O(N^{1+\varkappa} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\})}. \tag{69}$$

Применим к числу $f_{s,x}(\xi) W^{s+q}$ лемму 4,I. Здесь

$$\alpha_1 = \theta, \quad \xi_1 = \xi, \quad n_0 = n, \quad H_0 \leqslant \exp e^{N^{2+2\varkappa}},$$
$$M_0 = q_0+n-2, \quad N_0 \leqslant (\nu-1)(s_{p+1}+q),$$

а вследствие (58),

$$A_{s,x} \leqslant e^{\exp\{N^{2+2\varkappa}+n\lambda^2 N^{1+\varkappa}\}+\{1+4\ln\lambda_7+O(\ln^{-1} N)\}\, 2^{p+1} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}.$$

Если $f_{s,x}(\xi) \neq 0$, то по формуле (1, I)

$$|f_{s,x}(\xi)| \geqslant W^{-s_{p+1}-q} e^{-\gamma\{(q_0+n-2)(n+e^{N^{2+2\varkappa}})+n([\nu-1][s_{p+1}+q]+\ln A_{s_{p+1},x})\}} \geqslant$$
$$\geqslant e^{-2^{p+1} n \{4\ln\lambda_6+3\gamma+4\gamma\ln\lambda_7+O(\ln^{-1} N)\} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}. \tag{70}$$

Для $N \geqslant N_9$ неравенства (69) и (70) противоречивы, так что для $N \geqslant N_9$ будет $f_{s,x}(\xi) = 0$. Теперь обычным способом устанавливаем неравенство

$$|f^{(s)}(2t_i\alpha| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\exp\{N^{2+2\varkappa}+2\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}}, \quad i = 1, 2, \ldots, x_0; \ s = 0, 1, \ldots, s_{p+1}-1.$$

Лемма D доказана.

Пусть теперь $N \geqslant N_{10} = \max(N_9, N_4)$. Неравенство (60) показывает, что условия леммы D выполнены для $p = 0$. Последовательно применяя лемму D, придем к равенству

$$f_{s,t_1}(\xi) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \bar{s}-1,$$
$$\bar{s} \geqslant 3\lambda N^{1+\varkappa} s_0 \geqslant 2,5\lambda N^{-1-\varkappa} \exp\{N^{2+2\varkappa}+\lambda^2 n N^{1+\varkappa}\}. \tag{71}$$

Так как $t_1 = 0$, то

$$f_{s,\, t_1}(\xi) = f_{s,\,0}(\alpha) = f^{(s)}(\alpha), \quad s = 0,\ 1, \ldots,\ \bar{s} - 1.$$

Но тогда из (46), (71) и леммы 4,I вытекает, что все коэффициенты C_k равны нулю, а так как ξ — корень уравнения степени n, то все числа $C_{k,\,l}^{(\tau)}$ равны нулю. Но это не так. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\wp(\alpha)$ — *алгебраическое число,* $\varkappa > 0$. *Существует такое число* γ_8, *зависящее лишь от* $\varkappa$, α, g_2, g_3, *что*

$$|P(\alpha)| > e^{-\exp\left\{\ln\ln H + n^{2+\varkappa} + \gamma_8 n \sqrt{\ln\ln H + n^{2+\varkappa}}\right\}},$$

где $P(z) \not\equiv 0$ — полином с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H.

Эта теорема выводится из теоремы 3, так же как теорема 2, I была выведена из теоремы 1,I.

Трансцендентность чисел, рассматриваемых в теоремах 1, 2, 3 и 4, была доказана Т. Шнейдером ([4]) в 1936 г.

Теорема 3 может быть использована для построения примеров трансцендентных чисел.

Поступило
15. IX. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I, Известия Ак. Наук СССР, серия матем. 15 (1951),, 53—74.

[2] Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, Доклады Ак. Наук СССР, 66 (1949), 565—567.

[3] Уиттекер и Ватсон., Курс современного анализа, М.—Л., 1934.

[4] Schneider Th., Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, Math. Ann., 113 (1936), 1—13.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 177—184

Л. А. СКОРНЯКОВ

ПРАВО-АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ТЕЛА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе доказывается, что всякое право-альтернативное тело характеристики $\neq 2$ альтернативно. Отсюда вытекает, что из выполнения малой теоремы Дезарга на двух прямых следует ее проективное выполнение.

Неассоциативное кольцо называется *право-альтернативным*, если в нем выполняется тождество

$$(ab)\,b = a\,(bb). \tag{1}$$

Если *ассоциатором* назвать выражение

$$[a,\, b,\, c] = (ab)\,c - a\,(bc),$$

то тождество (1) равносильно тождеству

$$[a,\, b,\, b] = 0. \tag{2}$$

Алберт ([2]) доказал, что всякая полупростая право-альтернативная алгебра конечного ранга над полем характеристики нуль альтернативна, т. е. в ней, кроме (1), выполняется также соотношение

$$(aa)\,b = a\,(ab).$$

В настоящей работе доказывается теорема, частично обобщающая результат Алберта:

Всякое право-альтернативное тело характеристики $\neq 2$ * *альтернативно.*

Этот результат позволяет положительно ответить на вопрос, поставленный автором в ([1]):

Выполнение малой теоремы Дезарга на двух прямых проективной плоскости, характеристика которой $\neq 2$, *влечет ее проективное выполнение.*

§ 1

Начнем доказательство теоремы.

Сначала выведем ряд соотношений, имеющих место в право-альтернативных кольцах.

Поскольку, ввиду (2), $[a,\, b+c,\, b+c] = 0$, а ассоциатор линеен относительно каждого из своих аргументов, то

$$[a,\, b,\, b] + [a,\, b,\, c] + [a,\, c,\, b] + [a,\, c,\, c] = 0,$$

* Т. е. равенство $2a = 0$ влечет за собой $a = 0$.

откуда

$$[a, b, c] = -[a, c, b]. \tag{3}$$

Далее, непосредственным подсчетом проверяется, что во всяком кольце имеет место следующее соотношение:

$$[a, b, cd] - [a, bc, d] + [a, b, cd] = a[b, c, d] + [a, b, c]d. \tag{4}$$

Отсюда при помощи (2) получаем

$$\begin{aligned} c[a, b, a] &= [ca, b, a] - [c, ab, a] + [c, a, ba] - [c, a, b]a, \\ c[a, a, b] &= [ca, a, b] - [c, a^2, b] + [c, a, ab]. \end{aligned} \tag{5}$$

Сложим последние два равенства, имея в виду (3); получим

$$0 = 2[c, a, ab] - [c, a^2, b] + [c, a, ba] - [c, a, b]a. \tag{6}$$

Из той же формулы (4) при помощи (3) получаем

$$-[c, a, b]a = [c, b, a]a = -[c, ba, a] + [c, b, a^2] = [c, a, ba] - [c, a^2, b].$$

Подставив полученный результат в (6), после сокращения на 2 будем иметь

$$[c, a^2, b] = [c, a, ab] + [c, a, ba]. \tag{7}$$

Сделав в (6) замену по формуле (7), получим

$$[c, a, ab] = [c, a, b]a. \tag{8}$$

Из (5), (7) и (3) вытекает

$$c[a, a, b] = [ca, a, b] + [c, ba, a]. \tag{9}$$

Перепишем (8) в виде

$$[a, bc, b] = -[a, b, c]b$$

и развернем полученную формулу:

$$[a(bc)]b - a[(bc)b] = -[(ab)c]b + [a(bc)]b.$$

Отсюда

$$[(ab)c]b = a[(bc)b]. \tag{10}$$

Подставив в (10) $b+d$ вместо b, получим

$$\begin{aligned} &[(ab)c]b + [(ab)c]d + [(ad)c]b + [(ad)c]d = \\ &= a[(bc)b] + a[(bc)d] + a[(dc)b] + a[(dc)d], \end{aligned}$$

откуда после вторичного применения (10) следует

$$[(ab)c]d + [(ad)c]b = a[(bc)d] + a[(dc)b]. \tag{11}$$

Напишем очевидное равенство

$$-(ab)(cd) + (ab)(cd) - a[b(cd)] - [a(dc)]b = -a[b(cd)] - [a(dc)]b$$

и сложим его с (11). Тогда

$$[ab, c, d] + [a, b, cd] + [a, d, c]b = a[b, c, d] - [a, dc, b]. \tag{12}$$

Но из (4) имеем

$$[ab, c, d] + [a, b, cd] = [a, bc, d] + a[b, c, d] + [a, b, c]d,$$

и после подстановки тождество (12) превращается в

$$[a, bc, d] + [a, b, c]d + [a, d, c]b = [a, b, dc]. \tag{13}$$

Еще раз применив (4), получим

$$[a, bc, d] + [a, b, c]\, d = -a\,[b, c, d] + [ab, c, d] + [a, b, cd],$$

после чего (13) принимает вид

$$[ab, c, d] + [a, d, c]\, b - a\,[b, c, d] + [a, b, [c, d]] = 0, \tag{14}$$

где $[c, d] = cd - dc$.

Вычтем из обеих частей равенства (11) по $[a(bc)]\,d + [a(dc)]\,b$. Тогда

$$[a, b, c]\, d + [a, d, c]\, b + [a, bc, d] + [a, dc, b] = 0.$$

Пусть $d = bc$. Тогда, ввиду (2) и (1), получим

$$[a, b, c](bc) + [a, bc, c]\, b + [a, bc^2, b] = 0.$$

Но, согласно (8), (3) и (7),

$$[a, bc, c]\, b + [a, bc^2, b] = (-[a, c, bc] + [a, c^2, b])\, b =$$
$$= [a, c, cb]\, b = ([a, c, b]\, c)\, b = -([a, b, c]\, c)\, b,$$

откуда

$$[a, b, c](bc) = ([a, b, c]\, c)\, b. \tag{15}$$

Заменив в (15) b на $b + d$, получим

$$([a, b, c]\, c)\, b + ([a, b, c]\, c)\, d + ([a, d, c]\, c)\, b + ([a, d, c]\, c)\, d =$$
$$= [a, b, c](bc) + [a, b, c](dc) + [a, d, c](bc) + [a, d, c](dc)$$

или

$$([a, b, c]\, c)\, d + ([a, d, c]\, c)\, b = [a, b, c](dc) + [a, d, c](bc). \tag{16}$$

Заменим в (15) c на $c + d$:

$$([a, b, c]\, d)\, b + ([a, b, d]\, c)\, b = [a, b, c](bd) + [a, b, d](bc). \tag{17}$$

Далее, заменив в (15) b на $b + d$, а c на $c + h$ и проведя сокращения при помощи формул (15), (16) и (17), получим

$$([a, b, h]\, c)\, d + ([a, d, h]\, c)\, b + ([a, d, c]\, h)\, b + ([a, b, c]\, h)\, d =$$
$$= [a, b, h](dc) + [a, d, h](bc) + [a, d, c](bh) + [a, b, c](dh). \tag{18}$$

§ 2

Будем говорить, что элемент x кольца *относится к типу* u *относительно пары* a, b, *если* $(xa)\, b = x\,(ba)$, и что элемент x *относится к типу* v *относительно пары* a, b, *если* $[x\,(ba)]\, a = x\,[a\,(ba)]$.

Из формулы (15) видно, что в право-альтернативном кольце элемент $[x, a, b]$ относится к типу u, а элемент $[x, ba, a]$ — к типу v.

Такие элементы будем называть *специальными элементами типа* u (соответственно *специальными элементами типа* v).

Если предположить, что в право-альтернативном кольце отсутствуют делители нуля, то имеют место следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Элемент* x *относится к типу* u *тогда и только тогда, если*

$$[x, a, b] = x\,[b, a].$$

Действительно,

$$[x, a, b] - x[b, a] = (xa)b - x(ab) - x(ba) + x(ab) = (xa)b - x(ba).$$

ЛЕММА 2. *Если $[a, a, b] \neq 0$, то нуль является единственным элементом, относящимся как к типу u, так и к типу v.*

Пусть w — элемент, относящийся к обоим типам. Тогда, ввиду (10),

$$w[a, b, a] = w[(ab)a] - w[a(ba)] =$$
$$= [(wa)b]a - w[a(ba)] = [w(ba)]a - w[a(ba)] = 0,$$

откуда и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3. *Если u — специальный элемент типа u, то ua также относится к типу u.*

Пусть $u = [s, a, b]$. Из (17) получим

$$\{[s, a, b](ab)\}a + ([s, a, ab]b)a = [s, a, b][a(ab)] + [s, a, ab](ab).$$

Применив (8), найдем

$$[u(ab)]a + [(ua)b]a = u[a(ab)] + (ua)(ab).$$

Отсюда

$$-[u, a, b]a + 2[(ua)b]a = -[u, a, ab] + 2(ua)(ab),$$

что после применения (8) дает

$$[(ua)b]a = (ua)(ab).$$

Вычтем из обеих частей по $(ua)(ba)$. Тогда после применения (3)

$$[ua, a, b] = (ua)[b, a],$$

и лемма 1 позволяет завершить доказательство.

ЛЕММА 4. *Пусть $[a, a, b] \neq 0$, а $[x, a, b] = 0$. Тогда $[x, c, d] = 0$ для любых c, d.*

Из (16), имея в виду (3), получим

$$([x, a, c]a)b = [x, a, c](ba). \tag{I}$$

Из (I) при $c = ba$ получаем формулу

$$([x, a, ba]a)b = [x, a, ba](ba),$$

которая вместе с (15) показывает, что $[x, a, ba]$ принадлежит как к типу u, так и к типу v, и поэтому, согласно лемме 2,

$$[x, a, ba] = 0. \tag{II}$$

Соотношения (17) и (II) дают

$$\{[x, a, c](ba)\}a = [x, a, c][a(ba)]. \tag{III}$$

Сопоставив (III) с (I) и применив лемму 2, как и выше, получаем

$$[x, a, c] = 0. \tag{IV}$$

Из (16) и (IV) следует

$$\{[x, ba, c](ba)\}a = [x, ba, c][a(ba)], \tag{V}$$

откуда

$$\{[x, ba, b](ba)\}a = [x, ba, b][a(ba)]. \tag{VI}$$

Но из (17) и (IV) вытекает

$$([x, ba, b]a)b = [x, ba, b](ba). \tag{VII}$$

Как и выше, (VI), (VII) и лемма 2 дают

$$[x, ba, b] = 0. \tag{VIII}$$

Теперь используем (18), (IV) и (VIII).

$$\{[x, b, c](ba)\} a = [x, b, c][a(ba)]. \tag{IX}$$

Из (17) и (IV) следует

$$([x, b, c] a) b = [x, b, c](ba), \tag{X}$$

после чего из (IX), (X) и леммы 2 вытекает

$$[x, b, c] = 0. \tag{XI}$$

Из (18), (IV) и (XI) следует

$$([x, ba, c] a) b = [x, ba, c](ba),$$

что вместе с (V) и леммой 2 дает

$$[x, ba, c] = 0. \tag{XII}$$

Еще раз применяем (18) вместе с (IV) и (XI):

$$([x, c, d] a) b = [x, c, d](ba). \tag{XIII}$$

Из (18), (IV) и (XII) следует

$$\{[x, c, d](ba)\} a = [x, c, d][a(ba)]. \tag{XIV}$$

Сравнив (XIII) и (XIV) и применив в последний раз лемму 2, получим

$$[x, c, d] = 0.$$

ЛЕММА 5. *Если $[a, a, b] \neq 0$, а $[x, a, [a, b]] = 0$ для некоторого x, то $[x, a, b] = 0$.*

Ввиду (8), из $[x, a, [a, b]] = 0$ следует

$$[x, a, b] a = [x, a, ba].$$

Из формулы (15) видно, что правая часть относится к типу v, левая же, ввиду леммы 3, относится к типу u. Из леммы 2 следует, что

$$[x, a, b] = 0.$$

§ 3

Предположим, что рассматриваемое кольцо является телом, т. е. уравнения $ax = b$, $xa = b$, $a \neq 0$ однозначно разрешимы относительно x. Из однозначности решения следует отсутствие в теле делителей нуля.

Если элемент e таков, что $ae = a$, то из (8) и (2) следует $[c, a, e] a = 0$, т. е. при $a \neq 0$ $[c, a, e] = 0$. Отсюда, если $ea = z$, то, ввиду (3),

$$a(ea) = (ae) a = a^2 = az,$$

откуда $z = a$.

Пусть $be = z$. Тогда, как и выше,

$$(be) a = b(ea) = ba = za,$$

откуда $z = b$.

Таким образом, в право-альтернативном теле всегда существует единственная единица; обозначим ее через 1.

Пусть $a \neq 0$. Если элемент x таков, что $ax = 1$, то, как показано выше, $[c, a, 1] = 0$, а поэтому, ввиду (8), $[c, a, x] a = 0$, т. е. $[c, a, x] = 0$. В частности, $[a, x, a] = 0$.

Пусть $xa = z$. Тогда

$$az = a(xa) = (ax) a = a,$$

откуда $z = 1$.

Таким образом, *каждый ненулевой элемент право-альтернативного тела обладает единственным обратным элементом.*

Допустим, что в нашем теле существуют такие элементы a и b, что

$$[a, a, b] \neq 0.$$

Из формулы (14) имеем

$$[x[a, b], a, b] - [x, a, b][a, b] - x[[a, b], a, b] = 0. \qquad (19)$$

Из леммы 1 вытекает, что $-[x, a, b][a, b] = [[x, a, b], a, b]$, т. е. элемент, стоящий слева, относится к типу u. Таким образом, первые два слагаемых формулы (19) относятся к типу u. Однако сумма двух элементов типа u сама будет типа u, а поэтому из (19) следует, что при любом x элемент $x[[a, b], a, b]$ относится к типу u.

Если допустить, что $[[a, b], ab] \neq 0$, то легко видеть, что единица попадает в тип u, откуда $[a, b] = 0$, а поэтому и $[[a, b], a, b]=0$.

Таким образом, всегда

$$[[a, b], a, b] = 0,$$

после чего лемма 4 обеспечивает:

$$[[a, b], c, d] = 0 \qquad (20)$$

для любых c, d.

Далее, из леммы 5 следует, что

$$[a, a, [a, b]] \neq 0.$$

Благодаря последнему неравенству в предшествующих рассуждениях вместо элемента b можно было бы взять $[a, b]$, после чего из формулы (20) получим

$$[[a, [a, b]], a, [a, b]] = 0,$$

откуда, ввиду леммы 5,

$$[[a, [a, b]], a, b] = 0. \qquad (21)$$

Далее, из (4) и (20) вытекает

$$[a, b][c, d, h] = [[a, b]c, d, h]. \qquad (22)$$

Из (19), (20), (21) и (22) следует

$$[a, b][a, a, b] = [a, a, b][a, b]. \qquad (23)$$

Теперь обратимся к формуле (17):

$$\{[x, b, a](ba)\}a + ([x, ba, a]b)a = [x, b, a][a(ba)] + [x, ba, a](ab).$$

Из нее при помощи формул (3), (15) и (10) получим

$$([x, ba, a]b)a - [x, ba, a](ab) = \{[x, a, b](ba)\}a - [x, a, b][a(ba)] =$$
$$= \{([x, a, b]a)b\}a - [x, a, b][a(ba)] = [x, a, b][(ab)a] - [x, a, b][a(ba)] =$$
$$= [x, a, b][a, b, a],$$

т. е.

$$([x, ba, a]b)a = [x, ba, a](ab) - [x, a, b][a, a, b]. \qquad (2$$

Если положить $z = [a, a, b]^{-1}$, то из (9) следует:

$$1 = [za, a, b] + [z, ba, a],$$

откуда после умножения справа на b, а затем на a, ввиду (15) и (24), получаем:

$$ba = ([za, a, b]\, b)\, a + ([z, ba, a]\, b)\, a = ([za, a, b] + [z, ba, a])\,(ab) - \\ - [z, a, b]\,[a, a, b] = ab - [z, a, b]\,[a, a, b].$$

Поскольку из (8) вытекает $[x, a, a^{-1}] = 0$, мы получаем

$$[a, b]\, z = [z, a, b]. \tag{25}$$

Из (25) видно, что $[a, b]\,z$ относится к типу u, т. е., ввиду леммы 1

$$[[a, b]\, z, a, b] = ([a, b]\, z)\,[b, a].$$

Но тогда из формулы (22) следует

$$[a, b]\,[z, a, b] = ([a, b]\, z)\,[b, a]. \tag{26}$$

Заменив выражение $[z, a, b]$ в (26) по формуле (25), заметим, что, ввиду (20), скобки могут быть опущены. Если $[a, b] \neq 0$, то после сокращения получаем

$$[a, b]\, z = -z\,[a, b]. \tag{27}$$

Используя, как и при выводе (25), соотношение $[c, a, a^{-1}] = 0$, из (27) и (23) имеем, поскольку $z^{-1} = [a, a, b]$,

$$[a, b] = -(z\,[a, b])\, z^{-1} = -[z, [a, b], z^{-1}] - z\,([a, b]\, z^{-1}) = \\ = [z, z^{-1}, [a, b]] - z\,(z^{-1}\,[a, b]) = [a, b] - 2z\,(z^{-1}\,[a, b]),$$

т. е. $z\,(z^{-1}[a, b]) = 0$, откуда $[a, b] = 0$.

Таким образом, в действительности $[a, b] = 0$. Отсюда $[a, a, [a, b]] = 0$ и поэтому, ввиду леммы 5, $[a, a, b] = 0$.

Итак, предположение, что в нашем право-альтернативном теле существуют такие элементы a и b, что $[a, a, b] \neq 0$, привело нас к противоречию. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Замечание 1. Само собой разумеется, что соответствующая теорема справедлива и для лево-альтернативных тел.

Замечание 2. Если предположить, что тело эластично*, т. е. что в нем имеет место тождество

$$[a, b, a] = 0,$$

то оно не обязательно альтернативно. Для доказательства заметим, что всякое коммутативное тело эластично. Примером же коммутативного неальтернативного тела может служить тело (F, z), [стр. 177 работы Брука ([4])], если в нем положить

$$c_{ij} = i^2 j^2 + 1,$$

и в качестве F взять поле действительных чисел. Коммутативность проверяется без труда, но

$$x^2 x^2 = 17x^4 \neq (x^2 x)\, x = 5x^3 \cdot x = 50x^4,$$

т. е. тождество (1) не имеет места.

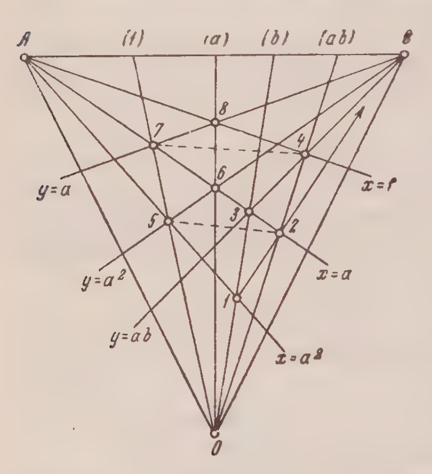
* См. ([3]), стр. 561.

§ 4

Для доказательства сформулированной во введении геометрической теоремы докажем следующую лемму, отсылая за объяснением обозначений и терминов к статье (1), § 3.

ЛЕММА. *Если малая теорема Дезарга выполняется на двух прямых проективной плоскости, то в натуральном теле, в котором точкой A служит точка пересечения специальных прямых, а точки B и O как-либо выбраны на специальных прямых, имеет место соотношение*

$$(aa)\,b = a\,(ab).$$



Нетрудно убедиться, что для доказательства сформулированной леммы достаточно показать, что точки 1, 2, B (черт. 1) лежат на одной прямой. Для этого заметим, что все прямые пучка A, по теореме 8 работы (1), являются специальными. Затем, применив теорему D** из (1)* к треугольникам 256 и 478, убедимся, что прямые 47 и 25 пересекаются на AB. После этого из той же теоремы D**, примененной к треугольникам 437 и 215, следует искомая инциденция.

Из доказательства теоремы 10 работы (1) видно, что упоминаемое в формулировке этой теоремы натуральное тело является тем же самым, что и в только что доказанной лемме. Поэтому это тело оказывается лево-альтернативным, а значит, в силу сделанного в конце § 3 замечания 1, — альтернативным. Между тем, хорошо известно**, что в проективной плоскости над альтернативным телом малая теорема Дезарга выполняется проективно.

Поступило
9. V. 1950

ЛИТЕРАТУРА

1 Скорняков Л. А., Натуральные тела Веблен-Веддербарновых проективных плоскостей, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 13 (1949), 447—472.
2 Albert A., On right alternative algebras, Ann. of Math., 50 (1949), 318—328.
3 Albert A., Power-associative rings, Trans. Amer. Math. Soc., 64 (1948), 552—593.
4 Bruck R., Linear non-associative algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 56 (1944), 141—199.

* См. (1), лемма на стр. 457.

** См. сноску *** на стр. 459 в (1).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 185—198

А. И. КАЛАНДИЯ

ОСНОВНАЯ n-ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

Настоящая статья посвящена изучению граничной задачи для n-гармонического уравнения * в случае плоской многосвязной области. Вопрос заключается в отыскании регулярного в данной области решения уравнения (1) по граничным значениям искомой функции и ее нормальных производных порядка $\leqslant n-1$.

Граничная задача для уравнения

$$\Delta^n u = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};\ n \geqslant 1\right) \tag{1}$$

в любом конечномерном случае, в несколько отличной от приводимой ниже постановке, была предметом исследований С. Л. Соболева [1], который доказал, при довольно общем предположении относительно границы области и задаваемых на ней функций, существование и единственность решения, удовлетворяющего *в среднем* поставленным граничным условиям.

Исследуемая ниже задача в случае конечной *односвязной* области была изучена И. Н. Векуа [2], который посредством общего представления решений уравнения (1) через голоморфные функции одной комплексной переменной свел задачу к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма и при помощи теоремы единственности доказал существование решения задачи.

Ниже дается обобщение метода И. Н. Векуа на случай многосвязной области. Заметим, что в случае двухсвязной области задача решена автором в работе [6] также методом И. Н. Векуа, но несколько отличным от нижеприводимого.

§ 1. Постановка задачи и замена граничных условий

1. Пусть T — связная конечная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простыми замкнутыми непересекающимися гладкими контурами $L_0, L_1, \ldots, L_p$, из которых первый охватывает все остальные. Под L будем подразумевать совокупность этих контуров; положительным направлением на L будем считать то, которое оставляет T слева. Без ущерба для общности мы можем допустить, что начало координат принадлежит T.

* См. уравнение (1).

Пусть кривые L_j $(j=1, 2, \ldots, p)$ заданы уравнениями

$$x=x_j(s), \quad y=y_j(s) \quad (j=1, 2, \ldots, p),$$

где s — соответствующая дуга $(0 \leqslant s \leqslant l_j,\ l_j$ — длина кривой $L_j)$. Во всем дальнейшим мы будем предполагать, что функции $x_j(s)$, $y_j(s)$ $(j=1, 2, \ldots, p)$ — периодические с периодом l_j и имеют непрерывные производные порядка $2n+2$ по дуге s.

Рассмотрим следующую задачу:

Найти регулярное в T (действительное) решение $u(x, y)$ уравнения (1) *по граничным условиям:*

$$(u)^{+}=f_0(s), \quad \left(\frac{du}{d\nu}\right)^{+}=f_1(s), \ldots, \left(\frac{d^{n-1}u}{d\nu^{n-1}}\right)^{+}=f_{n-1}(s), \tag{2}$$

где ν — внешняя нормаль линии L; символ $(\ )^{+}$ обозначает граничное значение выражения, заключенного в скобки, а $f_0(s), f_1(s), \ldots, f_{n-1}(s)$ — заданные на L действительные функции длины дуги s, удовлетворяющие условию: $f_k(s)$ имеет непрерывные производные по дуге s порядка $\leqslant 2n-k$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$. Кроме того, от искомого решения $u(x, y)$ мы будем требовать, чтобы все его частные производные вида

$$\frac{\partial^{k+m} u}{\partial z^k\, \partial \bar{z}^m} \quad (k \leqslant n,\ m \leqslant n),$$

где

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}=\frac{1}{2^m}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m, \quad \frac{\partial^m}{\partial \bar{z}^m}=\frac{1}{2^m}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \quad (m=0, 1, \ldots),$$

были непрерывны в $T+L$.

Поставленная задача является естественным обобщением задачи Дирихле, в которую она превращается для $n=1$. Мы будем ее называть в дальнейшем *основной n-гармонической задачей* *.

Заметим, что принятые нами условия регулярности относительно искомого решения обеспечивают справедливость теоремы единственности [(4), стр. 236—238], которой мы воспользуемся в дальнейшем.

2. Введем обозначения

$$\left(\frac{\partial^{k+m} u}{\partial z^k\, \partial \bar{z}^m}\right)^{+}=g_{k, m}(s) \quad (k, m=0, 1, \ldots),$$

где $u(x, y)$ — искомое решение задачи.

Напишем следующие известные соотношения [(2), стр. 210]:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^{k+m} u}{\partial z^k\, \partial \bar{z}^m}\right)^{+}=\left(\frac{\partial^{k+m+1} u}{\partial z^{k+1}\, \partial \bar{z}^m}\right)^{+}\frac{dz}{ds}+\left(\frac{\partial^{k+m+1} u}{\partial z^k\, \partial \bar{z}^{m+1}}\right)^{+}\frac{d\bar{z}}{ds}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{d^k u}{d\nu^k}\right)^{+}=i^k\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\frac{k!}{l!\,(k-l)!}\left(\frac{dz}{ds}\right)^{k-2l}\left(\frac{\partial^k u}{\partial z^{k-l}\, \partial \bar{z}^l}\right)^{+} \tag{4}$$

$$(z=x+iy; \quad \bar{z}=x-iy; \quad k, m=0, 1, \ldots, n-1),$$

---

* Для частного случая $n=2$ эта задача тесно связана с основными граничными задачами плоской теории упругости [см., например, (3)].

которые имеют место для любой действительной функции (от x и y), в достаточной степени регулярной в $T+L$.

Вышенаписанные соотношения дают возможность перехода от граничных значений нормальных производных некоторой действительной функции к граничным значениям ее производных вида $\frac{\partial^{k+m} u}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}$ и обратно, причем обратный переход осуществляется при помощи (4). В частности, на основании этих соотношений нетрудно видеть, что функции $g_{k,m}(s)$ $(k+m \leqslant n-1)$ однозначно выражаются через $f_0(s)$ $f_1(s), \ldots, \ldots, f_{n-1}(s)$ и их производные; точнее, $g_{k,m}(s)$, $k+m=l \leqslant n-1$, выражаются через функции $f_0(s), \ldots, f_l(s)$ и их производные, причем производные от $f_k(s)$ $(k \leqslant l)$ будут порядка не выше $l-k$. Поэтому, согласно условиям нашей задачи, функции $g_{k,m}(s)$, $k+m=l \leqslant n-1$, будут иметь непрерывные производные порядка $2n-l$ $(l=0, 1, \ldots, n-1)$. Кроме того, очевидно, что найденные таким образом функции $g_{k,m}(s)$ $(k+m \leqslant n-1)$ удовлетворяют соотношениям (3).

На основании вышесказанного легко заключить, что условия (2) эквивалентны условиям [(2), стр. 211]:

$$(u)^+ = g_{0,0}(s), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^+ = g_{1,0}(s), \ldots, \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial z^{n-1}}\right)^+ = g_{n-1,0}(s). \tag{5}$$

Приведем весьма важные для дальнейшего формулы, вытекающие из (3):

$$\left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial z^{m+1}}\right)^+ \left(\frac{dz}{ds}\right)^{m+1} + (-1)^m \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial \bar{z}^{m+1}}\right)^+ \left(\frac{d\bar{z}}{ds}\right)^{m+1} =$$
$$= \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \left(\frac{dz}{ds}\right)^{m-2l} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial^m u}{\partial z^{m-l} \partial \bar{z}^l}\right)^+ \quad (m \leqslant n-2). \tag{6}$$

В частности, этим соотношениям удовлетворяют функции $g_{k,m}(s)$ $(k+m \leqslant n-1)$.

§ 2. Интегральная запись граничных условий

1. Будем обозначать через $t(s)$, $t(s_0)$, $t(s_1)$, или просто t, t_0, t_1, аффиксы точек линии L, отвечающие дуговым абсциссам s, s_0, s_1 соответственно. Для удобства обозначим также

$$\left(\frac{\partial^{k+m} u}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}\right)^+ = \frac{\partial^{k+m} u}{dt^k \partial \bar{t}^m}.$$

Докажем, что условия (5) эквивалентны следующим интегральным соотношениям*:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{i^{l-1}}{\pi} \int_L t'^l \left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l} - g_{l,0}\right) \frac{dt}{t-z} - \frac{i^{l-1}}{\pi} \int_L t'^l \left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l} - g_{l,0}\right) \frac{dt}{t}\right] = 0 \tag{7}$$
$$\left(l = 0, 1, \ldots, n-1; \quad t' = \frac{dt}{ds}\right),$$

где z — любая точка, лежащая вне $T+L$.

* Интегралы по L здесь и в дальнейшем берутся в положительном направлении.

Если имеет место условие (5), то соотношения (7), очевидно, выполняются. Сейчас мы докажем справедливость обратного утверждения, именно: если $u(x, y)$ есть действительная функция, заданная в $T+L$ и имеющая там непрерывные производные $\frac{\partial^{k+m} u}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}$, $k+m \leqslant n$, то из (7) вытекают условия (5).

Соотношения (7), как легко видеть, приводят к следующим равенствам:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[i^l t'^l \left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l} - g_{l,0} \right) + i c_l(t) \right] \frac{dt}{t-z} = 0 \quad (\text{для любого } z \text{ вне } T+L)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[i^l t'^l \left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l} - g_{l,0} \right) + i c_l(t) \right] \frac{dt}{t} = 2ic_l' \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1),$$

где $c_l(t)$ — действительная функция точки на L, сохраняющая постоянное значение на каждом из контуров L_j, причем $c_l(t) = 0$ при $t \in L_0$, c_l' — действительная постоянная $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$. Из вышенаписанных равенств вытекает [(5), стр. 67], что

$$\begin{aligned} i^l t'^l \left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l} - g_{l,0} \right) + i c_l(t) &= \chi_l(t) \quad (\text{на } L), \\ \chi_l(0) = i c_l' & \quad\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\chi_l(t)$ — граничное значение функции $\chi_l(z)$, голоморфной внутри T и непрерывной в $T+L$.

Первое из равенств (8) при $l=0$, ввиду того, что $u - g_{0,0}$ — действительная функция на L, приводит к следующему контурному условию:

$$\operatorname{Im}\{\chi_0(t)\} = c_0(t).$$

Из этого равенства непосредственно следует, что $c_0(t) = 0$ на L, $\chi_0(z) = c$ в области T (c — действительная постоянная). Это последнее вместе со вторым равенством (8) (при $l=0$) даст: $\chi_0(z) = 0$ всюду в T, и, следовательно, $u - g_{0,0} = 0$ на L.

Предположим, что первые k условий (5) уже выведены. Тогда, в силу этих последних и (6) (при $m = k-1$), будем иметь

$$\operatorname{Im}\left\{ i^k \left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k} - g_{k,0} \right) \right\} = \frac{i^{k-1}}{2} \left[\left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k} - g_{k,0} \right) t'^k + \right.$$
$$\left. + (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial^k u}{\partial \bar{t}^k} - g_{0,k} \right) \bar{t}'^k \right] =$$
$$= \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l t'^{k-2l-1} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-l-1} \partial \bar{t}^l} - g_{k-l-1,l} \right) = 0.$$

Следовательно, из (8) (при $l = k$) мы получаем следующее контурное условие для $\chi_k(z)$:

$$\operatorname{Im}\{\chi_k(t)\} = c_k(t).$$

Отсюда, учитывая также второе равенство (8), как и выше, получим: $\frac{\partial^k u}{\partial t^k} - g_{k,0} = 0$ на L, и тем самым наше утверждение доказано.

2. Условия (7), очевидно, эквивалентны равенствам

$$\operatorname{Re}\left[-i^l t_0'^{\,l} \frac{\partial^l u}{\partial t_0^l} + \frac{i^{l-1}}{\pi}\int_L t'^{\,l} \frac{\partial^l u}{\partial t^l} \frac{dt}{t-t_0} - \frac{i^{l-1}}{\pi}\int_L t'^{\,l} \frac{\partial^l u}{\partial t^l} \frac{dt}{t}\right] = F_l(t_0), \quad (9)$$

где

$$F_l(t_0) = \operatorname{Re}\left[-i^l t_0'^{\,l} g_{l,0}(t_0) + \frac{i^{l-1}}{\pi}\int_L t'^{\,l} g_{l,0}(t) \frac{dt}{t-t_0} - \frac{i^{l-1}}{\pi}\int_L t'^{\,l} g_{l,0}(t) \frac{dt}{t}\right] \quad (10)$$

$$(l = 0, 1, \ldots, n-1),$$

причем несобственные интегралы в этих выражениях следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Используя векторные обозначения, мы можем записать условия (9) в виде одного равенства следующим образом:

$$\operatorname{Re}\left[-v(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{v(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{v(t)\,dt}{t}\right] = F(t_0), \quad (11)$$

где $v(t)$, $F(t)$ — векторы * с компонентами

$$i^l t'^{\,l} \frac{\partial^l u}{\partial t^l}, \quad F_l(t) \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

соответственно.

§ 3. Приведение к интегральным уравнениям

1. Известно [(2), стр. 176], что все регулярные в T (действительные) решения уравнения (1) могут быть представлены формулой **

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \bar{z}^k [\psi_k(z) + \overline{\psi_k(z)}] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{s,m=0}^{n-1} B_{s,m}^j \bar{z}^s z^m \log[(z - z_j)(\bar{z} - \bar{z}_j)], \quad (12)$$

где $\psi_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ — произвольные голоморфные функции от комплексного переменного $z = x + iy$ в области T, z_j — некоторая фиксированная точка конечной области, заключенной внутри контура L_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$, а $B_{s,m}^j$ — произвольные комплексные постоянные, подчиненные условиям

$$B_{s,m}^j = \overline{B_{m,s}^j} \quad (j = 1, 2, \ldots, p; \quad s, m = 0, 1, \ldots, n-1).$$

---

* Под вектором мы понимаем одноколонную матрицу.

** Черта над буквой означает переход к сопряженному значению.

Заметим, что в предыдущей формуле функции $\psi_k(z)$ определяются при помощи $u(x, y)$ с точностью до аддитивных мнимых постоянных, а постоянные $B^j_{s,m}$ определяются вполне однозначно; иначе говоря, если в (12) $u(x, y) = 0$ всюду в T, то

$$\psi_k(z) = iC_k \tag{13}$$

($k = 0, 1, \ldots, n-1$; C_k — произвольные действительные постоянные),

$$B^j_{s,m} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p; \quad s, m = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{14}$$

На основании (12) легко видеть, что если производные порядка n от функций $\psi_k(z)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) непрерывны в $T + L$, то все производные вида $\frac{\partial^{k+m}u}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}$ ($k \leqslant n$, $m \leqslant n$) будут непрерывны в $T + L$ и, обратно, если регулярное в T решение $u(x, y)$ уравнения (1) обладает тем свойством, что все $\frac{\partial^{k+m}u}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}$ ($k \leqslant n$, $m \leqslant n$) непрерывны в $T + L$, то производные порядка n от функций $\psi_k(z)$, соответствующих по (12) этому решению, непрерывны в $T + L$. Согласно этому и условиям нашей задачи, мы будем предполагать в дальнейшем, что производные порядка $n-1$ от функции $\psi_k(z)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) непрерывны в $T + L$ в смысле Гельдера.

Подставляя искомое решение в виде (12), выразим вектор v через функции ψ_k и постоянные $B^j_{s,m}$. Для этого вектора элементарным путем находим следующие выражения:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\, \psi^{(k)}(t) + \alpha^*(t)\, \overline{\psi(t)} + \Omega(t), \tag{15}$$

где $\psi^{(k)}(t)$ — граничные значения производной порядка k от искомого вектора $\psi(z) = (\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{k-1}(z))$; $\alpha_k(t)$, $\alpha^*(t)$ — матрицы, строками которых являются компоненты векторов $A_{l,k}(t)$, $A^*_l(t)$ ($l = 0, 1, \ldots, n-1$) соответственно, причем

$$A_{l,k}(t) = \begin{cases} \dfrac{i^l l!\, t'^l}{k!\,(l-k)!} \, \dfrac{\partial^{l-k} A(t)}{\partial t^{l-k}}, & l \geqslant k \\ 0, & l < k \end{cases} \qquad (k, l = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{16}$$

$$A^*_l(t) = i^l t'^l \frac{\partial^l \bar{A}(t)}{\partial t^l},$$

$$A(t) = (1, t\bar{t}, \ldots, t^{n-1}\bar{t}^{n-1}); \tag{17}$$

$\Omega(t) = (\Omega_0(t), \ldots, \Omega_{n-1}(t))$ — вектор, компоненты которого выражаются формулами

$$\Omega_l(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{s,m=0}^{n-1} B^j_{s,m} \bar{t}^s \omega^j_{l,m}(t), \tag{18}$$

где для удобства введено обозначение*

$$\omega^j_{l,\,m}(t) = i^l t'^l \frac{\partial^l}{\partial t^l}\left(t^m \log\left[(t - z_j)(\bar{t} - \bar{z}_j)\right]\right)$$
$$(j = 1, \ldots, p;\ m,\ l = 0,\ 1, \ldots, n - 1). \qquad (19)$$

В дальнейшем весьма существенную роль будет играть матрица $\alpha^*(t)$. В развернутом виде она напишется так:

$$\alpha^*(t) = \begin{Vmatrix} 1, & t\bar{t}, \ldots, & t^{n-1}\bar{t}^{n-1} \\ 0, & it'\bar{t}, \ldots, & i(n-1)t't^{n-2}\bar{t}^{n-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, & 0, \ldots, & i^{n-1}(n-1)!\,t'^{n-1}\bar{t}^{n-1} \end{Vmatrix}. \qquad (20)$$

Подставляя (15) в (11), мы получим соотношения для определения искомых величин — функций $\psi_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ и постоянных $B^j_{s,m}$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ s,\ m = 0, 1, \ldots, n - 1)$, причем в этих соотношениях интегралы в смысле главного значения по Коши будут содержать граничные значения производных от функций $\psi_k(z)$ порядка $\leqslant n - 1$. Но, используя один метод Н. И. Мусхелишвили, совершенно так же, как это сделал И. Н. Векуа [(2), стр. 216—217], можно полученным соотношениям придать такой вид, что в них не будут фигурировать производные от искомых функций. В самом деле, рассмотрим следующие выражения, получающиеся при вышеупомянутой подстановке:

$$p_k(t_0) = -\alpha_k(t_0)\,\psi^{(k)}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\alpha_k(t)\,\psi^{(k)}(t)\,dt}{t - t_0}, \qquad (21)$$

$$q_k = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\alpha_k(t)\,\psi^{(k)}(t)\,dt}{t - t_0} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n - 1;\ t_0 \in L). \qquad (22)$$

В силу того что компоненты вектора $\psi^{(k)}(z)$ $(k \leqslant n - 1)$ — голоморфные функции в T, непрерывные в $T + L$ в смысле Гельдера, будем иметь равенство [(5), стр. 67]:

$$-\psi^{(k)}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi^{(k)}(t)\,dt}{t - t_0} = 0 \qquad (k = 0,\ 1, \ldots, n - 1;\ t_0 \in L),$$

вследствие которого (21) можно представить в виде

$$p_k(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\alpha_k(t) - \alpha_k(t_0)}{t - t_0}\,\psi^{(k)}(t)\,dt \qquad (k = 0,\ 1, \ldots, n - 1). \qquad (23)$$

---

* Следует принять во внимание, что операция $\frac{\partial}{\partial z}$ применительно к функции (от x и y), аналитической относительно переменного $z = x + iy$, совпадает с обычным дифференцированием по z. В частности, выражение (19) есть не что иное, как частная производная порядка l от функции $t^m \log\left[(t - z_j)(\bar{t} - \bar{z}_j)\right]$ по переменному t, умноженная на $i^l t'^l$.

Заметим, что каждый отличный от нуля элемент матрицы $\alpha_k(t)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ с точностью до постоянного множителя имеет вид [см. (16)]

$$t'^m t^r \bar{t}^s \quad (m \geqslant k;\ r,\ s \geqslant 0).$$

Поэтому, так как, по предположению, координаты $x(s)$, $y(s)$ точек L имеют непрерывные производные по дуге s порядка $2n+2$, нетрудно видеть [(5), § 8], что элементы матрицы $\frac{\alpha_k(t)-\alpha_k(t_0)}{t-t_0}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ будут иметь непрерывные производные по s порядка $2n+1$.

После этого замечания очевидно, что интегрирование по частям в (23) дозволено, и мы получим

$$p_k(t_0) = \frac{(-1)^k}{\pi i} \int_L \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\alpha_k(t)-\alpha_k(t_0)}{t-t_0}\right) \psi(t)\, dt$$

$$\left(k=0,\ 1, \ldots, n-1;\quad \frac{d}{dt} = \frac{d\bar{t}}{ds}\frac{d}{ds}\right).$$

Из (22) имеем также

$$q_k = \frac{(-1)^k}{\pi i} \int_L \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\alpha_k(t)}{t}\right) \psi(t)\, dt \quad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Учитывая эти равенства, в результате подстановки (15) в (11) будем иметь

$$\operatorname{Re}\left[-\alpha^*(t_0)\overline{\psi(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\alpha^*(t)\overline{\psi(t)}\, dt}{t-t_0} - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\alpha^*(t)\psi(t)\, dt}{t} + \right.$$
$$\left. + \int_L Q(t_0,\ t)\psi(t)\, dt\right] + \Omega^*(t_0) = F(t_0), \tag{24}$$

где $Q(t_0,\ t)$ — матрица, определенная формулой

$$Q(t_0,\ t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\pi i}\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\alpha_k(t)\, t_0}{t(t-t_0)}\right), \tag{25}$$

а $\Omega^*(t) = (\Omega_0^*(t), \ldots, \Omega_{n-1}^*(t))$ — вектор, компоненты которого выражаются следующим образом:

$$\Omega_l^*(t_0) = \operatorname{Re}\left[-\Omega_l(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Omega_l(t)\, dt}{t-t_0} - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Omega_l(t)\, dt}{t}\right]. \tag{26}$$

Подставляя сюда (18) и вводя действительные постоянные $\beta^j_{s,\ m}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} &B^j_{s,\ m} = \beta^j_{s,\ m} + i\beta^j_{m,\ s}, \quad s > m, \\ &B^j_{s,\ s} = \beta^j_{s,s} \quad (j=1, 2, \ldots, p;\ s=0, 1, \ldots, n-1;\ m=0, 1, \ldots, n-2), \end{aligned} \tag{27}$$

после элементарных вычислений получим

$$\Omega_l^*(t_0) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{s,\ m=0}^{n-1} \beta_{s,\ m}^{j} D_{s,\ m}^{l,\ j}(t_0), \tag{28}$$

$$D_{s,\ m}^{l,\ j} = \begin{cases} \operatorname{Re}[\delta_{s,\ m}^{l,\ j} + \delta_{m,\ s}^{l,\ j}], & s > m, \\ \operatorname{Re}[i\,(\delta_{m,\ s}^{l,\ j} - \delta_{s,\ m}^{l,\ j})], & s < m, \\ \operatorname{Re}[\delta_{s,\ m}^{l,\ j}], & s = m, \end{cases} \tag{29}$$

$$\delta_{s,\ m}^{l,\ j}(t_0) = -\bar{t}_0^s \omega_{l,\ m}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \bar{t}^s \omega_{l,\ m}^j(t)\frac{dt}{t-t_0} - \frac{1}{\pi i}\int_L \bar{t}^s \omega_{l,\ m}^j(t)\frac{dt}{t} \tag{30}$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ l,\ m,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

2. С целью получения из (24) системы интегральных уравнений мы используем интегральное представление голоморфных функций в многосвязной области, данное Н. И. Мусхелишвили. Имеет место предложение [(6), стр. 180]:

Всякая голоморфная в области T функция $\varphi(z)$ такая, что ее действительная часть непрерывно продолжима на L, представима в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + ic,$$

где $\mu(t)$ — действительная непрерывная функция, а c — действительная постоянная; при этом $\mu(t)$ определяется через заданную функцию $\varphi(z)$ с точностью до произвольных (действительных) постоянных слагаемых на внутренних контурах L_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ и единственным образом на L_0, а постоянная c определяется вполне. В частности, если $\varphi(z) = ic$ (c — действительная постоянная), то $\mu(t) = 0$, $t \in L_0$ и $\mu(t) = b_j$, $t \in L_j$ $(j = 1, \ldots, p)$, b_j — произвольные (действительные) постоянные.

На основании этого предложения, если принять во внимание сказанное в § 3 [см. (13)], искомый вектор $\psi(z)$ можно представить в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} \quad (z \in T), \tag{31}$$

где $\mu(t) = (\mu_0(t), \ldots, \mu_{n-1}(t))$ — (новый искомый) вектор, компоненты которого — действительные функции. Так как, по предположению, граничные значения производных от компонентов вектора $\psi(z)$ порядка $\leqslant n-1$ непрерывны в $T + L$ в смысле Гельдера, то, при принятых нами условиях относительно гладкости L, нетрудно видеть, что компоненты вектора $\mu(t)$ будут иметь производные порядка $\leqslant n-1$, непрерывные в смысле Гельдера на L [(2), стр. 217].

Из (31), переходя к пределу при $z \to t_0 \in L_0$, получим

$$\psi(t_0) = \mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0},$$

$$\overline{\psi(t_0)} = \mu(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0}.$$

Подставляя эти выражения в (24), после перестановки интегралов * и некоторых очевидных преобразований будем иметь

$$a(t_0)\mu(t_0) + \int_L k(t_0, t)\mu(t)\,ds + \Omega^*(t_0) = F(t_0), \tag{32}$$

где

$$a(t_0) = -[\alpha^*(t_0) + \overline{\alpha^*(t_0)}], \tag{33}$$

$$k(t_0, t) = \mathrm{Re}\Big[\frac{\alpha^*(t_0)\,\bar t'}{\pi i(\bar t - \bar t_0)} + \frac{\alpha^*(t)\,t' t_0}{\pi i(t - t_0)\,t} + \frac{\bar t'}{\pi^2}\int_L \frac{t_0\alpha^*(t_1) - t_1\alpha^*(t_0)}{(t_1 - t_0)(\bar t - \bar t_1)\,t_1}\,dt_1 +$$

$$+ \frac{\alpha^*(t_0)}{\pi^2}\int_L \Big(\frac{d}{ds}\log\frac{\bar t - \bar t_1}{t - t_1}\Big)\frac{dt_1}{t_1 - t_0} + \frac{t'}{\pi i}\int_L \frac{Q(t_0, t_1)\,dt_1}{t - t_1} + t' Q(t_0, t)\Big].$$

Очевидно, что (32) представляет собой матричную запись системы интегральных уравнений, содержащих в правых частях, кроме заданных функций, не определенные пока действительные постоянные $\beta^j_{s,m}$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ s, m = 0, \ldots, n-1)$ **; систему (32) мы можем записать также в виде

$$a(t_0)\mu(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t - t_0} + \int_L k_0(t_0, t)\mu(t)\,ds + \Omega^*(t_0) = F(t_0),$$

где

$$b(t_0) = -[\overline{\alpha^*(t_0)} - \alpha^*(t_0)], \tag{34}$$

$$k_0(t_0, t) = \frac{\alpha^*(t_0) - \alpha^*(t)}{2\pi i}\,\frac{d}{ds}\log\frac{t - t_0}{\bar t - \bar t_0} + \frac{t'}{\pi i(t - t_0)}\,\mathrm{Re}[\alpha^*(t) - \alpha^*(t_0)] +$$

$$+ \mathrm{Re}\Big[-\frac{\alpha^*(t)\,t'}{\pi i t} + \frac{\bar t'}{\pi^2}\int_L \frac{t_0\alpha^*(t_1) - t_1\alpha^*(t_0)}{(t_1 - t_0)(\bar t - \bar t_1)\,t_1}\,dt_1 +$$

$$+ \frac{\alpha^*(t_0)}{\pi^2}\int_L \Big(\frac{d}{ds}\log\frac{\bar t - \bar t_1}{t - t_1}\Big)\frac{dt_1}{t_1 - t_0} + \frac{t'}{\pi i}\int_L \frac{Q(t_0, t_1)\,dt_1}{t - t_1} + t' Q(t_0, t)\Big]. \tag{35}$$

3. Для определения степени регулярности функций, входящих в (32), заметим, что при нашем предположении относительно гладкости линии L имеют место следующие предложения.

Пусть $\varphi(t)$ — заданная на L функция, имеющая непрерывные в смысле Гельдера производные порядка $\leqslant k$ по дуге s. Тогда интеграл в смысле главного значения по Коши

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0},$$

---

* К получающемуся при этой подстановке интегралу $\frac{1}{\pi^2}\int_L \frac{\alpha^*(t)\,dt}{t - t_0}\int_L \frac{\mu(t_1)\,d\bar t_1}{\bar t_1 - \bar t}$ следует применить так называемую формулу перестановки Пуанкаре-Бертрана [см. напр. ([5]), стр. 61—65].

** См. (28).

как функция от s_0, будет иметь непрерывные в смысле Гельдера производные порядка $\leqslant k$ [см. напр., (6), стр. 154—155].

При тех же предположениях можно показать также, что производные порядка $\leqslant k$ от интеграла типа Коши

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$$

непрерывны в $T+L$ в смысле Гельдера [(5), стр. 58].

Пусть теперь φ зависит, кроме s, также от другого переменного $t(s_1)$. Предположим, что φ имеет непрерывные в смысле Гельдера производные порядка $\leqslant k$ по переменному s_1, а относительно s удовлетворяет условию Гельдера. Тогда интеграл

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t_1, t)\,dt}{t-t_0},$$

как функция от s_1, будет иметь непрерывные в смысле Гельдера производные порядка $\leqslant k$, а как функция от s_0 будет удовлетворять условию Гельдера [(5), стр. 54]*.

Вспомним, что, по предположению, координаты $x(s), y(s)$ точек L имеют непрерывные производные порядка $2n+2$, а заданные функции $g_{l,0}(s)$ — непрерывные производные порядка $2n-2$ $(l=0,1,\ldots,n-1)$. Поэтому из приведенных выше предложений непосредственно вытекает, что все элементы матриц $a(t), b(t), k_0(t_0, t)$ [(35), (34), (33), (25), (17), (16)] и векторов $\Omega^*(t), F(t)$ [(30), (29), (28), (19), (10)] будут иметь относительно своих аргументов (s и s_0) непрерывные в смысле Гельдера производные порядка не меньше n.

Перейдем к исследованию полученной системы (32). Из (20) имеем

$$\det \alpha^*(t) = \prod_{k=1}^{n-1} k!\,(it'\bar{t})^{\overline{\frac{n(n-1)}{2}}}, \tag{36}$$

и, следовательно, $\det \alpha^*(t) \neq 0$ всюду на L. Согласно этому свойству матрицы $\alpha^*(t)$, как известно, к системе (32) возможно применить существующую теорию системы сингулярных интегральных уравнений [(5), гл. VI]**.

Вычисляя теперь по формуле Н. И. Мусхелишвили [(5), стр. 427] индекс системы (32), в силу (36), находим***

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det \alpha^*(t)}{\det \overline{\alpha^*(t)}}\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg (t'\bar{t})^{n(n-1)}\right]_L = -pn(n-1). \tag{37}$$

---

* Н. И. Мусхелишвили проводит доказательство для случая $k=0$, но предложение легко может быть доказано для любого k.

** Известно также, что путем регуляризации можно привести нашу систему к эквивалентной системе уравнений Фредгольма, причем регуляризующий оператор строится в явном виде и зависит исключительно от матрицы $\alpha^*(t)$ [(5), § 130; см. также (7)].

*** Символ $[\ ]_L$ обозначает приращение выражения, заключенного в скобки, при обходе на L в положительном направлении.

4. Докажем, что основная n-гармоническая задача эквивалентна (в смысле разрешимости) системе интегральных уравнений (32). Из самого вывода этой системы следует, что если основная n-гармоническая задача разрешима, то существуют определенные действительные постоянные $\beta^j_{s,m}$ ($j = 1, 2, \ldots, p$; $s, m = 0, 1, \ldots, n-1$), для которых система (32) имеет решение.

Допустим, что система (32) разрешима для каких-либо значений постоянных $\beta^j_{s,m}$. Тогда, на основании отмеченных выше свойств ядра (матрицы $k(t_0, t)$) и правой части системы (32), нетрудно видеть, что ее решение $\mu(t) = (\mu_0(t), \ldots, \mu_{n-1}(t))$ будет обладать непрерывной в смысле Гельдера производной порядка n. Подставляя $\mu(t)$ в (31), мы получим вектор $\psi(z)$, компоненты которого — голоморфные функции в T, имеющие непрерывные в $T + L$ производные порядка n (см. п. 3). Определяя из (27) постоянные $B^j_{s,m}$ ($j = 1, 2, \ldots, p$; $s, m = 0, 1, \ldots, n-1$) и подставляя их вместе с найденными выше функциями $\psi_k(z)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) в формулу (12), мы получим искомое решение нашей задачи. Тем самым эквивалентность доказана.

Таким образом, *для разрешимости основной n-гармонической задачи необходимо и достаточно, чтобы система интегральных уравнений* (32) *была разрешима для каких-либо значений постоянных* $\beta^j_{s,m}$.

§ 4. Существование решения

В этом параграфе, пользуясь теоремой единственности, мы докажем разрешимость основной n-гармонической задачи.

1. Приступая к исследованию вопроса о разрешимости системы интегральных уравнений (32), начнем с рассмотрения соответствующей ей однородной системы

$$a(t_0)\mu^*(t_0) + \int_L k(t_0, t)\mu^*(t)\,ds = 0. \tag{38}$$

Пусть $\mu^*(t) = (\mu^*_0(t), \ldots, \mu^*_{n-1}(t))$ — некоторое ее решение.

Тогда, рассуждая как и выше, легко показать, что функция

$$u_0(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \bar{z}^k \left[\psi^*_k(z) + \overline{\psi^*_k(z)}\right],$$

где

$$\psi^*_k(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu^*_k(t)\,dt}{t - z} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1;\ z \in T),$$

удовлетворяет всем условиям однородной граничной задачи ($f_0(s) = f_1(s) = \cdots = f_{n-1}(s) = 0$) и, следовательно, по теореме единственности, будет тождественным нулем в области T. Отсюда и из сказанного в § 3 [см. (13)] вытекает, что

$$\psi^*_k(z) = iC_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

причем C_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) — произвольные постоянные. Следовательно, в качестве $\mu^*_k(t)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) мы будем иметь p линейно

независимых функций $\overset{1}{\mu}{}_k^*(t), \ldots, \overset{p}{\mu}{}_k^*(t)$, где

$$\overset{j}{\mu}{}_k^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in L_j \quad (j = 1,2, \ldots, p), \\ 0 & \text{на всех остальных контурах.} \end{cases}$$

Отсюда мы имеем всего np линейно независимых векторов

$$\left.\begin{matrix} \left(\overset{j}{\mu}{}_0^*(t), \quad 0, \quad 0, \ldots, \quad 0 \right) \\ \left(0, \quad \overset{j}{\mu}{}_1^*(t) \quad 0, \ldots, \quad 0 \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(0, \quad 0, \quad 0, \ldots, \overset{j}{\mu}{}_{n-1}^*(t)\right) \end{matrix}\right\} \quad j = 1,2, \ldots, p,$$

которые, в свою очередь, очевидно, удовлетворяют системе (38).

Таким образом, число k всех линейно независимых решений системы (38) будет

$$k = np. \tag{39}$$

2. Постараемся за счет подбора не определенных пока постоянных $\beta_{s,m}^j$ $(j = 1,2, \ldots, p;\ s, m = 0,1, \ldots, n-1)$ удовлетворить условиям разрешимости системы (32). Эти условия, как известно, имеют вид [([5]), стр. 428]

$$\int\limits_L (F(t) - \Omega^*(t)) \overset{r}{\nu}(t)\, ds = 0, \quad r = 1,2, \ldots, k', \tag{40}$$

где $\overset{r}{\nu}(t) = \left(\nu_0(t), \ldots, \overset{r}{\nu}_{n-1}(t)\right)$ — вполне определенные векторы*, причем число k' этих условий (или, что все равно, векторов $\overset{r}{\nu}(t)$) определяется при помощи введенных выше чисел $\varkappa$ и k по формуле [([5]), стр. 429]

$$k' = k - \varkappa. \tag{41}$$

Подставляя (28) в (40), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{s,m=0}^{n-1} \sigma_{s,m}^{j,r} \beta_{s,m}^j = \gamma_r, \quad r = 1,2, \ldots, k', \tag{42}$$

где $\sigma_{s,m}^{j,r}, \gamma_r$ — действительные постоянные, определяемые формулами:

$$\sigma_{s,m}^{j,r} = \int\limits_L \left(D_{s,m}^{0,j}(t) \overset{r}{\nu}_0(t) + \cdots + D_{s,m}^{n-1,j}(t) \overset{r}{\nu}_{n-1}(t)\right) ds,$$

$$\gamma_r = \int\limits_L \left(F_0(t) \overset{r}{\nu}_0(t) + \cdots + F_{n-1}(t) \overset{r}{\nu}_{n-1}(t)\right) ds$$

$$(j = 1,2, \ldots, p;\ r = 1,2, \ldots, k';\ s, m = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Из (41), (39) и (37) находим

$$k' = n^2 p$$

и, следовательно, для определения постоянных $\beta_{s,m}^j$ мы имеем систему (42) линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равным числу уравнений.

---

* Они являются линейно независимыми решениями некоторой однородной системы интегральных уравнений, связанной с (38).

Докажем, что определитель системы (42) отличен от нуля. В самом деле, если бы этот определитель был равен нулю, то однородная система алгебраических уравнений, соответствующая (42), имела бы нетривиальное решение $\beta^{*j}_{s,m}$. Тогда система интегральных уравнений, получающаяся из (32) при $F(t)=0$, была бы разрешима для этих $\beta^{*j}_{s,m}$. Обозначая решения этой системы через $\mu^*(t)=(\mu^*_0(t), \ldots, \mu^*_{n-1}(t))$ и рассуждая как выше, мы получили бы отличную от нуля* регулярную n-гармоническую функцию $u_0(x, y)$,

$$u_0(x,y)=\sum_{k=0}^{n-1} z^k \bar{z}^k \left[\psi^*_k(z)+\overline{\psi^*_k(z)}\right]+\sum_{j=1}^{p}\sum_{s,m=0}^{n-1} B^{*j}_{s,m}\bar{z}^s z^m \log[(z-z_j)(\bar{z}-\bar{z}_j)],$$

$$\psi^*_k(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu^*_k(t)\,dt}{t-z} \quad (z\in T),$$

$$B^{*j}_{s,m}=\beta^{*j}_{s,m}+i\beta^{*j}_{m,s}, \quad s>m,$$

$$B^{*j}_{s,s}=\beta^{*j}_{s,s},$$

$$\left(B^{*j}_{m,s}=\beta^{*j}_{s,m}-i\beta^{*j}_{m,s}, \quad s<m\right)$$

$$(k, s=0,1,\ldots,n-1; \quad j=1,2,\ldots,P; \quad m=0,1,\ldots,n-2),$$

удовлетворяющую однородной граничной задаче, что, в силу теоремы единственности, невозможно. Следовательно, система (42) имеет единственное решение. Очевидно, что для определенных таким образом постоянных $\beta^{j}_{s,m}$ система (32) будет иметь определенное решение $\mu(t)=(\mu_0(t), \ldots, \mu_{n-1}(t))$. Отсюда, в силу сказанного в конце предыдущего параграфа, вытекает существование решения поставленной граничной задачи. Заметим, наконец, что примененный здесь метод решения граничной задачи можно использовать и для более общего вида эллиптических уравнений.

Тбилисский матем. институт
им. А. М. Размадзе
Академии Наук Груз. ССР

Поступило
19.XII.1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений, Математ. сборник, т. 2 (44): 3 (1937), 465—498.

[2] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М., Гостехиздат, 1948.

[3] Шерман Д. И., К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах, Доклады Ак. Наук СССР, т. 28 (1940), 25—28.

[4] Векуа И. Н., Комплексное представление решений эллиптических дифференциальных уравнений и его применения к граничным задачам, Труды Тбилисского математического института, т. 7 (1939), 161—253.

[5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., Гостехиздат, 1946.

[6] Каландия А. И., Решение основной граничной задачи для уравнения $\Delta^n u=0$ в случае двухсвязной области, Труды Тбилисского математического института, т. 17 (1949), (131—162).

[7] Векуа Н. П., К теории систем сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщения Ак. Наук Груз. ССР, т. 4 (1943), 207—219.

* См. начало § 3 (равенство (19)).

О КОНКУРСАХ НА СОИСКАНИЕ ПРЕМИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР В 1951 ГОДУ

Отделение физико-математических наук Академии Наук СССР сообщает, что в 1951 году будут проведены конкурсы на соискание следующих премий Академии Наук СССР:

1. Премия имени **Н. Д. Папалекси** в размере 20 000 рублей за лучшую работу по физике.

Срок представления работ на соискание премии до 1 октября 1951 года.

2. Премия имени **П. Л. Чебышева** в размере 20 000 рублей за лучшую работу в области математики.

Срок представления работ на соискание премии до 1 октября 1951 года.

Работы на соискание премий направлять в Отделение физико-математических наук Академии Наук СССР (Москва, 56, Б. Грузинская, 10).

Премии присуждаются Президиумом Академии Наук СССР по конкурсу советским гражданам, их авторским коллективам и советским научным учреждениям.

Работы на соискание перечисленных премий могут представляться научными обществами, научно-исследовательскими институтами, высшими учебными заведениями, ведомствами, общественными организациями и отдельными лицами.

Работы на соискание премий представляются на русском языке в трех экземплярах, напечатанных на пишущей машинке или типографским способом, с надписью: «На соискание премии имени . . . .».

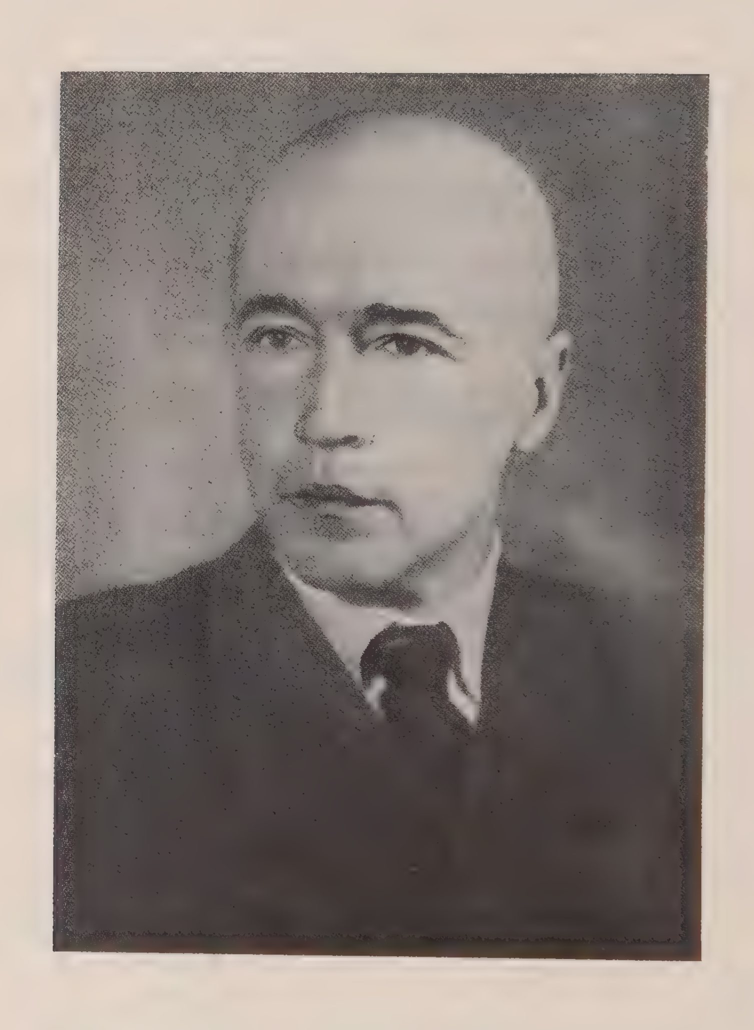
При работах, представляемых на соискание премий, должны быть приложены авторефераты и краткие биографические данные об авторе с перечнем его основных научных работ и изобретений.

Присуждение премий состоится в конце 1951 года.

Кроме того, Отделение физико-математических наук сообщает, что в 1951 году по конкурсу, объявленному в 1948 году, будут присуждены две премии имени великого русского ученого Н. И. Лобачевского за лучшие сочинения по геометрии (преимущественно неевклидовой).

Размер премий: 25 000 рублей (в советской или иностранной валюте) и 15 000 рублей (в советской валюте).

Отделение физико-математических наук
Академии Наук СССР



И. Петровский

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 201—204

С. Л. СОБОЛЕВ

К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ ИВАНА ГЕОРГИЕВИЧА ПЕТРОВСКОГО

18 января 1951 года исполнилось 50 лет со дня рождения выдающегося советского математика, академика Ивана Георгиевича Петровского. Работы Ивана Георгиевича относятся к самым различным областям математики. Им получены исключительно важные результаты в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в алгебраической геометрии, в качественной теории дифференциальных уравнений, в теории вероятностей и в других областях математической науки. Работы Ивана Георгиевича относятся к таким отделам математики, которые ближе всего примыкают к смежным областям естествознания. Для работ Ивана Георгиевича характерны чрезвычайно конкретные постановки задач, всегда больших и трудных.

Особенно велика заслуга Ивана Георгиевича в теории систем уравнений в частных производных. Он выделил и изучил классы систем уравнений, которые обладают свойствами соответственно эллиптических, гиперболических и параболических дифференциальных уравнений. Иван Георгиевич установил аналитичность решений систем уравнений с частными производными, названных им эллиптическими, исследовал начальные и краевые задачи для гиперболических и параболических систем. Все дальнейшее развитие теории систем уравнений в частных производных происходит на основе этих работ Ивана Георгиевича.

И. Г. Петровский исследовал также зависимость решения общего гиперболического уравнения от начальных условий. В этих работах решен вопрос о так называемых лакунах. Наличие лакун или их отсутствие связано с важным физическим явлением — диффузией волн. Им даны необходимые и достаточные условия существования лакун для случая уравнений с постоянными коэффициентами и необходимые условия в случае переменных коэффициентов.

В этих работах использованы глубокие топологические свойства алгебраических поверхностей и многомерных абелевых интегралов, полученные самим И. Г. Петровским в другом цикле интереснейших работ.

В 1901 году Гильберт поставил вопрос о расположении овалов кривой 6-го порядка. Созданный Иваном Георгиевичем метод позволил решить более общую задачу, касающуюся расположения овалов алгебраической кривой любого порядка. В последнее время Иван Георгиевич и его ученики получили ряд аналогичных результатов по топологии алгебраических поверхностей и пространственных кривых.

Иван Георгиевич впервые дал полное решение задачи Дирихле для n-мерной области методом конечных разностей.

За фундаментальные исследования по теории уравнений с частными производными Ивану Георгиевичу Петровскому была присуждена Сталинская премия первой степени.

Большое значение имеют работы И. Г. Петровского по теории вероятностей. Некоторые вопросы непрерывных случайных процессов приводят к задачам теории дифференциальных уравнений параболического типа. Исследуя параболические дифференциальные уравнения, Иван Георгиевич получил очень сильные результаты, связанные с законом повторного логарифма.

Ивану Георгиевичу принадлежат также глубокие исследования, касающиеся поведения интегральных кривых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.

Свою научную деятельность Иван Георгиевич сочетает с большой педагогической, общественной и научно-организационной работой. Иван Георгиевич принимает самое деятельное участие в подготовке новых поколений советских математиков. С 1933 года Иван Георгиевич является профессором Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Им прочитано большое количество основных и специальных курсов. Его лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, по интегральным уравнениям, по уравнениям с частными производными оформлены в виде прекрасных учебников, по которым учится молодежь.

С 1940 по 1944 г. И. Г. Петровский был деканом механико-математического факультета Московского ордена Ленина государственного университета имени М. В. Ломоносова. На него легла в военные годы забота о нуждах факультета в трудных условиях эвакуации. Иван Георгиевич превосходно справился с этой задачей.

Иван Георгиевич является не только крупнейшим ученым, но и талантливым организатором советской науки. Его деятельность в Академии Наук СССР очень широка и разнообразна. В течение нескольких лет Иван Георгиевич был заместителем директора Математического института имени В. А. Стеклова Академии Наук СССР. В 1949 г. общее собрание Академии Наук СССР избрало И. Г. Петровского академиком-секретарем Отделения физико-математических наук АН СССР. Возглавляя Отделение, Иван Георгиевич ведет большую и ответственную работу, направляя деятельность институтов Академии Наук СССР, работу ее филиалов.

Иван Георгиевич является главным редактором журнала «Математический сборник», ответственным редактором «Трудов Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР», председателем экспертной комиссии ВАК.

При огромной разносторонней научной и организационной деятельности Иван Георгиевич, обладая большим личным обаянием, всегда умеет тепло, по-человечески подойти к людям.

Пожелаем И. Г. Петровскому еще многих лет столь же блестящей деятельности на благо нашей великой Родине, во славу нашей советской науки.

СПИСОК ТРУДОВ И. Г. ПЕТРОВСКОГО

1928

1. Einige Bemerkungen zu den Arbeiten von O. Perron und L. A. Lusternik über das Dirichletsche Problem (*Матем. сб.*, т. 35, 105—110).

1929

2. Sur les fonctions primitives par rapport à une fonction continue arbitraire (*Comptes rendus*, t. 189, 1242—1245).

1933

3. Sur la topologie des courbes planes réeles et algébriques (*Comptes rendus*, t. 197 1270—1272).

1934

4. Über das Irrfahrtproblem (*Mathem. Ann.*, t. 109, 425—444).
5. О приведении второй вариации к каноническому виду треугольными преобразованиями [*Ученые зап. М. Г. У.*, вып. II, 5—16 (совместно с Л. А. Люстерником)].
6. Über die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung (*Ученые зап. М. Г. У.*, 2 : 2, 55—60).
7. Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes (*Матем сб.*, т. 41, 107—156).
8. Sur l'unicité de la fonction primitive par rapport à une fonction continue arbitraire (*Матем. сб.*, т. 41, 48—59).

1935

9. Nachtrag zu meiner Arbeit «Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes» (*Матем. сб.*, т. 42, 403).
10. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung (*Comp. math.*, 1 : 3, 383—419).

1936

11. Sur le problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles dans le domaine réel (*Comptes rendus*, t. 202, 1010—1012).
12. Sur le problème de Cauchy pour un système linéaire d'équations aux dérivées partielles dans un domaine réel (*Comptes rendus*, t. 202, 1246—1248).
13. О работах академика Ж. Адамара по уравнениям с частными производными [*Успехи матем. наук*, вып. 2, 82—91 (совместно с С. Л. Соболевым)].

1937

14. Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen (*Матем. сб.*, т. 2. (44), 815—870).
15. О системах дифференциальных уравнений, все решения которых аналитичны (*Доклады АН СССР*, т. 17, 339—342).
16. О задаче Коши в области неаналитических функций (*Успехи матем. наук*, вып. 3, 234—238).

1938

17. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме (*Бюллетень МГУ*, 1 : 6, 1—26).
18. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций (*Бюллетень М. Г. У.*, (A), 1 : 7, 1—72).
19. Об условиях равностепенной непрерывности семейства функций [*Бюллетень МГУ*, (A), 1—15 (совместно с К. Н. Смирновым)].
20. On the topology of real plane algebraic curves (*Ann. of Math.*, t. 39. 197—209).

1939

21. Sur l'analycité des solutions des systèmes d'équations différentielles (*Матем. сб.*, т. 5 : 47, 3—70).

1941

22. Метод Перрона решения задачи Дирихле (*Успехи матем. наук*, вып. 8, 107—114).
23. О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям (обзор) [*Успехи матем. наук*, вып. 8, 8—31 (совместно с С. Н. Бернштейном)].
24. Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей (*Успехи матем. наук*, вып. 8, 161—170).

1943

25. О зависимости решения задачи Коши от начальных данных (*Доклады АН СССР*, т. 38, 163—165).

1944

26. О диффузии волн и лакунах для систем гиперболических уравнений (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 8, 101—106).

1945

27. О диффузии волн и лакунах для гиперболических уравнений (*Матем. сб.*, т. 17 : 59, 289—370).
28. О скорости распространения разрывов производных смещения на поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы (*Доклады АН СССР*, т. 47, 258—261).

1946

29. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными (*Успехи матем. наук*, т. 1 : 3—4, 44—70).

1947

30. К теории уравнений с частными производными (*Юбилейн. сб.*, посв. тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции, т. 1, изд. АН СССР, 214—230).

1949

31. О топологии действительных алгебраических поверхностей [*Доклады АН СССР*, т. 67, 31—32 (совместно с О. А. Олейник)].
32. О топологии действительных алгебраических поверхностей [*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т 13, 389—402 (совместно с О. А. Олейник)].
33. О топологических свойствах алгебраических линий и поверхностей (*Вестник МГУ* № 11, 23—27).

Учебники

34. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (1-е изд.—1939 г., 2-е изд. — 1947 г., 3-е изд. 1949 г., М.—Л., ГТТИ).
35. Лекции по теории интегральных уравнений (М. — Л., ГТТИ, 1948).
36. Лекции об уравнениях с частными производными (М. — Л., ГТТИ, 1950).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 205–218

Н. А. САПОГОВ

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ КРАМЕРА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе доказывается, что каждая из случайных величин X_1 и X_2, сумма которых приближенно распределена нормально, причем допускается определенного вида связь между X_1 и X_2, также приближенно подчиняется нормальному закону, и оценивается степень этого приближения.

§ 1. Введение

1. То обстоятельство, что сумма $X_1 + X_2 = X$ двух независимых случайных величин X_1 и X_2 распределена по нормальному закону, если каждая из них в отдельности имеет нормальное распределение, составляет содержание одной из элементарных теорем теории вероятностей. Обратное предложение, утверждающее нормальность X_1 и X_2, если нормальна их сумма X, высказанное сначала в качестве гипотезы П. Леви и доказанное в 1936 г. Г. Крамером ([1]), далеко не столь элементарно. Кроме доказательства, принадлежащего самому Крамеру, отметим некоторое его видоизменение, приводимое С. Н. Бернштейном [([2]), стр. 427—430], где, в частности, используется более элементарная теорема Лиувилля вместо теоремы Адамара из теории целых функций, используемой Крамером.

Однако ни оригинальный вариант доказательства самого Крамера, ни упомянутое его видоизменение не позволяют непосредственно сделать заключение о характере распределения случайных величин X_1 и X_2, если их сумма X подчиняется нормальному закону не точно, а лишь приближенно, а также, если величины X_1 и X_2 не являются вполне независимыми. Настоящая работа имеет своей целью исследовать эти вопросы. Предварительное сообщение о результатах этой работы сделано в заметке автора ([3]).

2. Главный результат работы формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА. *Пусть функция распределения $F(x)$ суммы*

$$X = X_1 + X_2 \tag{1.1}$$

двух независимых случайных величин X_1 и X_2 удовлетворяет условию

$$\left| F(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| < \varepsilon, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon < 1$ — данное положительное число.

Пусть $F_1(x)$ — функция распределения величины X_1 и

$$\int_{-N}^{N} x\,dF_1(x) = a_1,$$

$$\int_{-N}^{N} x^2\,dF_1(x) - \left(\int_{-N}^{N} x\,dF_1(x)\right)^2 = \sigma_1^2 > 0, \quad N = \sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Тогда

$$\left| F_1(x) - \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,dx \right| < C\sigma_1^{-\frac{3}{4}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{8}}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.3}$$

где C — постоянная, не зависящая ни от ε, ни от σ_1, ни от a_1.

Аналогичное заключение справедливо и для функции распределения $F_2(x)$ величины X_2.

Повидимому, оценка (1.3) не является окончательной и допускает улучшение.

В конце работы рассматривается обобщение основного результата для случая, когда величины X_1 и X_2 зависят друг от друга, а также сделано несколько других замечаний.

§ 2. Сведение к ограниченным величинам

3. Мы будем считать, что медиана m_1 величины X_1 равна нулю. Такое предположение не уменьшает общности: если $m_1 \neq 0$, то достаточно вместо X_1 рассматривать величину $X_1 - m_1$, а вместо X_2 — величину $X_2 + m_1$. Итак, пусть

$$P\{X_1 < 0\} \leqslant \frac{1}{2}, \quad P\{X_1 \leqslant 0\} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

(Знак $P\{\cdots\}$ здесь и в дальнейшем обозначает вероятность события, указанного в скобках $\{\cdots\}$.)

Легко проверить, что при этом условии медиана m_2 величны X_2 удовлетворяет неравенству

$$|m_2| < 1, \tag{2.2}$$

каково бы ни было неотрицательное $\varepsilon \leqslant \frac{1}{20}$.

Действительно, по определению медианы,

$$P\{X_2 < m_2\} \leqslant \frac{1}{2}, \quad P\{X_2 \leqslant m_2\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому, учитывая также (1.1), (1.2) и (2.1), получаем

$$\frac{1}{4} \leqslant P\{X_1 \leqslant 0;\ X_2 \leqslant m_2\} \leqslant P\{X_1 + X_2 \leqslant m_2\} =$$

$$= P\{X \leqslant m_2\} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{m_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \varepsilon,$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{m_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt > \frac{1}{4}-\varepsilon \geqslant \frac{1}{4}-\frac{1}{20}=0,2.$$

Это приводит к неравенству:

$$m_2 > -1.$$

Кроме того,

$$P\{X_1+X_2<m_2\} \leqslant P\{X_1<0\}+P\{X_2<m_2\}-$$
$$-P\{X_1<0\}\cdot P\{X_2<m_2\} \leqslant \frac{3}{4},$$

так как

$$u+v-uv \leqslant \frac{3}{4},$$

если

$$0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{3}{4} \geqslant P\{X<m_2\} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{m_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\varepsilon,$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{m_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt < \frac{3}{4}+\frac{1}{20}=0,8.$$

Это приводит к неравенству:

$$m_2<1.$$

4. В дальнейшем потребуется указать такое число $a>0$, что

$$F_1(a)-F_1(-a) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad F_2(a)-F_2(-a) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Покажем, что можно взять $a=3$, если $\varepsilon \leqslant \frac{1}{20}$. Пусть a_2 выбрано по условию

$$P\{|X_2|<a_2\} \leqslant \frac{1}{2}, \quad P\{|X_2| \leqslant a_2\} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Тогда

$$P\{|X_2| \geqslant a_2\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, справедливо по крайней мере одно из двух неравенств:

$$P\{X_2 \leqslant -a_2\} \geqslant \frac{1}{4} \tag{2.4}$$

или

$$P\{X_2 \geqslant a_2\} \geqslant \frac{1}{4}. \tag{2.5}$$

Примем гипотезу (2.4). Учитывая (1.1), (1.2) и (2.1), получим

$$\frac{1}{8} \leqslant P\{X_1 \leqslant 0;\ X_2 \leqslant -a_2\} \leqslant P\{X \leqslant -a_2\} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \varepsilon,$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \geqslant \frac{1}{8} - \frac{1}{20} = 0{,}075.$$

Поэтому

$$a_2 < 1{,}5 < 3. \tag{2.6}$$

Аналогично рассматривается гипотеза (2.5), приводящая к тому же результату (2.6).

Из (2.3) и (2.6) следует, что

$$F_2(3) - F_2(-3) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Такое же неравенство верно и для $F_1(x)$. Действительно, выберем a_0 по условию:

$$P\{|X_1| < a_0\} \leqslant \frac{1}{2}, \quad P\{|X_1| \leqslant a_0\} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Тогда

$$P\{|X_1| \geqslant a_0\} \geqslant \frac{1}{2},$$

и возможны два случая:

$$P\{X_1 \leqslant -a_0\} \geqslant \frac{1}{4}$$

или

$$P\{X_1 \geqslant a_0\} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Оба эти случая аналогичны; остановимся на одном из них, например, на первом. Имеем:

$$\frac{1}{8} \leqslant P\{X_1 \leqslant -a_0;\ X_2 \leqslant m_2\} \leqslant P\{X \leqslant -a_0 + m_2\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a_0+m_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \varepsilon;$$

следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a_0+m_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \geqslant \frac{1}{8} - \frac{1}{20} = 0{,}075;$$

это приводит к соотношению:

$$a_0 - m_2 < 1{,}5,$$

откуда, учитывая (2.2), получаем

$$a_0 < 3.$$

Следовательно, в силу (2.7),

$$F_1(3) - F_1(-3) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

5. Введем вместо величин X_1 и X_2 новые величины X_1^* и X_2^*, очевидно, также независимые, следующим образом:

$$\begin{aligned} X_i^* &= X_i, \quad \text{если} \quad |X_i| \leqslant N, \\ X_i^* &= 0, \quad \text{если} \quad |X_i| > N, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2)$$

где $N = \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$.

Через $F_1^*(x)$ и $F_2^*(x)$ будем обозначать, соответственно, функции распределения величин X_1^* и X_2^*, а через $F^*(x)$ — функцию распределения суммы

$$X^* = X_1^* + X_2^*.$$

Прежде всего ясно, что

$$|F^*(x) - F(x)| \leqslant \Big[\int\limits_{|x|>N} dF_1(x) + \int\limits_{|x|>N} dF_2(x)\Big] = \Delta. \tag{2.9}$$

Это следует из того, что вероятность неравенства

$$X \neq X^*$$

не превосходит Δ. Оценим теперь величину Δ. Так как

$$P\{X_1 \leqslant 0;\ X_2 < y\} \leqslant P\{X \leqslant y\} \leqslant \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

то

$$F_2(-N) \leqslant 2\varepsilon + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{N}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Аналогично, из

$$P\{X_1 \geqslant 0;\ X_2 \geqslant y\} \leqslant P\{X \geqslant y\} < \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{y}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

получаем

$$1 - F_2(N) < 2\varepsilon + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{N}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Поэтому

$$\int\limits_{|y|>N} dF_2(y) < 4\varepsilon + \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{N}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{2.10}$$

Точно так же, принимая во внимание (2.2), найдем, что

$$\int\limits_{|y|>N} dF_1(y) < 4\varepsilon + \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{N-1}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\,. \tag{2.11}$$

Неравенства (1.2), (2.9), (2.10) и (2.11) приводят к соотношению:

$$\left| F^*(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| < 9\varepsilon + \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{N-1}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \varepsilon_1\,. \tag{2.12}$$

§ 3. Исследование характеристических функций

6. Пусть $f^*(z)$ — характеристическая функция величины X^*:

$$f^*(z) = M(e^{izX^*}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, dF^*(x)\,.$$

Так как $|X^*| \leqslant 2N$, то $f^*(z)$ — целая функция комплексного аргумента z. Равным образом, характеристические функции

$$f_1^*(z) = M(e^{izX_1^*}) \quad \text{и} \quad f_2^*(z) = M(e^{izX_2^*}) \tag{3.1}$$

также являются целыми.

Наша ближайшая цель состоит в отыскании оценки снизу модуля $|f^*(z)|$ в круге

$$|z| \leqslant T = \frac{N}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\,.$$

Вследствие равенства

$$e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{izx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\,,$$

означающего, что $e^{-\frac{z^2}{2}}$ является характеристической функцией нормального распределения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x)\,,$$

получаем

$$|f^*(z) - e^{-\frac{z^2}{2}}| \leqslant \left| \int\limits_{-2N}^{2N} e^{izx}\, d[F^*(x) - \Phi(x)] \right| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{|x| \geqslant 2N} e^{izx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right|. \tag{3.2}$$

Первое слагаемое правой части этого неравенства оцениваем следующим образом:

$$\left|\int_{-2N}^{2N} e^{izx}\, d\left[F^*(x)-\Phi(x)\right]\right| =$$

$$= \left| \left\{e^{izx}\left[F(x)-\Phi(x)\right]\right\}_{-2N}^{2N} - \int_{-2N}^{2N} \left[F^*(x)-\Phi(x)\right] ize^{izx}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{\frac{N^2}{4}}\varepsilon_1 + \frac{N^2}{2} e^{\frac{N^2}{4}}\varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 e^{\frac{N^2}{4}}\left(1+\frac{N^2}{4}\right), \tag{3.3}$$

если $|z| \leqslant T = \frac{N}{8}$ (здесь ε_1 определяется формулой (2.12)).

Второе слагаемое правой части неравенства (3.2) оцениваем так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{|x|\geqslant 2N} e^{izx} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right| < \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{2N}^{\infty} e^{Tx-\frac{x^2}{2}}dx <$$

$$< \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{\frac{1}{2}T^2}}{2N-T}\int_{2N-T}^{\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}}du < \frac{1}{2N}e^{-\frac{7}{4}N^2} \tag{3.4}$$

Соединяя неравенства (3.2), (3.3) и (3.4), получаем

$$\left| f^*(z) - e^{-\frac{z^2}{2}} \right| < 2\varepsilon_1 e^{\frac{N^2}{4}}\left(1+\frac{N^2}{4}\right) + \frac{1}{2N}e^{-\frac{7}{4}N^2} <$$

$$< \left(18\varepsilon + \frac{16}{\sqrt{2\pi}(N-1)}e^{-\frac{1}{2}(N-1)^2}\right)e^{\frac{N^2}{4}}\left(1+\frac{N^2}{4}\right) + \frac{1}{2N}e^{-\frac{7}{4}N^2} <$$

$$< 18\varepsilon N^2 e^{\frac{N^2}{4}} + N^2 e^{-\frac{21}{128}N^2} + e^{-\frac{7}{4}N^2} =$$

$$= 18\varepsilon^{\frac{3}{4}}\ln\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{21}{128}}\ln\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{7}{4}}, \tag{3.5}$$

если только $N = \sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}$ достаточно велико и $|z| \leqslant T = \frac{N}{8}$. Но в рассматриваемом круге справедливо неравенство

$$\left| e^{-\frac{1}{2}z^2} \right| \geqslant e^{-\frac{1}{128}N^2} = \varepsilon^{\frac{1}{128}}. \tag{3.6}$$

Поэтому, в силу (3.5) и (3.6),

$$\left| f^*(z) - e^{-\frac{z^2}{2}} \right| < \frac{1}{2}\left| e^{-\frac{1}{2}z^2} \right| \tag{3.7}$$

при $|z| \leqslant T$, и если ε настолько мало, что выполняется соотношение

$$18\varepsilon^{\frac{3}{4}}\ln\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{21}{128}}\ln\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{7}{4}} < \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{128}}.$$

Следовательно, в том же круге $|z| \leqslant T$

$$\left| f^*(z) \right| > \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}|z^2|}, \tag{3.8}$$

откуда, в частности, заключаем, что $f^*(z)$ не имеет нулей при $|z| \leqslant T$.

7. Так как, по (3.1),

$$f^*(z) = f_1^*(z) f_2^*(z),$$

то при $|z| \leqslant T$ обе функции $f_1^*(z)$ и $f_2^*(z)$ не имеют нулей, и, следовательно, их логарифмы

$$\varphi_1(z) = \ln f_1^*(z) \quad \text{и} \quad \varphi_2(z) = \ln f_2^*(z)$$

являются функциями регулярными.

Из (3.7) вытекает, что

$$|f^*(z)| = |f_1^*(z) f_2^*(z)| < \frac{3}{2} e^{\frac{1}{2}|z|^2}, \quad |z| \leqslant T. \tag{3.9}$$

Пусть $z = t + is$, где t и s — вещественные числа. Тогда, в силу (2.8),

$$f_1^*(is) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dF_1^*(x) \geqslant \int_{-3}^{3} e^{-sx} dF_1^*(x) \geqslant \frac{1}{2} e^{-3|s|}, \tag{3.10}$$

так как, если выполнено (2.8), то тем более справедливо неравенство

$$F_1^*(3) - F_1^*(-3) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что

$$|f_2^*(z)| \leqslant f_2^*(is) = \frac{f^*(is)}{f_1^*(is)} \leqslant 3e^{3|z| + \frac{1}{2}|z^2|}. \tag{3.11}$$

Аналогично находим, что

$$|f_1^*(z)| \leqslant 3e^{3|z| + \frac{1}{2}|z^2|}, \quad |z| \leqslant T. \tag{3.12}$$

Кроме того, неравенство (3.8) вместе с (3.11) и (3.12) дает возможность оценить модули $|f_1^*(z)|$ и $|f_2^*(z)|$ снизу. Действительно,

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|z^2|} < |f^*(z)| = |f_1^*(z) f_2^*(z)|;$$

поэтому, в силу (3.11),

$$|f_1^*(z)| > \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|z^2|}}{|f_2^*(z)|} \geqslant \frac{1}{6} e^{-3|z| - |z|^2}. \tag{3.13}$$

Аналогично, используя (3.12), получим

$$|f_2^*(z)| > \frac{1}{6} e^{-3|z| - |z|^2}, \quad |z| \leqslant T. \tag{3.14}$$

8. Допустим сначала, что

$$\frac{1}{\sigma_1^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3.15}$$

Тогда, опираясь на доказанные неравенства (3.11), (3.12), (3.13) и (3.14), можем убедиться в том, что для больших T $f_1^*(z)$ и $f_2^*(z)$ при $|z| \leqslant T_1 = \sqrt[4]{\frac{T}{\sigma_1}}$ мало отличаются от некоторых многочленов второй степени.

Будем основываться на известной формуле, дающей представление регулярной в круге функции через ее вещественную часть, заданную на окружности этого круга (формула Шварца):

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\frac{\xi + z}{\xi - z}\,d\varphi,$$

где $f(z) = u(r, \psi) + iv(r, \psi)$ — некоторая функция, регулярная в круге $|z| = |re^{i\psi}| \leqslant R$, а $\xi = Re^{i\varphi}$. Применительно к функции $\varphi_1(z) = \ln f_1^*(z)$ получим, полагая $R = T$:

$$\varphi_1(z) = i\,\mathrm{Im}\,\varphi_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \ln|f_1^*(\xi)|\frac{\xi + z}{\xi - z}\,d\varphi,$$

откуда

$$\varphi_1'''(z) = \frac{6}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f_1^*(\xi)|\,\frac{\xi\,d\varphi}{(\xi - z)^4}. \tag{3.16}$$

Из неравенства (3.12) и (3.13) вытекает

$$|\ln|f_1^*(\xi)|| < (|\xi| + 3)^2, \tag{3.17}$$

каково бы ни было $|\xi| \leqslant T$.

Напомним, что мы рассматриваем только те значения z, которые удовлетворяют, в силу (3.15), условию

$$|z| \leqslant T_1 = \sqrt[4]{\frac{T}{\sigma_1}} \leqslant 4T\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{3}}. \tag{3.18}$$

Принимая во внимание (3.17), из (3.16) получаем

$$|\varphi_1'''(z)| < \frac{12T(T + 3)^2}{(T - |z|)^4},$$

откуда, вследствие (3.18), для малых $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$|\varphi_1'''(z)| < \frac{c_1T^3}{T^4} = \frac{c_1}{T}$$

(c_1, c_2, ... — постоянные).

Интегрируя это неравенство последовательно три раза, получим

$$\left|\varphi_1(z) - \alpha_1 - i\beta_1 z + \frac{1}{2}\gamma_1 z^2\right| < \frac{c_1T_1^3}{T}, \tag{3.19}$$

где α_1, β_1, γ_1 — некоторые постоянные, $|z| \leqslant T_1$.

Аналогичное неравенство имеет место для логарифма $\varphi_2(z)$ характеристической функции $f_2^*(z)$ величины X_2^*.

§ 4. Доказательство основной теоремы

9. Из (3.19), так как $\varphi_1(0) = 0$, следует, что

$$|\alpha_1| < \frac{c_1 T_1^3}{T},$$

поэтому

$$\left|\varphi_1(z) - i\beta_1 z + \frac{1}{2}\gamma_1 z^2\right| < \frac{2c_1 T_1^3}{T}.$$

Следовательно,

$$f_1^*(z) = e^{\varphi_1(z)} = e^{i\beta_1 z - \frac{1}{2}\gamma_1 z^2 + H(z)},$$

где $H(z)$ — регулярная в круге $|z| \leqslant T_1$ функция, причем в этом круге

$$|H(z)| < 2c_1 \frac{T_1^3}{T} \leqslant 2c_1$$

(так как $T_1 \leqslant \sqrt[3]{T}$). Но тогда

$$e^{H(z)} = 1 + H_1(z),$$

где

$$H_1(z) = \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots \tag{4.1}$$

— некоторя целая функция, причем при $|z| \leqslant T_1$

$$|H_1(z)| < c_2 \frac{T_1^3}{T}. \tag{4.2}$$

Итак,

$$f_1^*(z) = e^{i\beta_1 z - \frac{1}{2}\gamma_1 z^2}(1 + H_1(z)) = \left[1 + \left(i\beta_1 z - \frac{1}{2}\gamma_1 z^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!}\left(i\beta_1 z - \frac{1}{2}\gamma_1 z^2\right)^2 + \ldots\right](1 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \cdots). \tag{4.3}$$

Здесь

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=T_1} \frac{H_1(z)\,dz}{z^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=T_1} \frac{H_1(z)\,dz}{z^3}.$$

Поэтому, учитывая (4.2), находим

$$|\lambda_1| < c_2 \frac{T_1}{T}, \quad |\lambda_2| < \frac{c_2}{T}.$$

Но $f_1^*(z)$, как характеристическая функция величины X_1^*, будучи целой, допускает разложение

$$f_1^*(z) = 1 + ia_1 z - \frac{a_2}{2!}z^2 + \cdots + \frac{i^k a_k}{k!}z^k + \cdots,$$

где

$$a_k = M[(X_1^*)^k], \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Сравнивая это разложение с (4.3), получим

$$\beta_1 - i\lambda_1 = a_1; \quad \gamma_1 + \beta_1^2 - 2i\beta_1\lambda_1 - 2\lambda_2 = a_2.$$

В силу найденных оценок для λ_1 и λ_2, отсюда вытекает

$$|\beta_1 - a_1| = |\lambda_1| < c_2 \frac{T_1}{T}$$

и, для малых $\varepsilon > 0$,

$$|\gamma_1 - \sigma_1^2| = |2\lambda_2 - \lambda_1^2| < \frac{c_3}{T}$$

$\left(\text{так как } \frac{T_1^2}{T} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0\right)$. Здесь $\sigma_1^2 = a_2 - a_1^2$ — дисперсия X_1^*.

Соединяя полученные неравенства, находим

$$\left|\varphi_1(z) - ia_1 z + \frac{1}{2}\sigma_1^2 z^2\right| < 2c_1 \frac{T_1^3}{T} + c_4 \frac{T_1^2}{T} < c_5 \frac{T_1^3}{T}. \tag{4.4}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для $\varphi_2(z) = \ln f_2^*(z)$. Положим

$$g_1(z) = e^{ia_1 z - \frac{1}{2}\sigma_1^2 z^2}.$$

Тогда из неравенства (4.4) заключаем, что

$$f_1^*(z) = g_1(z)(1 + H_2(z)), \tag{4.5}$$

где $H_2(z)$ — целая и, при $|z| \leqslant T_1$, ограниченная функция:

$$|H_2(z)| < c_6 \frac{T_1^3}{T}. \tag{4.6}$$

Кроме того, $H_2(0) = 0$, так как $f_1^*(0) = 1$.

10. Соотношение (4.5), указывающее степень близости между характеристическими функциями $f_1^*(z)$ и $g_1(z)$, позволяет оценить уклонение друг от друга соответствующих распределений. Для достижения этой цели воспользуемся теоремой, принадлежащей Эссеену ([4]) [см. также ([5]), стр. 212—214)]:

ТЕОРЕМА (Эссеен). *Пусть A, L и $\lambda > 0$ — постоянные, $F(x)$ — неубывающая функция, $G(x)$ — функция ограниченной вариации. Если:*

1) $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(\infty) = G(\infty)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\, dx < \infty$;

3) *производная $G'(x)$ существует при всех x и $|G'(x)| \leqslant A$;*

4) $\int\limits_{-L}^{L} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right| dt = \lambda$, *где $f(t)$ и $g(t)$ — характеристические функции, соответственно, функций $F(x)$ и $G(x)$, то*

$$|F(x) - G(x)| \leqslant k \frac{\lambda}{2\pi} + c(k) \frac{A}{L},$$

каково бы ни было число $k > 1$, где $c(k)$ — конечное положительное число, определяемое числом k.

Эта теорема непосредственно применима к нашему случаю, если положить

$$L = T_1, \quad f(t) = f_1^*(t), \quad g(t) = g_1(t).$$

Действительно, из (4.5) вытекает, что

$$\left|\frac{f_1^*(t)-g_1(t)}{t}\right| \leqslant \left|\frac{H_2(t)}{t}\right|,$$

каково бы ни было действительное t. Так как $H_2(0)=0$, то $\frac{H_2(z)}{z}$ — целая функция, причем при $|z|=T_1$, по (4.6):

$$\left|\frac{H_2(z)}{z}\right| \leqslant c_6\frac{T_1^2}{T},$$

и так как модуль регулярной функции достигает своего максимума на границе области, то при $|z| \leqslant T_1$ также имеем

$$\left|\frac{H_2(z)}{z}\right| \leqslant c_6\frac{T_1^2}{T}.$$

Поэтому

$$\int_{-T_1}^{T_1}\left|\frac{f_1^*(t)-g_1(t)}{t}\right| dt \leqslant \int_{-T_1}^{T_1}\left|\frac{H_2(t)}{t}\right| dt \leqslant 2c_6\frac{T_1^3}{T}=\lambda.$$

Кроме того, распределение, соответствующее характеристической функции $g_1(t)$, а именно

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx=G(x),$$

имеет ограниченную производную:

$$|G'(x)|=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \leqslant \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому теорема Эссеена позволяет утверждать, что

$$\left|F_1^*(x)-\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx\right| < c_7\frac{T_1^3}{T}+\frac{c_8}{T_1\sigma_1}=$$

$$=\frac{c_9}{\sigma_1^{\frac{3}{4}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{8}}}, \qquad -\infty<x<\infty. \tag{4.7}$$

Мы принимали гипотезу (3.15). Если эта гипотеза не выполняется, т. е.

$$\frac{1}{\sigma_1^2} > \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}},$$

то неравенство (4.7) тривиально, лишь бы только постоянная c_9 была больше $2^{\frac{3}{4}}$, так как при этих условиях

$$\frac{c_9}{\sigma_1^{\frac{3}{4}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{8}}} > 1.$$

Чтобы получить утверждение (1.3) доказываемой теоремы, достаточно заметить, что

$$|F_1(x) - F_1^*(x)| \leqslant \int\limits_{|x| \geqslant \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}} dF_1(x) < 4\varepsilon + \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}} - 1}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Постоянно фигурировавшее в процессе доказательства требование, что ε должно быть достаточно малым, не существенно при окончательной формулировке теоремы. Действительно, от этого ограничения освобождаемся за счет увеличения постоянной C.

Отметим, в частности, что если $\sigma_1 \geqslant \sigma > 0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, где σ — постоянная, то будет выполняться неравенство

$$\left| F_1(x) - \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx \right| < \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\omega}},$$

какова бы ни была постоянная $\omega < \frac{1}{8}$, лишь бы только $\varepsilon > 0$ было достаточно мало.

§ 5. Дополнительные замечания

11. Обратим внимание на то, что доказанная теорема может быть перефразирована в терминах моментов. Действительно, близость функции распределения $F(x)$ величины X к нормальной функции распределения означает, что близкими являются некоторое число первых моментов распределения $F(x)$ и соответствующие моменты нормального распределения. Следовательно, при этом условии, в силу доказанной теоремы, мы можем утверждать также, что близки некоторое число первых моментов распределения $F_1(x)$ и соответствующие первые моменты некоторого нормального распределения $\Phi_1(x)$.

Гипотеза полной независимости слагаемых X_1 и X_2 не является в нашем исследовании существенной.

Пусть $X = X_1 + X_2$ есть сумма двух, вообще говоря, зависимых друг от друга величин X_1 и X_2, функции распределения a priori которых суть $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Если функция распределения $F(x)$ величины X удовлетворяет условию

$$|F(x) - \Phi(x)| < \varepsilon', \quad -\infty < x < \infty,$$

а зависимость между X_1 и X_2 такова, что

$$\left| P\{X_1 + X_2 < x\} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) \right| < \varepsilon'', \quad -\infty < x < \infty,$$

то, вводя независимые величины $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ и полагая

$$\overline{X}_1 + \overline{X}_2 = \overline{X},$$

будем иметь

$$|\overline{F}(x) - \Phi(x)| < \varepsilon' + \varepsilon'',$$

где $\overline{F}(x)$ — функция распределения $\overline{X}$. Теперь можно применить теорему п. 2.

Отметим одно простое следствие теоремы Крамера.

Пусть сумма двух случайных величин

$$X = X_1 + X_2$$

подчиняется закону Гаусса, но величины X_1 и X_2 не являются, вообще говоря, независимыми. Если существует постоянное число a, такое, что величины X_1 и $X_2 - aX_1$ независимы, то X_1 и X_2 связаны нормальной корреляцией.

Действительно, в этом случае величины $(1 + a) X_1$ и $X_2 - aX_1$ независимы, и, кроме того, их сумма

$$(1 + a) X_1 + (X_2 - aX_1) = X_1 + X_2 = X$$

подчиняется закону Гаусса. Поэтому каждая из величин $(1 + a) X_1$ и $X_2 - aX_1$ в отдельности подчиняется закону Гаусса; следовательно, величины X_1 и X_2 связаны нормальной корреляцией.

Наконец, небесполезно обратить внимание на обстоятельство, хотя и стоящее в стороне от общего плана работы, но, повидимому, тесным образом связанное с теоремой Крамера. Подобно гуассовскому распределению, распределение Пуассона обладает свойством, выраженным теоремой Д. А. Райкова (6), вполне аналогичной теореме Крамера. Вместе с тем, оба эти распределения — Пуассона и Гаусса — суть предельные для биномиальных распределений. Но для последних также справедлива теорема, аналогичная теоремам Крамера и Райкова, а именно, если сумма двух независимых случайных величин распределена биномиально, то каждое из слагаемых в отдельности также подчиняется биномиальному распределению (или является несобственной случайной величиной). Эта теорема есть следствие того факта, что производящая функция $(p + tq)^n$ биномиального распределения имеет полиномиальными делителями только функции того же вида.

Поступило
24. IV. 1950

ЛИТЕРАТУРА

1 Cramer H., Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunction, Math. Zeitschrift, 41 (1936), 405—414.

2 Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, М. — Л., 1946.

3 Сапогов Н. А., Об одном свойстве закона распределения Гаусса, Доклады Ак. Наук СССР, XXIII, 3 (1950), 461—462.

4 Esseen C. G., Fourier analysis of distribution functions. A math. study of the Laplace — Gaussian law, Acta Math., 77 (1945), 1—125.

5 Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. — Л., 1949.

6 Райков Д. А., О разложении законов Гаусса и Пуассона, Известия Ак. Наук СССР, серия мат., 2 (1938), 91—124.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 219–242

С. Б. СТЕЧКИН

О ПОРЯДКЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе исследуются наилучшие приближения непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы наилучшие приближения имели заданный (степенной) порядок убывания.

Введение

В работе рассматриваются непрерывные функции f с периодом 2π и их приближения тригонометрическими полиномами. Через $t_n(x)$ обозначается тригонометрический полином порядка не выше n, а через $t_n^*(x) = t_n^*(x, f)$ — тригонометрический полином, наименее уклоняющийся от f среди всех $t_n(x)$. Мы полагаем $\|f\| = \max\limits_x |f(x)|$ и, несколько отступая от обычных обозначений, пишем

$$E_n[f] = \|f - t_{n-1}^*(f)\| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Введем ряд определений.

Определение 1. Пусть k — натуральное число. Будем говорить что функция $\omega_k(\delta, f)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ есть модуль непрерывности k-го порядка функции f, если

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \|\Delta_h^k f(x)\|,$$

где $\Delta_h^k f(x)$ — конечная разность функции f k-го порядка с шагом h:

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih).$$

Аналогичное понятие уже вводилось ранее С. Н. Бернштейном ([1]). Среди модулей непрерывности всех порядков особенно важное значение имеют случаи $k = 1$ и $k = 2$. Случай $k = 1$ является классическим; вместо $\omega_1(\delta, f)$ мы будем писать просто $\omega(\delta, f)$ и называть эту функцию, как это и принято, модулем непрерывности ([16]); функцию $\omega_2(\delta, f)$ мы будем называть модулем гладкости.

Определение 2. Зададим натуральное число k. Будем говорить, что функция $\omega(\delta)$ есть функция сравнения k-го порядка, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(\delta)$ определена для $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$,
2) $\omega(\delta)$ не убывает,
3) $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$,
4) $\omega(\delta) \geqslant C_1 \delta^k > 0$ при $\delta > 0$.

Нетрудно показать, что если $f \not\equiv 0$, то $\omega_k(\delta, f)$ есть функция сравнения k-го порядка (см. лемму 5).

Определение 3. Зафиксируем натуральное число k и функцию сравнения k-го порядка $\omega(\delta)$. Будем говорить, что функция f принадлежит к классу $H_k[\omega]$ ($f \in H_k[\omega]$), если найдется константа $C_2 > 0$ такая, что

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_2 \omega(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

Вместо $H_k[\delta^\alpha]$ $(0 < \alpha \leqslant k)$ будем писать просто H_k^α.

Если для последовательности функций $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\omega_k(\delta, f_n) \leqslant C_2 \omega(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi, \quad n = 1, 2, \ldots),$$

где C_2 не зависит от n, то будем писать: $f_n \in H_k[\omega]$ равномерно относительно n.

Понятие классов $H_k[\omega]$ является естественным обобщением классов Липшица и классов функций, имеющих ограниченную k-ю производную.

Определение 4. Зафиксируем число $\alpha > 0$ и обозначим через p наименьшее натуральное число, не меньшее чем α $(p = -[-\alpha])$. Будем говорить, что функция $\varphi(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ принадлежит к классу N^α ($\varphi \in N^\alpha$), если она

1) есть функция сравнения p-го порядка и

2) удовлетворяет условию: существует константа $C_3 > 0$ такая, что для $0 < \delta < \eta \leqslant \pi$

$$\eta^{-\alpha} \varphi(\eta) \leqslant C_3 \delta^{-\alpha} \varphi(\delta).$$

Условие 2) является небольшим ослаблением условия «$\eta^{-\alpha}\varphi(\eta)$ не убывает». Функции класса N^α будут играть основную роль во всем дальнейшем изложении.

Определение 5. Будем говорить, что функция $\psi(t)$ имеет порядок $\varphi(t)$, если найдутся две положительные константы C_4 и C_5 такие, что для всех t, для которых определены функции φ и ψ,

$$C_4 \varphi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant C_5 \varphi(t).$$

При выполнении этих условий будем писать

$$\psi(t) \sim \varphi(t).$$

В настоящей работе мы рассматриваем следующие задачи:

1. При каких ограничениях на непрерывную функцию $F(u)$ $(-1 \leqslant u \leqslant +1)$ ее наилучшие приближения $E_n[F; -1, +1]$ обыкновенными многочленами имеют заданный порядок $\varphi(n^{-1})$?

2. При каких ограничениях на непрерывную периодическую функцию $f(x)$ ее наилучшие приближения $E_n[f]$ тригонометрическими полиномами имеют заданный порядок $\varphi(n^{-1})$?

Подстановка $u = \cos x$ сводит задачу 1 к задаче 2. Достаточно, следовательно, рассматривать лишь задачу 2.

Мы рассматриваем задачу 2 для неаналитических функций $f(x)$. Точнее, мы ограничиваемся случаем, когда $\varphi(\delta) \in N^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$.

С. Н. Бернштейн, Д. Джексон и Ш. Валле-Пуссен получили зависимости между оценками сверху для $E_n[f]$ и дифференциальными свойствами f. Некоторые дополнения к их теоремам доказаны А. Зигмундом (формулировки теорем см. ниже). Нам предстоит поэтому получить зависимости между дифференциальными свойствами f и оценками $E_n[f]$ снизу.

Необходимо еще отметить, что для ряда неаналитических функций F известны асимптотические формулы для наилучших приближений. Впервые такую формулу доказал С. Н. Бернштейн (2), именно,

$$E_n[\,|x|\,; -1, +1] \approx \frac{\mu}{n} \quad (\mu > 0).$$

Наша основная теорема формулируется следующим образом:

Пусть $\varphi \in N^\alpha$. *Для того чтобы*

$$E_n \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

необходимо, чтобы для любого натурального $k > \alpha$, *и достаточно, чтобы для некоторого натурального* $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta).$$

Изложим теперь кратко содержание каждого из параграфов работы.

В § 1 выводятся основные свойства модулей непрерывности высших порядков. Почти все эти свойства используются в дальнейшем тексте.

§ 2 посвящен обобщению теоремы Джексона. Как известно, Джексон (6), (7) (см. также (5), стр. 296) доказал следующую теорему: если f имеет непрерывную r-ую производную $f^{(r)}$, то

$$E_n[f] \leqslant C_6(r)\, n^{-r}\, \omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right).$$

Таким образом, теорема Джексона дает оценку сверху для наилучших приближений, если известны дифференциальные свойства аппроксимируемой функции.

В 1945 г. А. Зигмунд (16) обобщил эту теорему для одного частного случая, именно, он показал, что если

$$\omega_2(\delta, f^{(r)}) = Oo(\delta),$$

то

$$E_n[f] = Oo(n^{-r-1}).$$

В 1947 г. появилась работа С. Н. Бернштейна (4). Одна из теорем этой работы содержит в качестве следствия такое предложение: пусть

$$\omega_k(\delta, f) = O(\delta^\alpha) \quad (0 < \alpha \leqslant k).$$

Тогда

$$E_n[f] = O(n^{-\alpha}).$$

Мы доказываем в § 2 следующее обобщение этих теорем:

$$E_n[f] \leqslant C_7(k+r)\, n^{-r} \omega_k\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right) \quad (r = 0, 1, \ldots, n = 1, 2, \ldots).$$

В § 3 формулируется доказанное в работе автора (9) обобщение известного неравенства С. Н. Бернштейна (1), (3) для производных от тригоно-

метрического полинома. Мы перечисляем затем ряд следствий из нашего неравенства. Они играют существенную роль при доказательстве теорем § 4.

В § 4 рассматривается следующая задача. Пусть полином t_n близок к заданной функции f или последовательность полиномов $\{t_n\}$ достаточно хорошо аппроксимирует заданную функцию f. Как связаны тогда дифференциальные свойства f с дифференциальными свойствами t_n?

Если t_n образуются из f посредством регулярного метода суммирования рядов Фурье, то ответ тривиален: для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно, чтобы $t_n \in H_k[\omega]$ равномерно относительно n. Частный случай $k=1$ и сумм Фейера отмечен в книге Зигмунда (см. ([15]), § 4.79).

Оказывается, что этот результат сохраняется и для наилучших полиномов: для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно, чтобы $t_n^* \in H_k[\omega]$ равномерно относительно n.

Отметим еще один результат параграфа: для того чтобы $f \in H_k^k$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(t_n^*)^{(k)} = O(1).$$

Заметим, что Заманский ([13]), ([14]) рассматривает сходные вопросы, но его результаты менее полны.

§ 5 посвящен «обратным теоремам» теории приближения (см. ([1]), ([12])). Хорошо известно такое предложение: пусть

$$E_n[f] = O(n^{-\alpha}).$$

Тогда, если α не целое, $r=[\alpha]$, $\beta=\alpha-r$, то f имеет непрерывную производную $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\,\beta$.

Случай целого α рассмотрен Зигмундом ([16]). В этом случае

$$\omega_2(\delta,\ f^{(\alpha-1)}) = O(\delta).$$

Нетрудно показать [см., например, ([4])], что эти два предложения эквивалентны следующему: пусть $0<\alpha<k$ и

$$E_n[f] = O(n^{-\alpha}).$$

Тогда

$$\omega_k(\delta, f) = O(\delta^\alpha).$$

В работе ([1]) С. Н. Бернштейн доказал также эквивалентность условий $E_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ и $\omega(\delta) = O\left(\frac{1}{\ln \delta^{-1}}\right)$.

Мы переносим эти теоремы на условия вида

$$E_n[f] = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $\varphi \in N^\alpha$.

Кроме того, в этом параграфе доказано, например, такое предложение: пусть k — натуральное число и

$$E_n[f] = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$(t_n^*)^{(k)} = O\left(n^k \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В конце параграфа даются уточнения теорем Валле-Пуссена (12). Аналогичными задачами занимались также А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [см. (11)].

В § 6 доказывается основная теорема. Мы даем здесь же оценку $E_n[f]$ снизу, если

$$0 < C_8 \delta^\beta \leqslant \omega_k(\delta, f) \leqslant C_9 \delta^\alpha \quad (0 \leqslant \alpha < \beta < k).$$

Именно, тогда

$$E_n[f] \geqslant C_{10} n^{-\frac{\beta(k-\alpha)}{k-\beta}} > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Случай $\alpha = 0$ установлен С. Н. Бернштейном (1).

Настоящая работа представляет собою почти без изменений кандидатскую диссертацию автора. Формулировки основных теорем работы опубликованы ранее (10). Все теоремы этой работы были получены мною в результате занятий на семинаре по теории приближений в Математическом институте Академии Наук СССР, и я приношу глубокую благодарность руководителю семинара С. Н. Бернштейну за внимание к моей работе и ценные замечания.

§ 1. Простейшие свойства модулей непрерывности

Этот параграф носит вспомогательный характер. Здесь устанавливается несколько простейших свойств модулей непрерывности высших порядков. Все рассматриваемые здесь функции $f_1, f_2, \ldots$ непрерывны.

ЛЕММА 1. *Для любого натурального k и любого $\delta \geqslant 0$*

$$\omega_k(\delta, f_1 + f_2) \leqslant \omega_k(\delta, f_1) + \omega_k(\delta, f_2). \tag{1.1}$$

Эта лемма очевидна.

ЛЕММА 2. *Пусть k и l — натуральные числа, $l < k$. Тогда для любого $\delta \geqslant 0$*

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k \| f \| \tag{1.2}$$

и

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^{k-l} \omega_l(\delta, f). \tag{1.3}$$

Доказательство. Положим

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Тогда для $0 \leqslant l < k$ имеем

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h^{k-l} \Delta_h^l f(x) = \sum_{i=0}^{k-l} (-1)^{k-l-i} \binom{k-l}{i} \Delta_h^l f(x + ih),$$

откуда

$$\| \Delta_h^k f(x) \| \leqslant \sum_{i=0}^{k-l} \binom{k-l}{i} \| \Delta_h^l f(x + ih) \| = 2^{k-l} \| \Delta_h^l f(x) \|.$$

Отсюда при $l = 0$ вытекает (1.2), а при $0 < l < k$ — (1.3).

Полагая в (1.3) $l=1$, находим, что

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^{k-1}\omega_1(\delta, f).$$

Из этого неравенства видно, что для любого натурального k

$$\omega_k(\delta, f) \to 0 \quad (\delta \to +0). \tag{1.4}$$

ЛЕММА 3. *Для любого натурального k модуль непрерывности k-го порядка $\omega_k(\delta, f)$ является непрерывной функцией от δ.*

Доказательство. Пусть $0<\delta<\eta$, $|t|\leqslant 1$. Имеем

$$\Delta_{\eta t}^k f(x) = \Delta_{\delta t}^k f(x) + \{\Delta_{\eta t}^k f(x) - \Delta_{\delta t}^k f(x)\} =$$
$$= \Delta_{\delta t}^k f(x) + \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-1}\binom{k}{i}\{f(x+i\eta t) - f(x+i\delta t)\}.$$

Отсюда

$$\|\Delta_{\eta t}^k f(x)\| \leqslant \|\Delta_{\delta t}^k f(x)\| + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\|f(x+i\eta t) - f(x+i\delta t)\|$$

и

$$\omega_k(\eta, f) \leqslant \omega_k(\delta, f) + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\omega_1(i(\eta-\delta), f) \leqslant \omega_k(\delta, f) + 2^k\omega_1(k(\eta-\delta), f).$$

Таким образом,

$$0 \leqslant \omega_k(\eta, f) - \omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k\omega_1(k(\eta-\delta), f),$$

и так как $\omega_1(h, f)\to 0$ при $h\to +0$, то отсюда вытекает непрерывность функции $\omega_k(\delta, f)$, и лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть k и p — натуральные числа. Тогда для любого $\delta\geqslant 0$*

$$\omega_k(p\delta, f) \leqslant p^k\omega_k(\delta, f). \tag{1.5}$$

Доказательство. Индукция по k дает формулу

$$\Delta_{ph}^k f(x) = \sum_{l_1=0}^{p-1}\cdots\sum_{l_k=0}^{p-1}\Delta_h^k f(x + l_1 h + \cdots + l_k h).$$

Отсюда

$$\|\Delta_{ph}^k f(x)\| \leqslant p^k\|\Delta_h^k f(x)\|$$

и

$$\omega_k(p\delta, f) \leqslant p^k\omega_k(\delta, f).$$

ЛЕММА 5. *Пусть k — натуральное число, $\delta>0$, $\eta>0$. Тогда*

$$\omega_k(\eta, f) \leqslant \delta^k(\delta+\eta)^k\omega_k(\delta, f). \tag{1.6}$$

Если, кроме того, $0<\delta<\eta$, то

$$\eta^{-k}\omega_k(\eta, f) \leqslant 2^k\delta^{-k}\omega_k(\delta, f). \tag{1.7}$$

Доказательство. Докажем сперва неравенство (1.6). Это неравенство очевидно для $\eta\leqslant\delta$. Рассмотрим поэтому случай $\delta<\eta$. Найдем натуральное число p из условий

$$\eta\delta^{-1} \leqslant p < \eta\delta^{-1}+1. \tag{1.8}$$

Тогда $\eta < p\delta$, и так как $\omega_k(\eta, f)$ является неубывающей функцией от η, то, принимая во внимание (1.5) и (1.8), получим

$$\omega_k(\eta, f) \leqslant \omega_k(p\delta, f) \leqslant p^k\omega_k(\delta, f) \leqslant (\eta\delta^{-1}+1)^k\omega_k(\delta, f) = \delta^{-k}(\delta+\eta)^k\omega_k(\delta, f),$$

и неравенство (1.6) доказано.

Неравенство (1.7) вытекает из (1.6), так как $\delta+\eta \leqslant 2\eta$ для $0 < \delta < \eta$.

Неравенство (1.7) показывает, что для любой $f \not\equiv 0$ и любого натурального k

$$\omega^k(\delta, f) \in N^k. \tag{1.9}$$

ЛЕММА 6. *Пусть f имеет r-ю производную $f^{(r)}$. Тогда*

$$\omega_r(\delta, f) \leqslant \delta^r \| f^{(r)} \| \tag{1.10}$$

и для любого натурального k

$$\omega_{k+r}(\delta, f) \leqslant \delta^r\omega_k(\delta, f^{(r)}). \tag{1.11}$$

Доказательство. Оба неравенства непосредственно вытекают из формулы

$$\Delta_h^{k+r} f(x) = \int_0^h du_1 \ldots \int_0^h \Delta_h^k f^{(r)}(x+u_1+\cdots+u^r)\, du^r.$$

§ 2. Обобщение теоремы Джексона

Здесь будет получено небольшое усиление теоремы Джексона о наилучших приближениях периодических функций тригонометрическими полиномами.

ЛЕММА 7. *Пусть дано натуральное число k. Существует последовательность ядер $\{K_n(t)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, где $K_n(t)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n, удовлетворяющая условиям:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\, dt \leqslant C_1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k |K_n(t)|\, dt \leqslant C_2(k)(n+1)^{-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Эту лемму можно считать известной. Как показывает простой подсчет, совершенно аналогичный проводившемуся Джексоном ([6]), ([7]) (см. также ([5]), стр. 196), в качестве ядер $K_n(t)$ можно взять ядра Джексона достаточно высокой степени, т. е. положить

$$K_n(t) = b_p\left(\frac{\sin\frac{pt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k_0},$$

где k_0 — целое, не зависит от n, $2k_0 \geqslant k+2$, натуральное p определяется из неравенства

$$\frac{n}{2k_0} < p \leqslant \frac{n}{2k_0} + 1,$$

а b_p выбираются так, чтобы была выполнена нормировка (2.1).

ЛЕММА 8. *Если последовательность ядер $\{K_n(t)\}$ удовлетворяет всем условиям предыдущей леммы, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (|t| + n^{-1})^k |K_n(t)|\, dt \leqslant C_3(k)\, n^{-k} \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2.4)$$

Доказательство. Имеем, пользуясь (2.2) и (2.3),

$$\int_{-\pi}^{\pi} (|t| + n^{-1}) |K_n(t)|\, dt = \int_{|t| \leqslant n^{-1}} + \int_{n^{-1} < |t| \leqslant \pi} \leqslant$$

$$\leqslant 2^k n^{-k} \int_{|t| \leqslant n^{-1}} |K_n(t)|\, dt + 2^k \int_{n^{-1} \leqslant |t| \leqslant \pi} |t|^k |K_n(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^k n^{-k} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\, dt + 2^k \int_{-\pi}^{\pi} |t|^k |K_n(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^k C_1 n^{-k} + 2^k C_2(k)\, n^{-k} = 2^k (C_1 + C_2(k))\, n^{-k} \leqslant C_3(k)\, n^{-k},$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть k — натуральное число. Тогда*

$$E_n[f] \leqslant C_3(k)\, \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2.5)$$

Доказательство. Пусть последовательность ядер $\{K_n(t)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет всем условиям леммы 7. Положим

$$\sigma_{n-1}(x) = (-1)^{k+1} \int_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(t) \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + it)\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $\sigma_{n-1}(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $n-1$. Оценим $\| f(x) - \sigma_{n-1}(x) \|$. Имеем

$$f(x) - \sigma_{n-1}(x) = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(t) \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + it)\, dt =$$

$$= (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(t)\, \Delta_k^t f(x)\, dt.$$

Поэтому

$$E_n[f] \leqslant \| f(x) - \sigma_{n-1}(x) \| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |K_{n-1}(t)|\, \| \Delta_t^k f(x) \|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |K_{n-1}(t)|\, \omega_k(|t|, f)\, dt. \qquad (2.6)$$

Оценим последний интеграл. Полагая в неравенстве (1.6) $\eta=|t|$, $\delta=n^{-1}$, получим, что

$$\omega_k(|t|, f)\leqslant n^k\left(|t|+\frac{1}{n}\right)^k\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Отсюда и из (2.4) следует:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_{n-1}(t)|\,\omega_k(|t|, f)\,dt\leqslant n^k\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left(|t|+\frac{1}{n}\right)^k|K_{n-1}(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant n^k\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right)C_3(k)\,n^{-k}=C_3(k)\,\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right)\quad(n=1, 2, \ldots).$$

Подставляя эту оценку в (2.6), получаем утверждение теоремы.

Следствие 1.1. Пусть k — натуральное число, r — целое неотрицательное. Тогда

$$E_n[f]\leqslant C_3(k+r)\,n^{-r}\omega_k\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)\quad(n=1, 2, \ldots).\tag{2.7}$$

В самом деле, согласно (1.11),

$$\omega_{k+r}\left(\frac{1}{n}, f\right)\leqslant n^{-r}\omega_k\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right),$$

и применение теоремы 1 дает (2.7).

§ 3. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна

В этом параграфе формулируется одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от тригонометрического полинома, доказанное мною в работе (⁹).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $0<\delta<\frac{2\pi}{n}$. *Тогда для любого натурального* k

$$\|t_n^{(k)}(x)\|\leqslant\left(\frac{n}{2\sin\frac{n\delta}{2}}\right)^k\|\Delta_\delta^k\, t_n(x)\|,\tag{3,1}$$

и неравенство обращается в равенство в том и только в том случае, если

$$t_n(x)=a\cos nx+b\sin nx+c.$$

Доказательство этого неравенства опубликовано мною в работе (⁹).

Отметим несколько следствий из этого неравенства.

Следствие 2.1 (неравенство С. Н. Бернштейна):

$$\|t_n^{(k)}(x)\|\leqslant n^k\|t_n(x)\|.\tag{3.2}$$

Полагая в (3.1) $\delta=\frac{\pi}{n}$, получаем

$$t_n^{(k)}(x)\|\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^k\|\Delta_{\frac{\pi}{n}}^k t_n(x)\|;\,*$$

но, по лемме 2,

$$\|\Delta_{\frac{\pi}{n}}^k\, t_n(x)\|\leqslant 2^k\|t_n(x)\|,$$

откуда и следует (3.2).

* Это неравенство доказано С. М. Никольским [см. (⁸)].

Нетрудно проверить, что два последних неравенства одновременно обращаются в равенство только в том случае, если

$$t_n(x) = a \cos nx + b \sin nx.$$

Следствие 2.2. *Пусть* $0 < \delta < \frac{2\pi}{n}$. *Тогда*

$$\left(\frac{2}{n\delta} \sin \frac{n\delta}{2}\right)^k \leqslant \frac{\| \Delta_\delta^k t_n(x) \|}{\delta^k \| t_n^{(k)}(x) \|} < 1. \tag{3.3}$$

Первое неравенство совпадает с утверждением теоремы 2, а второе вытекает из очевидной оценки

$$\| \Delta_\delta^{(k)} t_n(x) \| \leqslant \delta^k \| t_n^{(k)}(x) \|. \tag{3.4}$$

Таким образом, для $0 < \delta \leqslant \theta \frac{2\pi}{n}$, где $\theta = \text{const}$, $0 < \theta < 1$, средний член в (3.3) заключен между двумя пределами, зависящими только от θ.

Следствие 2.3. *Пусть* $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}$. *Тогда*

$$\| t_n^{(k)}(x) \| \leqslant \left(\frac{n}{2 \sin \frac{n\delta}{2}}\right)^k \omega_k(\delta, t_n). \tag{3.5}$$

В частности,

$$\| t_n^{(k)}(x) \| \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^k \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, t_n\right). \tag{3.6}$$

Следствие 2.4. *Пусть* $\delta > 0$ *и* $0 < \eta \leqslant \frac{\pi}{n}$. *Тогда*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \left(\frac{n\delta}{2 \sin \frac{n\eta}{2}}\right)^k \omega_k(\eta, t_n). \tag{3.7}$$

В частности, для $\eta = \frac{\pi}{\eta}$ *имеем*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \left(\frac{n\delta}{2}\right)^k \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, t_n\right). \tag{3.8}$$

В самом деле, из (3.4) или (1.11) следует:

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \delta^k \| t_n^{(k)}(x) \|$$

и остается воспользоваться неравенством (3.5).

Следствие 2.5. *Пусть* $0 < \delta < \eta \leqslant \frac{\pi}{n}$. *Тогда*

$$\left(\frac{\delta}{2\eta}\right)^k \omega_k(\eta, t_n) \leqslant \omega_k(\delta, t_n) \leqslant \left(\frac{n\delta}{2 \sin \frac{n\eta}{2}}\right)^k \omega_k(\eta, t_n). \tag{3.9}$$

Вторая половина неравенства совпадает со следствием 2.4, а первая непосредственно вытекает из (1.7).

§ 4. Дифференциальные свойства тригонометрических полиномов, аппроксимирующих заданную функцию

В этом параграфе устанавливается, что если тригонометрический полином $t_n(x)$ близок к заданной функции f, то его модули непрерывности можно оценить через модули непрерывности f.

ТЕОРЕМА 3. *Зафиксируем натуральные числа k и n и пусть*

$$\| f - t_n \| \leqslant C_1 \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right). \tag{4.1}$$

Тогда для любого $\delta > 0$

$$\omega_k (\delta, t_n) \leqslant \omega_k (\delta, f) + 2^k C_1 \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right), \tag{4.2}$$

$$\omega_k (\delta, t_n) \leqslant \left(\sin \frac{1}{2} \right)^{-k} (2^{-k} + C_1) n^k \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right) \delta^k, \tag{4.3}$$

$$\omega_k (\delta, t_n) \leqslant \left(\sin \frac{1}{2} \right)^{-k} (1 + 2^k C_1) \omega_k (\delta, f), \tag{4.4}$$

и

$$\| t_n^{(k)} \| \leqslant \left(\sin \frac{1}{2} \right)^{-k} (2^{-k} + C_1) n^k \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right). \tag{4.5}$$

Предварительные замечания. Неравенства (4.2) и (4.4) предпочтительнее для больших δ, а (4.3) — для малых. Если $\delta \geqslant \frac{1}{n}$, то (4.2) сильнее, чем (4.4); однако (4.4) имеет более симметричную форму и часто удобнее в приложениях.

Доказательство. Докажем (4.2). Пользуясь (1.1), (1.2) и (4.1), имеем

$$\omega_k (\delta, t_n) \leqslant \omega_k (\delta, f) + \omega_k (\delta, t_n - f) \leqslant \omega_k (\delta, f) + \\ + 2^k \| f - t_n \| \leqslant \omega_k (\delta, f) + 2^k C_1 \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right).$$

Докажем (4.5). Положим в (4.2) $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда получим:

$$\omega_k \left(\frac{1}{n}, t_n \right) \leqslant (1 + 2^k C_1) \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right),$$

после чего (3.5) дает (4.5).

(4.3) следует из (4.5) в силу (1.10).

Остается доказать (4.4). Пусть сперва $\delta \geqslant \frac{1}{n}$. Тогда из (4.2) следует:

$$\omega_k (\delta, t_n) \leqslant \omega_k (\delta, f) + 2^k C_1 \omega_k (\delta, f) = \\ = (1 + 2^k C_1) \omega_k (\delta, f) \leqslant \left(\sin \frac{1}{2} \right)^{-k} (1 + 2^k C_1) \omega_k (\delta, f).$$

Рассмотрим, наконец, случай $\delta \leqslant \frac{1}{n}$. Из неравенства (1.7) выводим

$$n^k \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right) \delta^k \leqslant 2^k \omega_k (\delta, f).$$

Подставляя эту оценку в (4.3), получаем (4.4) для $\delta \leqslant \frac{1}{n}$.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Следствие 3.1 Пусть для некоторого натурального k и любого натурального n

$$\| f - t_n \| \leqslant C_2 \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right). \tag{4.6}$$

Тогда для любого $\delta > 0$

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_3(k)\, \omega_k(\delta, f) \tag{4.7}$$

равномерно относительно n.

Следствие 3.2. Пусть для некоторого натурального k и любого натурального n

$$\| f - t_n \| \leqslant C_4 \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Тогда

$$\| t_n^{(k)} \| \leqslant C_5(k)\, n^k \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.8}$$

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$t_n^* \in H_k[\omega] \tag{4.9}$$

равномерно относительно n,

Это вытекает из теоремы 1, следствия 3.1 и того очевидного замечания, что если выполнено условие (4,9), то $f \in H_k[\omega]$.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы $f \in H_k{}^k$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\| t_n^{*(k)} \| = O(1). \tag{4.10}$$

Это доказывается аналогично теореме 4, только вместо следствия 3.1 нужно воспользоваться следствием 3.2.

Неравенства теоремы 3 имеют тот недостаток, что их правые части явно зависят от константы C_1. Таким образом, если вместо фиксированного номера n и одного полинома t_n рассматривать последовательность полиномов $\{t_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то C_1 окажется, вообще говоря, зависящей от n, и теорема 3 даст оценки, не равномерные относительно n. Покажем, как избавиться от этого неудобства.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть для некоторого натурального k*

$$\varphi \in N^k, \qquad f \in H_k[\varphi] \tag{4.11}$$

и

$$\| f - t_n \| \leqslant C_6 \varphi(n^{-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.12}$$

Тогда для любого $\delta > 0$

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_7(k)\, \varphi(\delta) \tag{4.13}$$

равномерно относительно n.

Доказательство. Пусть сперва $\delta \geqslant \frac{1}{n}$. Из неравенства (4.2) следует, что

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \omega_k(\delta, f) + 2^k C_6 \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

и на основании (4.11),

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_8 \varphi(\delta) + 2^k C_6 \varphi(\delta) = C_9(k)\, \varphi(\delta) \quad \left(\delta \geqslant \frac{1}{n}\right). \tag{4.14}$$

Рассмотрим случай $\delta \leqslant \frac{1}{n}$. Положим в (4.14) $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда получим

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, t_n\right) \leqslant C_9(k)\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из этого неравенства, в силу (3.7), следует, что

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_{10}(k)\,(n\delta)^k\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right);$$

но так как, по условию, $\varphi \in N^k$, то

$$(n\delta)^k\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant C_{11}\varphi(\delta) \quad \left(\delta \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

Отсюда

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_{10}(k)\,C_{11}\varphi(\delta) = C_{12}(k)\,\varphi(\delta) \quad \left(\delta \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

Окончательно,

$$\omega_k(\delta) \leqslant C_7(k)\,\varphi(\delta),$$

и теорема доказана.

Пример 1. Пусть s_n — частные суммы ряда Фурье функции f. Тогда для любого натурального k

$$\omega_k(\delta, s_n) \leqslant C_{13}(k)\,\omega_k(\delta, f)\lg(\delta^{-1}+1)$$

равномерно относительно n.

В самом деле, по неравенству Лебега,

$$\| f - s_n \| \leqslant (L_n + 1)\,E_n[f],$$

где $\{L_n\}$ — константы Лебега. Но, как известно,

$$L_n \leqslant C_{14}\ln(n+1) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и, по теореме 1,

$$E_n[f] \leqslant C_{15}(k)\,\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Поэтому

$$\| f - s_n \| \leqslant C_{16}(k)\,\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right)\ln(n+1).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 6 при

$$\varphi(\delta) = \omega_k(\delta, f)\ln(\delta^{-1}+1).$$

О случае $k = 1$ см. ([15]), § 4.79.

В следующем параграфе будет показано, как можно видоизменить ограничения (4.11) теоремы 6.

§ 5. Обобщение обратных теорем С. Н. Бернштейна и Ш. Валле-Пуссена

В этом параграфе обобщаются и уточняются так называемые «обратные теоремы» теории приближения. Речь идет об оценке дифференциальных свойств функции f, если известны некоторые свойства последовательности ее наилучших приближений $\{E_n\}$.

ЛЕММА 9. *Зададим натуральное число k, и пусть*

$$\| f - t_n \| \leqslant F_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.1}$$

и

$$\| t_n^{(k)} \| \leqslant G_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.2}$$

Тогда

$$\omega_k (\delta, f) \leqslant 2^k \min_n \{\delta^k G_n + F_n\} \quad (0 < \delta \leqslant 1). \tag{5.3}$$

Доказательство. Имеем, согласно (1.1);

$$\omega_k (\delta, f) \leqslant \omega_k (\delta, t_n) + \omega_k (\delta, f - t_n).$$

Но из (1.10) и (5.2) получаем

$$\omega_k (\delta, t_n) \leqslant \delta^k \| t_n^{(k)} \| \leqslant \delta^k G_n,$$

а из (1.2) и (5.1)

$$\omega_k (\delta, f - t_n) \leqslant 2^k \| f - t_n \| \leqslant 2^k F_n.$$

Поэтому

$$\omega_k (\delta, f) \leqslant \delta^k G_n + 2^k F_n \leqslant 2^k \{\delta^k G_n + F_n\};$$

левая часть этого неравенства не зависит от n, а потому

$$\omega_k (\delta, f) \leqslant 2^k \min_n \{\delta^k G_n + F_n\},$$

и лемма доказана.

Для получения хороших оценок $\omega_k (\delta, f)$ обычно достаточно взять $n \sim \frac{1}{\delta}$. Однако не исключена возможность, что в некоторых случаях другой выбор $n = n(\delta)$ может оказаться предпочтительнее.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть k — натуральное число, функция $\omega(\delta)$ не убывает и*

$$\| f - t_n \| \leqslant C_1 \omega \left(\frac{1}{n} \right) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.4}$$

Для того чтобы $f \in H_k [\omega]$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\| t_n^{(k)} \| \leqslant C_2 n^k \omega \left(\frac{1}{n} \right) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.5}$$

Доказательство. Необходимость условия (5.5) вытекает из следствия 3.2. Установим его достаточность, для чего воспользуемся леммой 9. Получаем:

$$\omega_k (\delta, f) \leqslant C_3 (k) \{(n\delta)^k + 1\} \omega \left(\frac{1}{n} \right).$$

Положим здесь $n = [\delta^{-1}] + 1$; тогда для $0 < \delta \leqslant 1$ будем иметь $n\delta = \delta [\delta^{-1}] + \delta \leqslant 2$ и $n^{-1} \leqslant \delta$; поэтому

$$\omega_k (\delta, f) \leqslant C_3 (k) \{2^k + 1\} \omega (\delta) = C_4 (k) \omega (\delta),$$

и теорема доказана.

Отметим два следствия из этой теоремы.

Следствие 7.1. *Пусть k — натуральное число, $\omega(\delta)$ не убывает и*

$$E_{n+1}[f] \leqslant C_5 \omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{5.6}$$

Для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\| t_n^{*(k)} \| \leqslant C_6 n^k \omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{5.7}$$

Следствие 7.2. *Пусть k — натуральное число и $\varphi \in N^k$. Если*

$$\| f - t_n \| \leqslant C_7 \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

и

$$\| t_n^{(k)} \| \leqslant C_8 n^k \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1,\ 2, \ldots), \tag{5.8}$$

то

$$\omega_k(\delta,\ t_n) \leqslant C_9 \varphi(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant 1)$$

равномерно относительно n.

Это вытекает из теорем 7 и 6.

Теорема 7 показывает, что нужно добавить к условию (5.4), чтобы получить $f \in H_k[\omega]$. Теперь мы получим оценки для $\omega_k(\delta, f)$, исходя только из условий вида (5.4). Попутно выясняется, что при некоторых дополнительных ограничениях на функцию $\omega(\delta)$ условие (5.5) становится излишним. Суть дела в том, что при этих ограничениях (5.4) влечет (5.5).

ЛЕММА 10. *Пусть*

$$\| f - t_n \| \leqslant F_{n+1} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{5.9}$$

где $F_1 \geqslant F_2 \geqslant \ldots \geqslant F_n \geqslant \ldots$. Тогда для любого натурального k

$$\| t_n^{(k)} \| \leqslant C_{10}(k) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} F_\nu \quad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{5.10}$$

Доказательство. Зафиксируем натуральное число n, определим натуральное p из условий

$$2^{p-1} \leqslant n < 2^p$$

и построим последовательность номеров $\{n_l\}$ $(l = 0,\ 1, \ldots, p)$, положив

$$n_0 = 0, \quad n_l = 2^l \quad (l = 1,\ 2, \ldots, p-1), \quad n_p = n.$$

Для оценки $t_n^{(k)}$ представим t_n в таком виде:

$$t_n(x) = t_0 + \sum_{l=1}^{p} \{t_{n_l}(x) - t_{n_{l-1}}(x)\} = \sum_{l=0}^{p} U_l(x).$$

Так как $U_0 = \text{const}$, то отсюда

$$t_n^{(k)}(x) = \sum_{l=1}^{p} U_l^{(k)}(x)$$

и

$$\| t_n^{(k)}(x) \| \leqslant \sum_{l=1}^{p} \| U_l^{(k)}(x) \|. \tag{5.11}$$

Оценим $U_l^{(k)}$. Имеем для $l = 1, 2, \ldots, p$

$$U_l(x) = t_{n_l}(x) - t_{n_{l-1}}(x) = (f - t_{n_{l-1}}) - (f - t_{n_l}),$$

откуда

$$\| U_l(x) \| \leqslant \| f - t_{n_{l-1}} \| + \| f - t_{n_l} \| \leqslant F_{n_{l+1}+1} - F_{n_l+1} \leqslant 2F_{n_{l-1}+1}.$$

Но $U_l(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n_l. Поэтому, по неравенству С. Н. Бернштейна,

$$\| U_l^{(k)} \| \leqslant n_l^k \| U_l \| \leqslant 2n_l^k F_{n_{l-1}+1}. \tag{5.12}$$

Заметим теперь, что, в силу определения последовательности $\{n_l\}$,

$$n_l \leqslant 4(n_{l-2} + 1) \quad \text{и} \quad n_l \leqslant 4(n_{l-1} - n_{l-2}) \quad \text{для } 2 \leqslant l \leqslant p.$$

Поэтому, пользуясь еще монотонностью последовательности $\{F_n\}_2$ находим, что для $2 \leqslant l \leqslant p$

$$n_l^k F_{n_{l-1}+1} = n_l^{k-1} n_l F_{n_{l-1}+1} \leqslant 4^{k-1} (n_{l-2} + 1)^{k-1} \cdot 4 (n_{l-1} - n_{l-2}) F_{n_{l-1}+1} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2k} \sum_{\nu=n_{l-2}+1}^{n_{l-1}} \nu^{k-1} F_\nu. \tag{5.13}$$

При помощи (5.11), (5.12) и (5.13) находим окончательно:

$$\| t_n^{(k)} \| \leqslant \sum_{l=1}^{p} \| U_l^{(k)} \| \leqslant 2 \sum_{l=1}^{p} n_l^k F_{n_{l-1}+1} = 2 \left\{ 2^k F_1 + \sum_{l=2}^{p} n_l^k F_{n_{l-1}+1} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \left\{ 2^k F_1 + \sum_{l=2}^{p} 2^{2k} \sum_{\nu=n_{l-2}+1}^{n_{l-1}} \nu^{k-1} F_\nu \right\} = 2 \left\{ 2^k F_1 + 2^{2k} \sum_{\nu=1}^{n_{p-1}} \nu^{k-1} F_\nu \right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \left\{ 2^k F_1 + 2^{2k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} F_\nu \right\} \leqslant (2^{k+1} + 2^{2k+1}) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} F_\nu = C_{10}(k) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} F_\nu.$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8. *Для любого натурального k и любого $n \leqslant \delta^{-1}$*

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_{11}(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu[f] \quad (0 < \delta \leqslant 1). \tag{5.14}$$

Доказательство. Имеем

$$\| f - t_n^* \| \leqslant E_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, по лемме 10,

$$\| t_n^{*(k)} \| \leqslant C_{10}(k) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu.$$

Воспользуемся теперь леммой 9. Получаем:

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k \left\{ \delta^k C_{10}(k) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu + E_{n+1} \right\}.$$

Если $n \leqslant \delta^{-1}$, то $\delta^k \leqslant n^{-k}$. Кроме того,

$$E_{n+1} \leqslant E_n \leqslant C_{12}(k)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu.$$

Поэтому для $n \leqslant \delta^{-1}$

$$\omega_k(\delta,\ f) \leqslant 2^k \left\{ C_{10}(k)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu + C_{12}(k)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu \right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}(k)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu.$$

и теорема доказана.

Мы обращаемся теперь к рассмотрению вопроса о том, при каких ограничениях на $\{E_n\}$ условие (5.4) влечет $f \in H_k[\omega]$.

ТЕОРЕМА 9. *Зададим натуральное число k; пусть $0 < \alpha < k$ и $\varphi \in N^\alpha$. Для того чтобы $f \in H_k[\varphi]$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$E_n \leqslant C_{13} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{5.15}$$

Доказательство. Необходимость условия (5.15) вытекает из теоремы 1. Докажем его достаточность. Согласно теореме 8, для $n\delta \leqslant 1$

$$\omega_k(\delta,\ f) \leqslant C_{14}(k)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Положим здесь $n = [\delta^{-1}]$ и заметим, что тогда $n\delta \geqslant \frac{1}{2}$ для $\delta \leqslant 1$ и, в силу условия $\varphi \in N^\alpha$,

$$\nu^\alpha \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) \leqslant C_{15} \delta^\alpha \varphi(\delta) \quad (\nu = 1,\ 2, \ldots, n).$$

Поэтому для $\delta \leqslant 1$

$$\omega_k(\delta,\ f) \leqslant C_{16}(k)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-\alpha-1} \delta^{-\alpha} \varphi(\delta) \leqslant C_{17}(k,\ \alpha)\ (n\delta)^{-\alpha}\ \varphi(\delta) \leqslant$$
$$\leqslant C_{18}(k,\ \alpha)\, \varphi(\delta),$$

и теорема доказана.

Следствие 9.1. Пусть $\alpha > 0$ и $\varphi \in N^\alpha$. Тогда для всех натуральных $k > \alpha$ классы $H_k[\varphi]$ эквивалентны.

Следствие 9.2. Пусть $\alpha > 0$ и $\varphi \in N^\alpha$. Если

$$\| f - t_n \| \leqslant C_{19} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

то для любого фиксированного натурального $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta,\ t_n) \leqslant C_{20}(k,\ \alpha)\, \varphi(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant 1)$$

равномерно относительно n.

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Как связаны приближения функции f с приближениями и дифференциальными свойствами ее производных $f^{(r)}$?

ТЕОРЕМА 10. *Зададим натуральное число* r, *и пусть*

$$\| f - t_n \| \leqslant F_{n+1} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{5.16}$$

где

$$F_1 \geqslant F_2 \geqslant \ldots \geqslant F_n \geqslant \ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} F_n < \infty. \tag{5.17}$$

Тогда f *имеет непрерывную производную* $f^{(r)}$ *и*

$$\| f^{(r)} - t_n^{(r)} \| \leqslant C_{21}(r) \left\{ n^r F_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu \right\} \quad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{5.18}$$

С. Н. Бернштейн [1] доказал такую теорему: если ряд $\sum n^{r-1} E_n[f]$ сходится, то функция f имеет непрерывную производную $f^{(r)}$. Рассмотрение этого доказательства С. Н. Бернштейна показывает, что на самом деле им установлено следующее, более общее предложение: пусть выполнены условия (5.16) и (5.17). Тогда функция f имеет непрерывную производную $f^{(r)}$ и $t_n^{(r)}(x) \to f^{(r)}(x)$ равномерно относительно x. В ходе доказательства теоремы 10 мы вновь установим это предложение.

Доказательство. Очевидно, $F_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $t_n(x) \to f(x)$ равномерно относительно x. Отсюда следует, что если $\{n_k\}$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ есть возрастающая последовательность номеров, то

$$f(x) = t_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x) \}.$$

Зафиксируем натуральное число n и положим

$$n_k = 2^k n \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Тогда будем иметь

$$f(x) - t_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x), \tag{5.19}$$

где

$$U_k(x) = t_{2^k n}(x) - t_{2^{k-1} n}(x).$$

Докажем, что формулу (5.19) можно продифференцировать почленно r раз, т. е.

$$f^{(r)}(x) - t_n^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(r)}(x). \tag{5.20}$$

Для этого достаточно установить, что ряд справа равномерно сходится. Прежде всего, оценим $U_k(x)$. Имеем

$$U_k(x) = \{ t_{2^k n}(x) - f(x) \} - \{ t_{2^{k-1} n}(x) - f(x) \} \quad (k = 1,\ 2, \ldots),$$

откуда

$$\| U_k \| \leqslant \| t_{2^k n} - f \| + \| t_{2^{k-1} n} - f \| \leqslant F_{2^k n+1} + F_{2^{k-1} n+1} \leqslant 2F_{2^{k-1} n+1}.$$

Оценим теперь $U_k^{(r)}(x)$. По неравенству С. Н. Бернштейна,

$$\|U_k^{(r)}\| \leqslant (2^k n)^r \|U_k\| \leqslant 2(2^k n)^r F_{2^{k-1}n+1}.$$

Пользуясь этой оценкой, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|U_k^{(r)}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2(2^k n)^r F_{2^{k-1}n+1} = 2\left\{2^r n^r F_{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k+1}n)^r F_{2^k n+1}\right\}.$$

Но

$$(2^{k+1}n)^r F_{2^k n+1} = 4^r (2^{k-1}n)^{r-1} 2^{k-1} n F_{2^k n+1} \leqslant 4^r \sum_{\nu=2^{k-1}n+1}^{2^k n} \nu^{r-1} F_\nu.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|U_k^{(r)}\| \leqslant 2\left\{2^r n^r F_{n+1} + 4^r \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{k-1}n+1}^{2^k n} \nu^{r-1} F_\nu\right\} =$$

$$= 2\left\{2^r n^r F_{n+1} + 4^r \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu\right\} \leqslant C_{21}(r)\left\{n^r F_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu\right\}. \quad (5.21)$$

Итак, доказана сходимость ряда $\sum \| U_k^{(r)} \|$, а вместе с этим установлена и формула (5.20). Из (5.20) и (5.21) вытекает, что

$$\| f^{(r)} - t_n^{(r)} \| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| U_k^{(r)} \| \leqslant C_{21}(r)\left\{n^r F_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu\right\},$$

и теорема доказана.

В некоторых случаях оценка (5.18) может быть упрощена. Пусть, например,

$$F_{2n} \geqslant C_{22} F_n. \quad (5.22)$$

Тогда

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu \geqslant \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{r-1} F_\nu \geqslant n^{r+1} \cdot n F_{2n} \geqslant C_{22} n^r F_n \geqslant C_{22} n^r F_{n+1}.$$

Поэтому при выполнении условия (5.22) вместо (5.18) можно написать

$$\| f^{(r)} - t_n^{(r)} \| \leqslant C_{23}(r) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu.$$

С л е д с т в и е 10.1. Пусть r — натуральное число и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n[f].$$

Тогда

$$E_n[f^{(r)}] \leqslant C_{24}(r)\left\{n^r E_n[f] + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu[f]\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (5.23)$$

ТЕОРЕМА 11*. *Пусть r — натуральное число и для функции f сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n \quad (E_n = E_n[f]).$$

огда для любого натурального k и любого $n \leqslant \delta^{-1}$

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \leqslant C_{25}(k, r) \left\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{n} \nu^{r-1} E_\nu \right\}. \qquad (5.24)$$

Доказательство. Имеем

$$\| f - t_n^*[f] \| \leqslant E_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, по лемме 10,

$$\| t_n^{*(k+r)} \| \leqslant C_{26}(k, r) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_\nu.$$

Далее, согласно теореме 10,

$$\| f^{(r)} - t_n^{*(r)} \| \leqslant C_{21}(r) \left\{ n^r E_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu \right\}.$$

Воспользуемся теперь леммой 9. Получаем

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \leqslant 2^k \left\{ \delta^k C_{26}(k, r) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_\nu + C_{21}(r) \left(n^r E_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu \right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{27}(k, r) \left\{ \delta^k \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_\nu + n^r E_{\nu+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu \right\}.$$

Заметим, что

$$n^k E_{n+1} \leqslant C_{28}(k, r)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_\nu.$$

Таким образом, если $n\delta \leqslant 1$, то

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \leqslant C_{25} \left\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu \right\},$$

и теорема доказана.

Эту теорему можно было бы также доказать, исходя из теорем 8 и 10, но тогда выкладки были бы несколько длиннее.

§ 6. Основная теорема

Обратимся теперь к рассмотрению следующего вопроса: каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы

$$E_n[f] \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\varphi(\delta)$ — заданная невозрастающая функция?

* А. Ф. Тиман получил независимо от меня доказательство этого предложения.

Насколько нам известно, эта задача не была до сих пор решена даже для случая $\varphi(\delta)=\delta^\alpha$. Мы решим ее для функций сравнения $\varphi \in N^\alpha$.

ЛЕММА 11. *Пусть* $\varphi \in N^\alpha$ *и для некоторого натурального* $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta). \tag{6.1}$$

Тогда существует такая константа $c>0$, *что*

$$E_n[f] \geqslant c\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{6.2}$$

Доказательство. Согласно (6.1), найдутся две такие константы $C_1>0$ и $C_2>0$, что

$$C_1\varphi(\delta) \leqslant \omega_k(\delta, f) \leqslant C_2\varphi(\delta) \quad (0<\delta\leqslant 1). \tag{6.3}$$

Последнее из этих неравенств, теорема 1 и теорема 3 влекут неравенство

$$\omega_k(\delta, t_n^*) \leqslant C_3(n\delta)^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\delta>0,\ n=1, 2, \ldots). \tag{6.4}$$

В силу (1.1) и (1.2), имеем

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant \omega_k(\delta, t_n^*) + \omega_k(\delta, f-t_n^*) \leqslant \omega_k(\delta, t_n^*) + 2^k\|f-t_n^*\| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_k(\delta, t_n^*) + 2^kE_n[f].$$

Отсюда

$$E_n[f] \geqslant 2^{-k}\{\omega_k(\delta, f) - \omega_k(\delta, t_n^*)\}.$$

Пользуясь (6.3) и (6.4), находим, далее,

$$E_n[f] \geqslant 2^{-k}\left\{C_1\varphi(\delta) - C_3(n\delta)^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right\}. \tag{6.5}$$

Вспомним теперь, что $\varphi \in N^\alpha$. Это дает нам для $\delta \leqslant \frac{1}{n}$

$$\varphi(\delta) \geqslant C_5(n\delta)^\alpha\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Подставляя эту оценку в (6.5), получаем

$$E_n[f] \geqslant 2^{-k}\left\{C_1C_5(n\delta)^\alpha\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - C_3(n\delta)^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right\} =$$
$$= C_6\{C_7-(n\delta)^{k-\alpha}\}(n\delta)^\alpha\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \left(\delta\leqslant\frac{1}{n}\right). \tag{6.6}$$

Мы можем без ограничения общности считать, что здесь $C_7 \leqslant 2$. Положим в (6.6)

$$\delta = \left(\frac{C_7}{2}\right)^{\frac{1}{k-\alpha}}\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Тогда получим окончательно

$$E_n[f] \geqslant C_6\left(\frac{C_7}{2}\right)^{\frac{k}{k-\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = c\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

и лемма доказана.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть* $\varphi \in N^\alpha$. *Для того чтобы*

$$E_n[f] \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.7}$$

необходимо, чтобы для всех натуральных $k > \alpha$, *и достаточно, чтобы для некоторого натурального* $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta). \tag{6.8}$$

Доказательство. Пусть имеет место (6.7), т. е. найдутся две положительные константы C_8 и C_9, для которых

$$C_8\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant E_n[f] \leqslant C_9\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.9}$$

Тогда, по теореме 1 и в силу первой половины неравенства (6.9), для любого k имеем

$$C_{10}\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant E_n[f] \geqslant C_8\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant C_{11}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, в силу $\omega_k \in N^k$,

$$\omega_k\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \geqslant C_{12}\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

и если $\frac{1}{n+1} \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{n}$, то, ввиду монотонности ω_k и φ,

$$\omega_k(\delta, f) \geqslant C_{12}\varphi(\delta) \quad (0 < \delta < 1).$$

Далее, из второй половины неравенства (6.9) и теоремы 9 вытекает существование константы C_{13} такой, что для любого $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_{13}\varphi(\delta).$$

Этим заканчивается доказательство необходимости условия (6.8).

Пусть имеет место (6.8):

$$C_{14}\varphi(\delta) \leqslant \omega_k(\delta, f) \leqslant C_{15}\varphi(\delta) \quad (\delta > 0) \tag{6.10}$$

с $C_{14} > 0$. Тогда, по теореме 1 и в силу второй половины неравенства (6.10),

$$E_n[f] \leqslant C_{16}\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqslant C_{17}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

а по лемме 11,

$$E_n[f] \geqslant C_{18}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $C_{18} > 0$.

Таким образом, установлена достаточность условия (6.8), и основная теорема полностью доказана.

Пример 2. Пусть $0 < \alpha < 1$. Для того чтобы

$$E_n \sim n^{-\alpha},$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\omega_1(\delta) \sim \delta^{\alpha}.$$

Пример 3. [С. Н. Бернштейн (1)].

$$E_n[|u|; -1, +1] \sim \frac{1}{n}.$$

В самом деле,

$$\omega_2(\delta, |\cos x|) \sim \delta.$$

Приведем в заключение обобщение леммы 11 на тот случай, когда оценки $\omega_k(\delta, f)$ сверху и снизу имеют разные порядки.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть* $0 \leqslant \alpha < \beta < k$ *и*

$$0 < C_{19}\delta^\beta \leqslant \omega_k(\delta, t) \leqslant C_{20}\delta^\alpha. \tag{6.11}$$

Тогда

$$E_n[f] \geqslant C_{21}\, n^{-\frac{\beta(k-\alpha)}{k-\beta}} > 0. \tag{6.12}$$

Доказательство. Имеем, как при доказательстве леммы 11,

$$E_n[f] \geqslant 2^{-k}\{\omega_k(\delta, f) - \omega_k(\delta, t_n^*)\} \geqslant 2^{-k}\{C_{19}\delta^\beta - C_{22}(n\delta)^k n^{-\alpha}\} = \\ = 2^{-k}\delta^\beta\left(C_{19} - C_{22}n^{k-\alpha}\delta^{k-\beta}\right).$$

Положим здесь

$$\delta = \left(\frac{C_{19}}{2C_{22}}\right)^{\frac{1}{k-\beta}} n^{-\frac{k-\alpha}{k-\beta}}.$$

Тогда получим, что

$$E_n[f] \geqslant 2^{-k}\left(\frac{C_{19}}{2C_{22}}\right)^{\frac{k}{k-\beta}} n^{-\frac{\beta(k-\alpha)}{k-\beta}} = C_{21}n^{-\frac{\beta(k-\alpha)}{k-\beta}} > 0.$$

Теорема доказана.

Поступило
11. V. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьк. Матем. о-ва (2), 13 (1912), 49—144.

[2] Бернштейн С. Н., Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés, Acta Mathematica, 37 (1913), 1—57.

[3] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. I, М.—Л., 1937.

[4] Бернштейн С. Н., О свойствах однородных функциональных классов, Доклады Ак. Наук СССР, 57 (1947), 111—114.

[5] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М.—Л., 1934.

[6] Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung, Diss. Göttingen, 1911.

[7] Jackson G., The theory of approximation, N. Y., 1930.

[8] Никольский С., Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. Наук СССР, 60 (1948), 1507—1510.

[9] Стечкин С. Б., Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. Наук СССР, 60 (1948), 1511—1514.

[10] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Доклады Ак. Наук СССР, 65 (1949), 135—137.

[11] Тиман А. Ф. и Тиман М. Ф., Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем, Доклады Ак. Наук СССР, 71 (1950), 17—20.

[12] C. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

[13] Zamansky M., Sur l'approximation des fonctions continues, Comptes Rendus, 224 (1947), 704—706.

[14] Zamansky M., Sur l'approximation des fonctions continues, Comptes Rendus, 226 (1948), 1066—1068.

[15] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[16] Zygmund A., Smooth functions, Duke Math. Journ., 12 (1945), 47—76.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 243—254

А. Ф. ТИМАН

О КВАЗИ-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЯХ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Работа посвящена вопросу о природе непрерывности произвольных квази-гладких функций.

Устанавливается асимптотически точное неравенство для модуля непрерывности такой функции и исследуется ее наилучшее приближение обыкновенными полиномами.

§ 1. Введение

1. Постановка задачи. Пусть $\Lambda(a, b)M$ обозначает класс всех непрерывных на данном сегменте $[a, b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ условию

$$\left| f(x_1) - 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f(x_2) \right| \leqslant M|x_1 - x_2|. \tag{1.1}$$

Функции этого класса мы называем *квази-гладкими*.

Их можно, с одной стороны, рассматривать как обобщение гладких функций, впервые изучавшихся Риманом в общей теории тригонометрических рядов ([1]) и, с другой стороны, как обобщение функций, удовлетворяющих условию Липшица:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in [a, b].$$

В 1945 г. А. Зигмунд ([2]) показал, что в целом ряде вопросов (наилучшие приближения, дробное дифференцирование и интегрирование, теория сопряженных функций, тригонометрические ряды) этот класс в известном смысле является более естественным, чем класс функций, удовлетворяющих условию Липшица. Было замечено, что квази-гладкие функции встречаются во многих задачах, где при грубом обращении известных результатов должны были бы быть функции, удовлетворяющие условию Липшица.

В связи с этим представляет известный интерес более глубокое исследование их свойств.

Классический пример Вейерштрасса

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \cos(a^k x), \quad a > 1, \tag{1.2}$$

показывает, что квази-гладкие функции могут оказаться не дифференцируемыми ни в одной точке ([5]), ([6]).

Возникает вопрос о природе модуля непрерывности таких функций. Его можно формулировать следующим образом:

Пусть

$$\omega^*(h) = \sup_{f \in \Lambda^*(a,\, b)\, M} \omega(f;\ h) = \sup_{f \in \Lambda^*(a,\, b)\, M} \ \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant h} |f(x_1) - f(x_2)|, \quad (1.3)$$

где $\Lambda^*(a,\ b)\,M$ обозначает класс всех непрерывных на сегменте $[a,\ b]$ функций, удовлетворяющих там условию (1.1) и принимающих значение, равное нулю в точках b и a. Каково асимптотическое поведение $\omega^*(h)$ при $h \to 0$? (Заметим, что рассмотрение подкласса $\Lambda^*(a,\ b)\,M$ вместо всего класса $\Lambda(a,\ b)\,M$ вполне естественно, так как из принадлежности $f(x)$ к $\Lambda(a,\ b)\,M$ следует также $f(x) + Ax + B \in \Lambda(a,\ b)\,M$ для любой линейной функции $Ax + B$.)

В этом направлении Зигмунд ([2]), пользуясь полученной им теоремой о наилучшем приближении тригонометрическими полиномами функций $f(x) \in \Lambda$ и известной теоремой С. Н. Бернштейна, установил, что всякая периодическая периода 2π функция $f(x)$ имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\omega(f;\ h) = O\left(h \ln \frac{1}{h}\right). \quad (1.4)$$

Таким образом, приведенный результат дает лишь порядок убывания модуля непрерывности, притом только для периодических и квази-гладких на всей вещественной оси функций. Последнее ограничение в рассуждениях А. Зигмунда играет существенную роль.

Пользуясь доказанной в ([4]) леммой и теоремой 4 (см. ниже), а также известными фактами из теории наилучших приближений, можно было бы показать, что свойство (1.4) присуще всем квази-гладким функциям.

Однако в настоящей работе мы ставим себе целью дать исчерпывающее решение формулированной выше задачи. При этом, поскольку модуль непрерывности и модуль гладкости суть понятия структурные и в этих же терминах ставится задача, мы находим целесообразным проводить исследование, не прибегая к вспомогательным средствам, например, к аппарату конструктивной теории функций.

2. Результаты*. Основным результатом работы является равенство

$$\omega^*(h) = \frac{M}{\ln 2}\, h\, \ln \frac{1}{h} + O(h), \quad (1.5)$$

которое следует из теоремы 3 (см. ниже).

На протяжении всей работы мы рассматриваем класс $\Lambda^*(a,\ b)\,1 = \Lambda^*(a,\ b)$, т. е. считаем $M = 1$. Это не ограничивает общности, так как класс функций, удовлетворяющих условию (1.1), совпадает с классом функций $Mf(x)$, где $f(x) \in \Lambda(a,\ b)\,1$.

---

* Основные результаты этой работы без доказательства были опубликованы ранее в ([3]).

Кроме того, мы считаем $a=-1$, $b=1$, хотя все рассуждения остаются в силе для любого другого сегмента $[a, b]$.

В § 2 устанавливается:

ЛЕММА 1. *Всякая функция $f(x)$, принадлежащая классу $\Lambda^*(-1, 1)$, удовлетворяет неравенству*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \leqslant \frac{4}{3}. \tag{1.6}$$

Неравенство (1.6) используется нами в дальнейшем и приводит к точной оценке для модуля непрерывности. Однако можно было бы показать, что само по себе оно не является окончательным. В связи с этим представляет самостоятельный интерес задача о понижении входящей в его правую часть константы $\frac{4}{3}$.

В § 3 вводится в рассмотрение следующая функция, заданная на $[-1, 1]$:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ (n+1)\,x + \dfrac{3.2^{n+1}+1}{3.2^{n+1}}, & \text{если } x \in \left[\dfrac{1}{3.2^{n+2}}, \dfrac{1}{3.2^{n+1}}\right]; \\ \dfrac{4}{3}, & \text{если } \dfrac{1}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}; \\ -(n+1)\,x + \dfrac{3(n+1)2^{n-1}+1}{3.2^{n-1}}, & \text{если } x \in \left[\dfrac{3.2^{n-1}-1}{3.2^{n-1}}, \dfrac{3.2^{n}-1}{3.2^{n}}\right]; \\ 0, & \text{если } x = 1; \\ \varphi_1(-x), & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$(n = 0,1,2,3,\ldots)$$

и доказывается

ЛЕММА 2. *Всякая непрерывная на $[-1, 1]$ функция $f(x)$, принадлежащая классу $\Lambda(-1, 1)$ и принимающая значение, равное нулю в точках ± 1, удовлетворяет неравенству*

$$|f(x)| \leqslant \varphi_1(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

В этом же параграфе мы рассматриваем подкласс функций $f(x) \in \Lambda$, принимающих значение, равное нулю в концах сегмента $[-1, 1]$, и по абсолютной величине не превышающих единицу. Мы обозначаем этот подкласс через Λ_1^*. В нем содержатся, например, все периодические периода 4 функции, квази-гладкие на всей вещественной оси (с константой $M = 1$ в (1.1)) и такие, что

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0.$$

Наряду с функцией $\varphi_1(x)$ существенное место в наших рассуждениях занимает следующая функция, заданная на $[-1, 1]$:

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}-nx+\frac{n2^n+1}{2^n}, & \text{если } x\in\left[\frac{2^n-1}{2^n},\ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right] \quad (n=0,1,2,3,\ldots);\\ 0, & \text{если } x=1;\\ \varphi_2(-x), & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

В §§ 3 и 4 мы показываем, что функция $\varphi_2(x)$ обладает некоторыми важными свойствами. А именно, в § 3 устанавливается

ТЕОРЕМА 1. *Функция* $\varphi_2(x)\in\Lambda_1^*$ *и в каждой точке* $x\in[-1,\ 1]$

$$\varphi_2(x)=\sup_{f\in\Lambda_1^*}|f(x)|. \tag{1.7}$$

Пусть при каждом фиксированном $x\in[-1,\ 1]$

$$\varphi(x)=\sup_{f\in\Lambda^*(-1,1)}|f(x)|.$$

В § 4 мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *В каждой точке* $x\in[-1,\ 1]$ *справедливо равенство*

$$\varphi(x)=\frac{1}{\ln 2}(1-|x|)\ln\frac{1}{1-|x|}+\theta(x)(1-|x|), \tag{1.8}$$

где $0\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{8}{3}$.

Пользуясь этими результатами, мы в § 4 даем полное решение сформулированной в п. 1 задачи и доказываем основную теорему настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3. *Для всякой непрерывной на* $[a,\ b]$ *функции* $f(x)$, *принадлежащей классу* $\Lambda(a,b)\,1$, *при* $0\leqslant h\leqslant\frac{b-a}{2}$ *справедливо неравенство*

$$\omega(f;\ h)\leqslant\frac{1}{\ln 2}h\ln\frac{1}{h}+M_0h, \tag{1.9}$$

где

$$M_0=\frac{4}{3}(b-a)+\frac{4\max_x|f(x)|}{b-a}+\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{b-a}{2}.$$

Константа $\frac{1}{\ln 2}$ *в правой части* (1.9) *не может быть понижена.*

Существует функция $f(x)$, *удовлетворяющая условиям теоремы и обращающая это неравенство в асимптотическое равенство.*

В § 5 рассматривается вопрос о наилучшем приближении квази-гладких функций обыкновенными полиномами.

Имеет место доказанная в ([4]) следующая

ТЕОРЕМА 4. *Если* $f(x)\in\Lambda(a,\ b)\,M$, *то для ее наилучшего приближения* $E_n(f)$ *посредством обыкновенных полиномов степени* n *на сегменте* $[a,\ b]$ *справедливо соотношение*

$$E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.10}$$

В отличие от периодического случая ([2]), приведенное в ([4]) доказательство этой теоремы не дает способа, осуществляющего такое приближение. В связи с этим С. М. Никольский указал мне на желательность эффек-

тивного построения для каждой квази-гладкой функции последовательности обыкновенных полиномов, дающих приближение порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$*.

В § 5 приводится решение данной задачи, основанное на рассмотрении ряда по полиномам П. Л. Чебышева.

§ 2. Доказательство леммы 1

Пусть x — произвольная точка сегмента $[-1, 1]$. Для определенности будем считать, что $0 \leqslant x \leqslant 1$. Случай $-1 \leqslant x \leqslant 0$ ничем не отличается от данного. Выберем целое число $k \geqslant 0$ так, чтобы

$$t_k = \frac{2^k - 1}{2^k} \leqslant x < \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} = t_{k+1}.$$

Легко видеть, что

$$|f(t_n)| \leqslant \frac{n+1}{2^n}. \tag{2.1}$$

В самом деле, так как $f(1) = f(-1) = 0$, то, в силу условия (1.1) при $M = 1$, $|f(0)| \leqslant 1$. Поэтому из неравенства

$$\left| f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right| \leqslant 1$$

следует, что $\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leqslant 1$. Неравенство (2.1) может быть получено теперь индукцией. Пусть оно справедливо при $n = m$; покажем его справедливость при $n = m + 1$. Так как $t_{n+1} = \frac{1 + t_n}{2}$, то

$$|f(t_n) - 2f(t_{n+1}) + f(1)| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

т. е.

$$|f(t_{n+1})| \leqslant \frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

Таким образом, при любом $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\left| f(t_n) \right| \leqslant \frac{n+1}{2^n} \leqslant 1.$$

Рассматривая теперь сегмент $[t_k, t_{k+1}]$, содержащий точку x, и обозначая для удобства $t_k^{(0)} = t_k$, $t_k^{(1)} = t_{k+1}$, $t_k^{(2)} = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$, мы приходим к неравенству

$$|f(t_k^{(2)})| \leqslant 1 + \frac{1}{2^{k+2}}.$$

---

* В периодическом случае, как показал А. Зигмунд, эту задачу решают тригонометрические суммы Джексона.

Из сегментов $[t_k^{(0)}, t_k^{(2)}]$ и $[t_k^{(2)}, t_k^{(1)}]$ рассматриваем тот, который содержит точку x. Очевидно, что в средней точке этого сегмента, которую мы обозначаем через $t_k^{(3)}$, будет

$$|f(t_k^{(3)})| \leqslant 1 + \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Из двух новых сегментов, имеющих $t_k^{(3)}$ своим общим концом, мы рассматриваем опять тот, который содержит точку x. В его средней точке $t_k^{(4)}$, как легко видеть,

$$|f(t_k^{(4)})| \leqslant 1 + \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+4}}.$$

Продолжая этот процесс, мы получаем последовательность точек $t_k^{(2n)}$, стремящихся при $n \to \infty$ к точке x и таких, что

$$|f(t_k^{(2n)})| \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{k+2i}} < 1 + \frac{1}{3.2^k}.$$

Из соображений непрерывности следует, что

$$|f(x)| \leqslant 1 + \frac{1}{3.2^k} \leqslant \frac{4}{3}.$$

Это завершает доказательство леммы.

§ 3. О свойствах функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$

1. Доказательство леммы 2. Пусть $\lambda_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ есть последовательность линейных функций вида

$$\lambda_n(x) = -(n+1)x + \frac{3(n+1)2^{n-1}+1}{3.2^{n-1}}, \quad x \geqslant 0,$$
$$\lambda_n(-x) = \lambda_n(x).$$

Докажем, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы, то для любого $x \in [-1, 1]$

$$|f(x)| \leqslant \lambda_n(x). \tag{3.1}$$

Для этого убедимся прежде всего в справедливости (3.1) при $n = 0$. Предположим противное. Тогда найдется точка $x \in [-1,1]$, для которой

$$|f(x)| > \lambda_0(x).$$

В силу леммы 1, должно быть $|x| \geqslant \frac{1}{3}$. Без ограничения общности можно считать $x > 0$. Рассмотрим точку $2x - 1$. Из (1.1) при $M = 1$ следует тогда, что

$$|f(2x-1) - 2f(x) + f(1)| \leqslant 2(1-x). \tag{3.2}$$

Поэтому, если $f(x) > 0$, то

$$f(2x-1) > -2(1-x) + 2\lambda_0(x) = \frac{4}{3},$$

что противоречит лемме 1. В случае $f(x) < 0$ рассуждения аналогичны.

Предположим теперь, что при $n = m$ для любого $x \in [-1,1]$ неравенство (3.1) верно. Покажем его справедливость при $n = m+1$. Предположив противное, мы смогли бы найти точку x такую, что

$$| f(x) | > \lambda_{m+1}(x).$$

Пусть для определенности $0 \leqslant x \leqslant 1$. В случае $-1 \leqslant x \leqslant 0$ рассуждения аналогичны.

Рассмотрим точку $2x-1$; в силу (1.1) при $M = 1$, мы получаем неравенство (3.2), из которого, если $f(x) > 0$, следует, что

$$f(2x-1) > -2(1-x) + 2\lambda_{m+1}(x) = -(m+1)(2x-1) + \frac{3(m+1)2^{m-1}+1}{3.2^{m-1}},$$

т. е. нашлось значение $2x-1 \in [-1,1]$, для которого

$$f(2x-1) > \lambda_m^*(2x-1),$$

что противоречит предположению. В случае $f(x) < 0$ рассуждения аналогичны. Этим неравенство (3.1) доказано для любого $x \in [-1,1]$ и любого $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Рассматривая последовательность линейных функций

$$\lambda_n^*(x) = (n+1)x + \frac{3.2^{n+1}+1}{3.2^{n+1}}, \quad x \geqslant 0,$$

$$\lambda_n^*(-x) = \lambda_n^*(x) \quad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots),$$

и проводя аналогичные рассуждения, мы докажем, что для всех $x \in [-1,1]$

$$| f(x) | \leqslant \lambda_n^*(x). \tag{3.3}$$

Для окончательного доказательства леммы остается еще воспользоваться леммой 1.

2. Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 достаточно, во-первых, установить, что всякая функция $f(x) \in \Lambda_1^*$ удовлетворяет неравенству

$$| f(x) | \leqslant \varphi_2(x) \tag{3.4}$$

и, во-вторых, что $\varphi_2(x) \in \Lambda_1^*$.

Доказательство неравенства (3.4) аналогично доказательству леммы 2. Приведем его. Рассмотрим последовательность линейных функций $\lambda_n^{**}(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ вида

$$\lambda_n^{**}(x) = -nx + \frac{n2^n+1}{2n}, \quad x \geqslant 0,$$

$$\lambda_n^{**}(-x) = \lambda_n^{**}(x)$$

и докажем, что если $f(x) \in \Lambda_1^*$, то для любого $x \in [-1,1]$

$$| f(x) | \leqslant \lambda_n^{**}(x). \tag{3.5}$$

Так как $f(x) \in \Lambda_1^*$, то $| f(x) | \leqslant 1$, что равносильно (3.5) при $n = 0$. Пусть (3.5) верно для $n = m$. Докажем справедливость этого неравенства для $n = m+1$. Если бы (3.5) при $n = m+1$ не выполнялось, то нашлась бы точка $x \in [-1,1]$, для которой

$$| f(x) | > \lambda_{m+1}^{**}(x).$$

Без ограничения общности можно считать $x > 0$. Рассматривая точку $2x - 1$ и пользуясь условием (1.1), мы приходим, в случае если $f(x) > 0$, к неравенству

$$f(2x-1) > -2(1-x) + 2\lambda^{**}_{m+1}(x) = -m(2x-1) + \frac{m2^m + 1}{2^m},$$

т. е. в точке $2x - 1 \in [-1,1]$

$$f(2x-1) > \lambda_m^{**}(2x-1),$$

а это противоречит предположению. Аналогичные рассуждения проводим для случая $f(x) < 0$. Этим доказано неравенство (3.4).

Для доказательства второй части теоремы 1 следует среди разных случаев распределения точек $x - h$, x, $x + h$ $(h \geqslant 0)$ на сегменте $[-1,1]$ рассмотреть тот случай, когда

$$t_k \leqslant x < t_{k+1} \quad (k \geqslant 0), \quad x + h = 1.$$

Если $x - h \geqslant 0$, то в данном случае

$$h \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad t_{k-1} \leqslant x - h < t_k,$$

$$\Delta_h^2 \varphi_2(x) = k(x+h) + x - h - k - 1 = -2h.$$

Если же $x - h < 0$, то неравенство $|\Delta_h^2 \varphi_2(x)| \leqslant 2h$ очевидно. После этого остается еще учесть, что функция $\varphi_2(x)$ на $[-1,1]$ вогнута.

§ 4. Модуль непрерывности квази-гладкой функции

1. Доказательство теоремы 2. В силу леммы 2 и теоремы 1, мы имеем, что на сегменте $[-1,1]$

$$\varphi_2(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_1(x). \tag{4.1}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что

$$\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \leqslant \frac{2}{3}(1 - |x|). \tag{4.2}$$

В самом деле, пусть $t_n \leqslant x < t_{n+1}$ и

$$x_n = \frac{3.2^{n-1} - 1}{3.2^{n-1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как $t_n < x_n < t_{n+1}$ и так как звено функции $\varphi_1(x)$, соответствующее сегменту $[x_n, x_{n+1}]$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, имеет тот же угловой коэффициент, что и звено функции $\varphi_2(x)$, соответствующее сегменту $[t_{n+1}, t_{n+2}]$, то мы получим

$$\psi(x) \leqslant \psi(x_n) = \frac{1}{3.2^n} \leqslant \frac{2}{3}(1 - x).$$

Из (4.1) и (4.2) следует, что для всех $x \in [-1,1]$

$$\varphi(x) = \varphi_2(x) + \theta_0(x)(1 - |x|), \tag{4.3}$$

где $0 \leqslant \theta_0(x) \leqslant \frac{2}{3}$.

Далее, если $t_n \leqslant x < t_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, то

$$\varphi_2(x) = n(1-x) + \theta_1(x)(1-x),$$

где $1 \leqslant \theta_1(x) \leqslant 2$. Но так как $n \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1}{1-x} < n+1$, то

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\ln 2}(1-x)\ln\frac{1}{1-x} + \theta_2(x)(1-x),$$

где $0 \leqslant \theta_2(x) \leqslant 2$. Таким образом, в силу (4.3), мы находим, что

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln 2}(1-|x|)\ln\frac{1}{1-|x|} + \theta(x)(1-|x|),$$

где $0 \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{8}{3}$. Теорема доказана.

Примечание. Из доказательства лемм 1, 2 и теорем 1, 2 видно, что если сегмент $[-1,1]$ заменить на $[-c, c]$, либо на другой произвольный сегмент $[a, b]$ длины $2c$, то в правой части неравенства (1.6) вместо $\frac{4}{3}$ будет $\frac{4}{3}c$, а в лемме 2 и теореме 1 при определении функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответственно изменится масштаб и область их задания. При этом вместо теоремы 2 мы получим тогда следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2*. *Пусть $\Lambda^*(a, b)$ есть класс непрерывных на $[a, b]$ функций, удовлетворяющих на этом сегменте условию* (1.1) *при $M=1$ и принимающих значение, равное нулю в его концах. Тогда для всех $x \in [a,b]$*

$$\varphi(x) = \sup_{f \in \Lambda^*(a,b)} |f(x)| = \frac{1}{\ln 2}(c-|x-d|)\ln\frac{c}{c-|x-d|} + \theta(x)(c-|x-d|), \tag{4.4}$$

где

$$c = \frac{b-a}{2}, \quad d = \frac{b+a}{2}, \quad 0 \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{8}{3}c.$$

2. Пользуясь теоремой 2*, мы получим основной результат настоящей работы.

Доказательство теоремы 3. Пусть $x_1 \leqslant x_2$ — любые две точки сегмента $[a, b]$, для которых $x_2 - x_1 \leqslant \frac{b-a}{4}$. Предположим пока, что $x_1 + x_2 \leqslant a + b$. В этом предположении рассмотрим сегмент $[x_1, b]$, длина которого, очевидно, не меньше, чем $c = \frac{b-a}{2}$, и функцию

$$f_1(x) = f(x) - \left\{\frac{f(x_1) - f(b)}{x_1 - b}(x-b) + f(b)\right\}.$$

Эта функция на $[x_1, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2*. Поэтому, учитывая, что $x_2 \leqslant \frac{b+x_1}{2}$, получим

$$|f_1(x_2) - f_1(x_1)| \leqslant \frac{1}{\ln 2}(x_2 - x_1)\ln\frac{b-x_1}{2(x_2-x_1)} + \theta_1(x_1, x_2)(x_2 - x_1),$$

где

$$0 \leqslant \theta_1(x_1, x_2) \leqslant \frac{4}{3}(b - x_1) \leqslant \frac{4}{3}(b-a).$$

Отсюда

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|f_1(x_2)-f_1(x_1)|+\left|\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}\right|(x_2-x_1)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\ln 2}(x_2-x_1)\ln\frac{1}{x_2-x_1}+M_1(x_1,x_2)(x_2-x_1),$$

где

$$M_1(x_1,x_2)=\theta_1(x_1,x_2)+\left|\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}\right|+\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{b-x_1}{2}\leqslant$$
$$\leqslant M_0=\frac{4}{3}(b-a)+\frac{4\max\limits_x|f(x)|}{b-a}+\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{b-a}{2}.$$

Если $x_1+x_2>a+b$, то мы рассматриваем сегмент $[a, x_2]$ и функцию

$$f_2(x)=f(x)-\left\{\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}(x-a)+f(a)\right\},$$

которая на $[a, x_2]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2*. В силу того что $x_1>\frac{a+x_2}{2}$, пользуясь теоремой 2*, мы получим

$$|f_2(x_2)-f_2(x_1)|\leqslant\frac{1}{\ln 2}(x_2-x_1)\ln\frac{x_2-a}{2(x_2-x_1)}+\theta_2(x_1,x_2)(x_2-x_1),$$

где

$$0\leqslant\theta_2(x_1,x_2)\leqslant\frac{4}{3}(x_2-a)\leqslant\frac{4}{3}(b-a).$$

Следовательно,

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|f_2(x_2)-f_2(x_1)|+\left|\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}\right|(x_2-x_1)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\ln 2}(x_2-x_1)\ln\frac{1}{x_2-x_1}+M_2(x_1,x_2)(x_2-x_1),$$

где

$$M_2(x,x_2)=\theta_2(x_1,x_2)+\left|\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}\right|+\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{x_2-a}{2}\leqslant M_0.$$

Таким образом, мы имеем, что для любых двух точек x_1 и x_2 сегмента $[a, b]$

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{1}{\ln 2}|x_1-x_2|\ln\frac{1}{|x_1-x_2|}+M_0|x_1-x_2|,$$

т. е. для любого $0\leqslant h\leqslant\frac{b-a}{4}$

$$\omega(f;h)=\sup_{|x_1-x_2|\leqslant h}|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{1}{\ln 2}h\ln\frac{1}{h}+M_0h. \tag{4.5}$$

Функция $\varphi_2(x)$, для которой при $h\to 0$ это неравенство обращается в асимптотическое равенство, показывает, что константа $\frac{1}{\ln 2}$ в правой части (4.5) является наилучшей и не может быть понижена.

§ 5. Наилучшее приближение квази-гладкой функции

Для удобства выкладок мы будем рассматривать сегмент $[-1, 1]$. Рассмотрение любого другого сегмента $[a, b]$ принципиально ничем не отличается.

Пусть

$$T_0(x)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad T_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k \arccos x), \quad k=1, 2, 3, \ldots,$$

— ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1, 1]$ система полиномов П. Л. Чебышева и

$$C_k=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \quad (k=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по этой системе.

Обозначим, далее, через $S_n(f; x)$ частную сумму порядка n ряда Фурье-Чебышева функции $f(x)$, т. е.

$$S_n(f; x)=\sum_{k=0}^{n} C_k T_k(x).$$

Для каждого n введем в рассмотрение обыкновенный полином степени n вида

$$P_n(f; x)=\frac{S_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(f; x)+S_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(f; x)+\cdots+S_n(f; x)}{n-\left[\frac{n}{2}\right]}, \tag{5.1}$$

образованный по тому же способу, что и суммы Валле-Пуссена для рядов Фурье.

Имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[-1, 1]$, является квази-гладкой на нем, то*

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-P_n(f; x)|\leqslant\frac{c}{n}, \tag{5.2}$$

где c — некоторая константа.

Доказательство. Из формулы

$$S_m(f; x)=\int_{-1}^{1} f(t)\sum_{k=0}^{m} T_k(x)\,T_k(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

легко получить, что

$$S_m(f; x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\,[D_m(t+\alpha)+D_m(t-\alpha)\,dt, \tag{5.3}$$

где

$$D_m(u)=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

— ядро Дирихле и $\alpha=\arccos x$.

Так же просто проверяется тождество

$$P_n(f; x) = \frac{(n+1)\,Q_{n+1}(f; x) - \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right) Q_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(f; x)}{n - \left[\frac{n}{2}\right]}, \qquad (5.4)$$

где

$$Q_m(f; x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_k(f; x). \qquad (5.5)$$

Пользуясь тем, что, в силу (5.3),

$$Q_m(f; x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\,[K_m(t+\alpha) + K_m(t-\alpha)]\,dt,$$

где

$$K_m(u) = \frac{\sin^2 m\dfrac{u}{2}}{2m\sin^2\dfrac{u}{2}}$$

— ядро Фейера, мы находим, что неравенство

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| \leqslant B \qquad (5.6)$$

влечет также неравенство

$$|Q_m(f; x)| \leqslant B.$$

Отсюда, в силу (5.4), вытекает, что из справедливости (5.6) следует неравенство

$$|P_n(f; x)| \leqslant 4B. \qquad (5.7)$$

По этой причине легко доказывается, что

$$|f(x) - P_n(f; x)| \leqslant 5E_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f).$$

Наконец, сославшись на теорему 4, мы, таким образом, получим

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - P_n(f; x)| \leqslant \frac{c}{n}.$$

Этим завершается доказательство теоремы 5.

Поступило
15. II. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Риман Б., Сочинения, М.—Л., 1948.

[2] Zygmund A., Smooth functions, Duke Math. Journal, 12 (1945), 47—76.

[3] Тиман А. Ф., Квази-гладкие функции, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXX, № 6 (1950), 961—963.

[4] Тиман А. Ф. и Дзядык В. К., О наилучшем приближении квази-гладких функций обыкновенными полиномами, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXXV, № 4 (1950), 499—501.

[5] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, ОГИЗ, М.—Л., 1947.

[6] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 255–278

Д. М. ВОЛКОВ

ИНТЕГРАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ТИПА ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Ищутся интегралы, аналогичные классическому интегралу энергии, не содержащие более высоких производных от неизвестных функций гиперболической линейной краевой задачи.

Выписываются явно интегралы второго порядка в трех классических краевых задачах для волнового уравнения, соответствующих часто встречающимся пограничным условиям:

$$u\Big|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)_S = 0.$$

Для перечисленных трех задач доказывается существование и дается метод построения положительно определенного интеграла N-го порядка (содержащего производные от u до N-го порядка включительно).

Выписываются отдельные интегралы высших порядков для некоторых гиперболических систем, в частности для уравнений Максвелла в случае полного отражения электромагнитных волн от металлической поверхности, ограничивающей область распространения, выписан интеграл $\mathcal{E}_2$, являющийся независимой константой электромагнитного поля по отношению к классическому интегралу энергии $\mathcal{E}_1$.

§ 1. Интегралы второго порядка

Мы будем пользоваться результатами предыдущей статьи автора ([1]).

Для волнового уравнения ищем интеграл второго порядка следующего вида:

$$I_2(u, v) = \int_D (Bu_{ij}v_{ij} + bu_{it}v_{it} + B^iu_{ij}v_j + b^iu_{it}v_t + T(u, v))\,dx + \int_S Q(u, v)\,ds. \tag{1.1}$$

Здесь $T(u, v)$ и $Q(u, v)$ — билинейные формы от производных первого порядка $(T(u, v) = g^{ik}u_iv_k + g^{tt}u_tv_t + g^{ti}u_tv_i + g^{it}u_iv_t + \cdots + guv;\ \ u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$; под значками, встречающимися дважды, подразумевается суммирование от 1 до m включительно).

Дифференцируем $I_2(u, v)$ по времени и затем интегрированием по частям приводим $\frac{dI_2}{dt}$ к следующему каноническому виду:

$$\frac{dI_2(u,v)}{dt} = \int\limits_D \{[(Bu_{ij})_{ij} - (bu_{ijj})_i - (B^i u_{ij})_j + b^i u_{ijj} - (g^{ij}u_i)_j + \cdots] v_t +$$
$$+ [(Bu_{ijt})_{ij} - (bu_{it})_{ijj} - (B^i u_{ijt})_j + (b^i u_{it})_{jj} + \cdots] v\} dx +$$
$$+ \int\limits_S \Big\{ Bu_{nj} v_{jt} - Bu_{iin} v_t + bu_{njj} v_t + B^i u_{in} v_t +$$
$$+ Bu_{njt} v_j - Bu_{iint} v + bu_{nt} v_{jj} - bu_{iit} v_n + bu_{iitn} v +$$
$$+ B^i u_{int} v + b^i u_{it} v_n - (b^i u_{it})_n v + \cdots + \frac{dQ(uv)}{dt} \Big\} ds. \quad (2.1)$$

По теореме 5 статьи ([1]), для того чтобы (1.1) было интегралом, т. е. сохраняло постоянное значение во времени, должны выполняться некоторые общие условия, в частности, должны обращаться в нуль коэффициенты при каждой отдельной производной в квадратных скобках под знаком объемного интеграла выражения (2.1). Приравнивая нулю коэффициент при u_{iijj}, заключаем, что

$$B = b.$$

Далее, приравнивая нулю коэффициент при u_{iii} в первой квадратной скобке и при u_{iiit} во второй и вычитая полученные при этом равенства, найдем

$$\begin{aligned} 2B_i - b_i - B^i + b^i &= 0, \\ 2B_i - 3b_i - B^i + b^i &= 0, \\ \hline 2b_i &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$B = b = \text{пост.}, \quad B^i = b^i. \quad (3_1.1)$$

Далее, приравнивая коэффициенты при u_{ij} и u_{ijt} нулю, получим: при $i \neq j$

$$\begin{aligned} -(B_j^{\,i} + B_i^{\,j}) + g^{ij} + g^{ji} &= 0, \\ -(B_j^{\,i} + B_i^{\,j}) + 2(b_j^{\,i} + b_i^{\,j}) + g^{ij} + g^{ji} &= 0, \\ \hline 2(b_j^{\,i} + b_i^{\,j}) &= 0, \end{aligned}$$

и при $i = j$

$$\begin{aligned} -B_i^{\,i} - g^{ii} + g^{tt} &= 0, \\ -B_i^{\,i} + 2b_i^{\,i} - g^{ii} + g^{tt} &= 0 \\ \hline 2b_i^{\,i} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $b_j^{\,i} + b_i^{\,j} = 0$, $b_i^{\,i} = 0$ при фиксированных значках. А последние равенства, как было показано в ([1]), дают следующее представление для вектора b^i:

$$b^i = \sum_{l=1}^{m} B_{il} x_l + b_0^{\,i}. \quad (3_2.1)$$

Здесь $b_0{}^i$ — постоянный вектор и B_{il} — постоянный тензор, удовлетворяющий условию антисимметрии: $B_{il} = -B_{li}$. Когда мы будем приравнивать нулю коэффициенты при более младших производных, то в них будут входить только такие производные от b и b^i, которые обращаются в нуль, в силу $(3_1.1)$ и $(3_2.1)$. Таким образом, интегралы второго и первого порядков вида (1.1) существуют (как легко проследить) независимо друг от друга.

Перейдем к поверхностной компоненте выражения (1.2), причем рассмотрим в отдельности четыре следующие предельные задачи:

$$\text{I)}\quad u\Big|_S = 0, \qquad \text{II)}\qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

$$\text{III)}\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)_S = 0, \quad \text{IV)}\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu_{tt}\right)_S = 0.$$

З а д а ч а I. Выпишем прежде всего контурные тождества, содержащие производные до второго порядка включительно, следующие из волнового уравнения и пограничного условия данной задачи. Ниже имеется в виду специальная система координат, когда ось x_m направлена по внешней нормали к S, а остальные оси — перпендикулярно друг к другу в касательной плоскости (по направлениям линий главных кривизн).

Пусть для элемента цилиндрической поверхности σ с образующими, проходящими через S и идущими параллельно оси времени $t = x_{m+1}$, поставлена специальная задача Коши:

$$\left.\begin{aligned} u\,|_\sigma &= u^*, \\ \frac{u_m - \sum_1^{m-1} u_j P_j}{\sqrt{1 + \sum_1^{m-1} P_j{}^2}}\Bigg|_\sigma &= u_n{}^*. \end{aligned}\right\} \tag{K}$$

Поставленная задача Коши при произвольных начальных функциях $u^*, u_n{}^*$, как известно, не имеет смысла ([2]), но в дальнейшем звездочки в правой части будут отброшены, упомянутые функции зафиксируются так, что поставленная специальная задача (K) приобретает смысл в силу того, что краевая задача I имеет определенное решение. Объемные производные первого и второго порядков на σ определяются следующей системой равенств через полные производные от «задаваемых функций u^*, $u_n{}^*$»:

$$\left.\begin{aligned} u_m &= \frac{u_n{}^*}{T} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{P_j}{T^2}\,\frac{du^*}{\partial x_j}; \quad P_j = \frac{\partial x_m(x_1, x_2, \dots x_{m-1})}{\partial x_j}; \\ u_j &= \frac{du^*}{\partial x_j} - P_j\left(\frac{u_n{}^*}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{P_\nu}{T^2}\,\frac{du^*}{\partial x_\nu}\right); \quad T = \sqrt{1 + \sum_1^{m-1} P_j{}^2}; \end{aligned}\right\} \tag{K$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{mj} &= -P_j u_{mm} + \frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{u_n^*}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{P_\nu}{T^2}\frac{du^*}{\partial x_\nu}\right); \\ u_{jj_1} &= \frac{d}{\partial x_{j_1}}\left[\frac{du^*}{\partial x_j} - P_j\left(\frac{u_n^*}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{P_\nu}{T^2}\frac{du^*}{\partial x_\nu}\right)\right] - u_{jm}P_{j_1} \\ u_{mm} &= -\sum_{j=0}^{m-1} u_{jj}; \quad j,\, j_1 = 0, 1, \ldots, m-1; \quad x_0 = it. \end{aligned}\right\} \qquad (K_2)$$

Отбрасывая в правой части звездочку, именно, полагая $u^* \equiv 0$, $u_n^* = u_n$, мы получим вместо (K_1), (K_2) соответствующие системы ${}^{\mathrm{I}}S_1$, ${}^{\mathrm{II}}S_2$, ... Переходя в начало координат специальной системы, помещенное в любую точку поверхности S (где $P_j = 0$, $P_{jj_1} = 0$ при $j \neq j_1$, ...), получим следующие тождества задачи I:

$$u = 0, \quad u_t = 0, \quad u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1; \qquad ({}^{\mathrm{I}}S_1{}^0)$$

$$\left.\begin{aligned} & u_{ij_1} = 0, \quad j \neq j_1; \\ & u_{jj} + u_n P_{jj} = 0; \\ & u_{nn} = -K u_n, \quad K = -\sum_{j=1}^{m-1} P_{jj}. \end{aligned}\right\} \qquad ({}^{\mathrm{I}}S_2{}^0)$$

Последние тождества можно получить и непосредственно из пограничного условия и волнового уравнения данной краевой задачи, но использование теоремы Коши—Ковалевской ([2]) делает процесс разыскания всех контурных тождеств более систематическим.

Выражение под знаком канонической поверхностной компоненты, входящей в (2.1), в силу контурных тождеств в задачах ${}^{\mathrm{I}}S_1{}^0$, ${}^{\mathrm{I}}S_2{}^0$, приводится к виду:

$$\frac{d}{dt}\{-B u_n K v_n + Q(u, v)\} + b^n u_{nt} v_n. \qquad (4.1)$$

Полагая $B = 1$ и $b^n|_S = 0$, получим, в силу $(3_2.1)$, для любой не исключительной поверхности, что $b^i \equiv 0$ и $Q(u, v) = K u_n v_n$ (все исключительные поверхности легко находятся, в частности шар будет такой поверхностью). Таким образом, можно выписать следующий интеграл второго порядка задачи I:

$$E_2{}^{\mathrm{I}}(u, v) = \int_D \left(\sum_{i,k=1}^{m} u_{ik} v_{ik} + \sum_{i=1}^{m} u_{it} v_{it}\right) dx + \int_S K u_n v_n ds. \qquad (5.1)$$

Полагая $B = 0$ и симметризуя u, v в выражении (1.1), мы можем, казалось бы, выписать еще интеграл следующего вида:

$$P(u, v) = \int_D \sum_{i=1}^{m} b^i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{m+1} u_j v_j dx - \int_S b^n u_n v_n ds, \qquad (6.1)$$

но последний принадлежит к нулевому классу, как легко проверить по формуле Остроградского (т. е. равен нулю). Заметим, что в формуле

(6.1) проекции b^ν можно заменить на орты j_ν; тогда b^n заменится на n — единичный вектор, идущий по направлению внешней нормали к S.

Выписанный здесь интеграл (5.1), принадлежащий к классу C, был найден частным методом С. Л. Соболевым в 1945 г. (3).

Если бы вместо (1.1) мы стали искать интегралы более общего вида:

$$\mathcal{E}_2(u, v) = \int_D \{Bu_{ij}v_{ij} + bu_{it}v_{it} + {}^iAu_{ij}v_j + \underline{A^iu_jv_{ij}} + \\ + {}^iau_{it}v_t + \underline{a^iu_tv_{it}} + T(u, v)\}\,dx + \int_S Q(u, v)\,ds, \tag{1*.1}$$

то интегрированием по частям по x_i подчеркнутых членов можно было бы привести последний интеграл к виду (1.1), причем следует положить:

$$B^i = {}^iA - A^i,$$
$$b^i = {}^ia - a^i.$$

При таком интегрировании по частям под знак контурного интеграла выделятся следующие члены:

$$u_jv_jA^i\cos(n, x_i) = u_jv_jA^n,$$
$$u_tv_ta^i\cos(x_in) = a^nu_tv_t.$$

Выражение под знаком канонической поверхностной компоненты (4.1) заменится в таком случае (в условиях задачи I) на следующее:

$$\frac{d}{\partial t}\{(-BKu_nv_n + A^nu_nv_n) + Q(n, v)\} + b^nu_{nt}v_n.$$

Таким образом, полагая

$$A^n\big|_S = \sum_{i=1}^m A^i\cos(n, x_i) = BK, \quad Q(u, v) = 0, \quad {}_ia = a^i = B^i = 0,$$

можно интеграл записать также в следующем чисто объемном виде:

$${}^{\mathrm{I}}\mathcal{E}_2(u, v) = \int_D \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{m+1} u_{ik}v_{ik} + \frac{\partial A^k \sum_{j=1}^m u_j v_j}{\partial x_k}\right)dx. \tag{5*.1}$$

Для справедливости чисто объемного представления (5*.1) достаточно, чтобы существовал вектор A^k с непрерывной $\operatorname{div} A = A^k_k$ в $\overline{D}$, для которого выполняется предельное условие на S:

$$A^n = \sum_{k=1}^m A^k\cos(n, x_k) = BK = -B\sum_1^{m-1} P_{jj}$$

(подробнее на соответствующих достаточных условиях для S мы остановимся позже).

Задачи III и II.

Заменяя в правых частях равенств (K_1), (K_2), (K_3) величины u^*, u_n^* через $u, -hu$ и переходя в начало координат специальной системы, мы получим следующие контурные тождества задачи III:

$$u_n = -hu; \qquad ({}^{III}S_1^0)$$

$$\left.\begin{aligned} u_{nj} &= -(hu)_j + P_{jj}u_j; \\ u_{nt} &= -hu_t; \quad j = 1, 2, \ldots, m-1; \end{aligned}\right\} \qquad ({}^{III}S_2^0)$$

$$\left.\begin{aligned}
u_{kjj_1} &= \frac{d^2}{\partial x_{j_1}\partial x_k}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j} - P_j\left(\frac{-hu}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{P_\nu}{T^2}\frac{du}{\partial x_\nu}\right)\right] - u_{mjk}P_{j_1} - \\
&\qquad - u_{mmj}P_{j_1}P_k - u_{mj}P_{jk}; \\
u_{mjk} &= \frac{d}{\partial x_k}\left[-P_j u_{mm} + \frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{-hu}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{P_\nu}{T^2}\frac{du}{dx_\nu}\right)\right] - u_{mjm}P_k; \\
u_{jjm} &= \frac{d}{\partial x_j}\left[-P_j u_{mm} + \frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{-hu}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{P_\nu}{T^2}\frac{du}{\partial x_\nu}\right)\right] - u_{mmj}P_j; \\
u_{mmm} &= -\sum_{j=0}^{m-1} u_{mjj}; \quad j, k, j_1 = 1, 2, \ldots, m-1.
\end{aligned}\right\} \qquad ({}^{III}S_3)$$

Параметр B и вектор b^i, определенный формулой $(3_2.1)$ при исследовании объемных условий на интеграл, оставались независимыми друг от друга. Мы увидим, что они не вступают между собой в контакт и при изучении необходимых и достаточных условий на поверхностную компоненту интеграла (2.1). Именно, ниже устанавливается, что члены, содержащие множителем B под знаком поверхностного интеграла выражения (2.1), интегрируются по времени независимо от остальных и тем самым определяют поверхностную форму $Q(u, v)$.

Таким образом, интегралы, соответствующие B и b^i, существуют независимо друг от друга. Полагая $B = 1$, $b^i \equiv 0$ и используя контурные тождества ${}^{III}S_1^0$, ${}^{III}S_2^0$, можно члены, стоящие под знаком контурного интеграла в выражении (2.1), переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&u_{ni}v_{it} + u_{nit}v_i + u_{nt}v_{ii} - u_{iit}v_n = (u_{ni}v_i)_t - hu_t v_{ii} + u_{iit}hv = \\
&= \sum_{j=1}^{m-1}\{(u_{nj}v_j)_t - hu_t v_{jj} + u_{jjt}hv\} - h(u_t v_{nn} + u_{nn}v_t) = \\
&= \sum_{j=1}^{m-1}\{(u_{nj}v_j)_t - hu_t v_{jj} + u_{jjt}hv\} - h\left[u_t\left(v_{tt} - \sum_{j=1}^{m-1}v_{jj}\right) + \right. \\
&\left. + \left(-\sum_{j=1}^{m-1}u_{jj} + u_{tt}\right)v_t\right] = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}[-(hu)_j v_j + P_{jj}u_j v_j + \underline{hvu_{jj}}] - hu_t v_t\right\} = \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}[(-2h + P_{jj})u_j v_j - h_j(uv_j + u_j v)] - hu_t v_t - quv\right\}. \qquad (6^*.1)
\end{aligned}$$

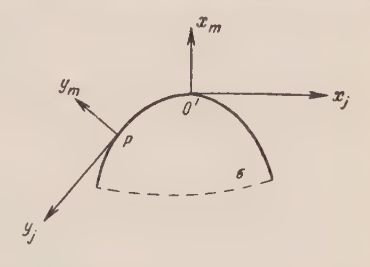
Отметим, что последний переход в равенствах (6.1) получен интегрированием по частям подчеркнутых членов hvu_{jj} по касательному к поверхности S направлению x_j. Для нас принципиально важно установить законность такой операции, поэтому рассмотрим данный вопрос подробно.

Проверим выполнение необходимых и достаточных условий для того, чтобы выражение

$$Z = \iint\limits_S \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} [hvu_{jj} + (hv)_j u_j + quv] \right\} ds \tag{7.1}$$

было интегралом нулевого класса.

Возьмем малый элемент поверхности σ, однозначно проектируемый на касательную плоскость с точкой касания в O', и проекцию такого элемента обозначим σ'. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — специальные координаты с центром в O' и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — специальные координаты с центром в переменной точке P на σ. Для простоты будем брать только такие h, которые являются значениями на S для функции от m независимых переменных $h = h(x_1, \ldots, x_m)$, определенной и имеющей непрерывные производные первого порядка в m-мерной окрестности S.



Возьмем вместо (7.1) интеграл, распространенный только на σ, и выпишем точнее подинтегральное выражение:

$$\iint\limits_\sigma \left[\sum_{j=1}^{m-1} \left(hv \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + \frac{\partial hv}{\partial y_j} + \frac{\partial u}{\partial y_j} + quv \right) \right] d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma'} \left[\sum_{j=1}^{m-1} \left(hv \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} \frac{\partial hv}{\partial y_j} \frac{\partial u}{\partial y_j} + quv \right) \right] T d\sigma'. \tag{7$_\sigma$.1}$$

Вводя обозначения $\cos(x_k, y_j) = C_{kj}$, можно написать следующие очевидные равенства:

$$x_k = a_k + C_{ki} y_i, \quad C_{ki} C_{li} = \delta_{kl}, \qquad \delta_{kl} = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq l, \\ 1 \text{ при } k = l; \end{cases}$$
$$y_i = b_k + C_{ki} x_k, \quad C_{kl} C_{ki} = \delta_{li},$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} C_{kj} C_{lj} = \delta_{kl} - C_{km} C_{lm}, \quad C_{jm} = \frac{-P_j}{T}, \quad T = \sqrt{1 + \sum_1^{m-1} P_j^2},$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} C_{jk} C_{jl} = \delta_{kl} - C_{mk} C_{ml}, \quad C_{mm} = \frac{1}{T}, \quad P_j = \frac{\partial x_m [x_1, \ldots, x_{m-1}]}{\partial x_j};$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_{kj} P_k = C_{mj}; \quad -\sum_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu m} P_\nu = T - \frac{1}{T}, \quad \sum_{j=1}^{m-1} C_{mj} C_{kj} = \frac{-C_{km}}{T};$$

$$\frac{\partial hv}{\partial y_j} = \frac{\partial hv}{\partial x_k} C_{kj} = \sum_{k=1}^{m-1} C_{kj} \left(\frac{dhv}{\partial x_k} - P_k \frac{\partial hv}{\partial x_m} \right) + C_{mj} \frac{\partial hv}{\partial x_m} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} C_{kj} \frac{dhv}{\partial x_k} + \left[C_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} C_{kj} P_k \right] \frac{\partial hv}{\partial x_m} = \sum_{k=1}^{m-1} C_{kj} \frac{dhv}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^{m-1} C_{lj} \frac{\partial u}{\partial x_l};$$

$$\frac{\partial hv}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial y_j} = \sum_{k,l=1}^{m-1} C_{kj} C_{lj} \frac{du}{\partial x_l} \cdot \frac{dhv}{\partial x_k}. \tag{8.1}$$

Далее, заменяя в (K_2) функции u^*, u_n^* на u, $-hu$ и выражая из полученной таким образом системы объемные производные через полные, найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} = \sum_{k,l=1}^{m} C_{lj}C_{kj}\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} = \sum_{k,l=1}^{m-1} C_{lj}C_{kj}\left\{\frac{d}{dx_l}\left[\frac{du}{\partial x_k} - \right.\right.$$

$$\left. - P_k\left(\frac{-hu}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{P_\nu}{T^2}\frac{du}{\partial x_\nu}\right) - P_l\left[-P_k u_{mm} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{-hu}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{P_\nu}{T^2}\frac{du}{\partial x_\nu}\right)\right]\right\} + C_{mj}C_{mj}u_{mm} +$$

$$+ 2C_{mj}C_{kj}\left[-P_k u_{mm} + \frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{-hu}{T} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{P_\nu}{T^2}\frac{du}{\partial x_\nu}\right)\right]. \qquad (8_1.1)$$

Умножая (8.1) на $Td\sigma'$, интегрируя по частям по x_k по области σ' и складывая затем с (8.1), умноженным на $Td\sigma'$, получим под знаком интеграла (7_σ.1) следующее выражение:

$$-hv\left[TC_{kj}C_{lj}\frac{d^2u}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{dTC_{kj}C_{lj}}{\partial x_k}\cdot\frac{du}{\partial x_l}\right] + quv +$$

$$+ hvT\left\{\left[C_{lj}C_{kj} - C_{k_1j}P_{k_1}C_{lj}\frac{P_k}{T^2} - C_{l_1j}P_{l_1}C_{kj}\frac{P_l}{T^2} - \right.\right.$$

$$\left. - C_{k_1j}P_{k_1}C_{kj}\frac{P_l}{T^2} - C_{l_1j}P_{l_1}C_{lj}\frac{P_k}{T^2} + 2C_{mj}\left(C_{kj}\frac{P_l}{T^2} + C_{lj}\frac{P_k}{T^2}\right)\right]\frac{d^2u}{\partial x_k \partial x_l} +$$

$$+ \left[2C_{lj}C_{mj}\frac{h}{T} - 2C_{lj}C_{mj}\frac{h}{T} - 2C_{mj}C_{kj}\frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{P_l}{T^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2C_{mj}C_{kj}\frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{P_l}{T^2}\right) - C_{\rho j}C_{kj}\frac{P_l}{T}\frac{dP_k}{\partial x_\rho} - \frac{dT_{\rho j}C_{lj}}{\partial x_\rho}\right]\frac{du}{\partial x_l} +$$

$$+ \left[\frac{P_{lk}C_{lj}C_{kj}h}{T} + C_{kj}P_kC_{lj}\frac{d}{\partial x_l}\left(\frac{h}{T}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + C_{lj}P_lC_{kj}\frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{h}{T}\right) - 2C_{mj}C_{kj}\frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{h}{T}\right)\right]u\right\}.$$

Здесь коэффициент при u_{mm}, если принять во внимание равенства

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_{kj}P_k = C_{mj},$$

$$C_{mj}C_{mj} + C_{lj}C_{kj}P_lP_k - 2C_{mj}C_{kj}P_k = C_{mj}C_{mj} + C_{mj}C_{mj} - 2C_{mj}C_{mj} = 0,$$

оказывается тождественно равным нулю.

Коэффициент при производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}$ также легко подсчитывается и оказывается равным нулю:

$$hvT\left[C_{kj}C_{lj} - C_{kj}C_{lj} - 2C_{mj}C_{lj}\frac{P_k}{T^2} - \right.$$

$$\left. - 2C_{mj}C_{lj}\frac{P_k}{T^2} + 2C_{mj}C_{kj}\frac{P_l}{T^2} + 2C_{mj}C_{lj}\frac{P_k}{T^2}\right] \equiv 0.$$

На основании тождества

$$\sum_{j=1}^{m-1} C_{\rho j} C_{kj} = \delta_{\rho k} - C_{\rho m} C_{km} = \delta_{\rho k} - \frac{P_\rho P_k}{T^2},$$

проверяется, что коэффициент при первой производной, имеющий вид

$$-C_{\rho j} C_{kj} \frac{P_l}{T} \frac{dP_k}{\partial x_\rho} - \frac{dTC_{\rho j} C_{lj}}{\partial x_\rho} = \left(\frac{P_\rho P_k}{T^2} - \delta_{\rho k}\right) \frac{P_l}{T} \frac{dP_k}{\partial x_\rho} + \frac{d}{\partial x_\rho}\left(\frac{P_\rho P}{T} - \delta_{\rho l} T\right) =$$
$$= -\frac{P_l}{T} \frac{dP_\rho}{\partial x_\rho} - \frac{P_k}{T} \frac{dP_k}{\partial x_l} + \frac{1}{T}\left(P_l \frac{dP_\rho}{\partial x_\rho} + P_k \frac{dP_l}{\partial x_k}\right) \equiv 0,$$

обращается в ноль.

Коэффициент при u тоже, очевидно, будет равен нулю, если

$$q = -P_{lk} C_{lj} C_{kj} h^2 = h\left(\frac{P_l P_k}{T^2} - \delta_{lk}\right) P_{lk} = Kh^2.$$

Так как в качестве σ можно было взять любой элемент поверхности S, то подинтегральное выражение интеграла (7.1) является поверхностным идеалом задачи, и, следовательно, на основании необходимого и достаточного признака, величина Z является интегралом нулевого класса [1].

Отметим, что интегрирование по частям по поверхности S будет всегда приводить к правильному результату, если его производить следующим образом:

1) перейти в подинтегральном выражении на σ к одной и той же системе специальных координат $x_1, \ldots, x_m$ с центром в O', лежащим на σ;

2) пользуясь контурными тождествами задачи, выразить все объемные производные через полные производные от функций поверхностного базиса;

3) преобразовать интеграл по σ в интеграл по элементу касательной плоскости σ' и затем уже на соответствующем элементе касательной плоскости σ' выполнить интегрирование по частям в терминах полных частных производных.

Ясно, что тогда разность между исходным интегралом и тем, который получится после такого интегрирования по частям, будет интегралом нулевого класса. После этого уже можно считать σ бесконечно малой и в окончательном выражении перейти в начало координат O'.

Выражения, возникающие под знаком поверхностной компоненты интегралов, носят не случайный характер и имеют, в частности в касательных ортогональных осях (после перехода в начало координат специальной системы), инвариантный вид.

На основании предыдущих рассуждений, в частности формулы (6.1), можно положить

$$Q(u, v) = \sum_{j=1}^{m-1} [(2h - P_{jj}) u_j v_j + h_j (uv_j + u_j v)] + hu_t v_t + h^2 Kuv$$

и выписать следующий интеграл второго порядка задачи III:

$$E_2^{\mathrm{III}}(u, v) = \int \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m} u_{ik} v_{ik} dx + \int_S \Big\{ \sum_{j=1}^{m-1} (2h - P_{jj}) u_j v_j + $$
$$+ h_j (u v_j + u_j v)] + h u_t v_t - h^2 \sum_{j=1}^{m-1} P_{jj} u v \Big\} ds. \qquad (9.1),$$

Если положить $h \equiv 0$, то из выражения (9.1) получим соответствующий интеграл второго порядка задачи II.

Так же как и в задаче I, полученное представление интеграла второго порядка не единственно. Например, непосредственной проверкой легко убедиться, что следующее выражение будет также интегралом задачи III:

$$\mathscr{E}_2(u, v) = \int_D \Big\{ u_{li} v_{li} + u_{lt} v_{lt} + \frac{\partial}{\partial x_i} (H_l^i u_l v + H^i u_l v_l) \Big\} dx +$$
$$+ \int_S \Big\{ \sum_{j=1}^{m-1} (h - P_{jj}) u_j v_j + h u_t v_t + h u v d_i v H + h u H^i v_i +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m-1} H^j v (h - P_{jj}) u_j \Big\} ds; \quad i, l = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь вектор H имеет компоненты H^i с непрерывными первыми производными H_l^i в $\overline{D}$ и нормальную компоненту, подчиненную условию

$$H^m \big|_S = H \cdot n \big|_S = h.$$

Его касательные составляющие на S произвольны и их можно взять равными нулю (здесь считаем, что такой вектор для D существует).

Положим топерь $B = 0$ и выпишем только те члены из-под знака поверхностного интеграла (2.1), которые содержат множителями проекции вектора b^i, к ним прибавим также производную искомой формы первого порядка $Q(u, v)$:

$$b^i (u_{in} v_t + u_{int} v) + b^i u_{it} v_n - b_n^i u_{it} v - b^i u_{int} v + \frac{dQ(u, v)}{dt}. \qquad (10.1)$$

Если использовать контурные тождества задачи III, положить на элементе σ' касательной плоскости:

$$Q(u, v) + \sum_{j=1}^{m-1} u_{nj} v_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{m-1} \left(\gamma^{jj} \frac{du}{\partial x_j} \frac{dv}{\partial x_j} + \gamma^{oj} u \frac{dv}{\partial x_j} + \gamma^{jo} \frac{du}{\partial x_j} v + \beta^{tj} u_t \frac{dv}{\partial x_j} + \beta^{jt} v_t \frac{du}{\partial x_j} \right) +$$
$$+ \gamma^{oo} u v + \beta^{to} u_t v + \beta^{ot} u v_t + \beta^{tt} u_t v_t = Q_1(u, v) \qquad (10^*.1)$$

и затем проинтегрировать $Q_1(u, v)$ по частям на σ', то (10.1) можно представить в следующем виде:

$$b^n(u_{nn}v_t + h^2u_tv) + \frac{dQ_1(u, v)}{dt} + \sum_{j=1}^{m-1}\{b^ju_{jt}(-hv) - b_n^j u_{jt}v - b^ju_{njt}v\} =$$

$$= \Big[h^2u_t + \sum_{j=1}^{m-1}\Big(-hb^ju_{jt} - b_n{}^ju_{jt} - b^ju_{njt} - \gamma^{jj}u_{jjt} - u_{jt}\frac{d\gamma^{jj}}{\partial x_j} +$$

$$+ \gamma^{jj}hu_t + u_{jt}\gamma^{jo} - \gamma^{oj}u_{jt} + \gamma^{oo}u_t + \cdots\Big) + \cdots\Big]v +$$

$$+ \Big[b^n u_{nn} + \sum_{j=1}^{m-1}\Big(-\gamma^{jj}u_{jj} - u_j\frac{d\gamma^{jj}}{\partial x_j} + \gamma^{jj}P_{jj}hu + \cdots\Big) + \cdots\Big]v_t. \quad (11.1)$$

Здесь использована зависимость между объемными и полными производными, в частности равенство

$$\frac{d^2u}{\partial x_j{}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j{}^2} + P_{jj}\frac{\partial u}{\partial x_m} + \cdots = u_{jj} - P_{jj}hu + \cdots.$$

Но v, v_t, u, u_t в задаче III являются функциями поверхностного базиса, поэтому в каждой квадратной скобке коэффициент при каждой полной производной должен обращаться в ноль (1). В силу этого, из первой квадратной скобки, стоящей множителем при v, заключаем, что $\gamma^{jj} = 0$, а тогда из второй квадратной скобки найдем $b^n|_S = 0$, что вместе с $(3_2.1)$ обращает вектор b^i тождественно в ноль.

З а д а ч а IV $(u_n + hu_{tt} = 0)$.

Рассуждениями, вполне аналогичными вышеизложенным, можно найти только один следующий интеграл второго порядка вида (1.1) для задачи IV:

$$E^{\text{IV}}(u, v) = \int_D \sum_{i=1}^{m+1} u_iv_i dx + \int_S hu_tv_tds. \quad (12.1)$$

Будем искать не зависящий от системы координат интеграл второго порядка, более общего чем (1.1) вида (причем не будем выписывать несколько раз члены, которые получаются друг из друга интегрированием по частям по области $\overline{D}$):

$$T_2(u, v) = \int_D \{B^{lmij}u_{lm}v_{ij} + b^{ij}u_{it}v_{jt} + B^{lij}u_{li}v_j +$$

$$+ b^iu_{it}v_t + T(u, v)\}\,dx + \int_S Q_1(u, v)\,ds.$$

Не умаляя общности, можно считать все тензоры B^{lmij}, b^{ij}, B^{lij} симметричными относительно перестановки двух любых значков. Производная от $T_2(u, v)$ по времени после приведения к каноническому виду запишется:

$$\frac{dT_2}{dt} = \int_D \{[(B^{lmij}u_{lm})_{ij} - (b^{ij}u_{ill})_j - (B^{lij}u_{li})_j + b^iu_{ill} + \cdots]v_t +$$

$$+ [(B^{lmij}u_{lmt})_{ij} - (b^{ij}u_{it})_{jll} - (B^{lij}u_{lit}) + (b^iu_{it})_{ll} + \cdots]v\}\,dx +$$

$$+ \int_S (\{B^{lmij}C^iu_{lm}v_{jt} - (B^{lmij}u_{lm})_iC^jv_t + b^{in}u_{ill}v_t + B^{lin}u_{li}v_t + \cdots\} +$$

$$+ \{B^{lkni}u_{lkt}v_j - (B^{lkij}u_{lkt})_iC^jv_t + b^{in}u_{it}v_{ll} - (b^{ij}u_{it})_jv_n +$$

$$+ (b^{ij}u_{it})_{jn}v + (B^{lij}u_{lit})C^jv + (b^iu_{it})v_n - (b^iu_{it})_nv + \cdots\})\,ds. \quad (13.1)$$

Приравниваем нулю коэффициент при u_{lmij} в первой квадратной скобке, причем считаем, что никакие два значка не совпадают друг с другом; тогда получим равенство:

$$\sum_{lmij} B^{lmij} = 0.$$

Знак $\sum\limits_{lmij}$ обозначает суммирование коэффициентов по всевозможным перестановкам значков, перечисленных под знаком суммы. Так как тензор B^{lmij} предположен симметричным относительно перестановки двух любых значков, то отсюда следует, что

$$B^{lmij} = 0$$

(если все значки различны). Далее, так как u и u_t — в фиксированный момент не зависящие друг от друга произвольные функции, то, применяя теорему о делении тензорных плотностей к выражению (1.*1), заключаем, что B^{ijll} и B^{illj} должны быть тензорами второго ранга и могут быть обозначены через B^{ij} (т. е. не должны зависеть от значка l).

Приравнивая нулю коэффициент при u_{ijll} в первой квадратной скобке выражения (13.1), найдем, что

$$B^{illj} = B^{ij} = b^{ij}.$$

Приравнивая коэффициент при u_{lij} нулю, где все три значка различны, находим

$$B^{lij} = 0, \quad (l \neq i \neq j).$$

Если приравнять нулю коэффициент при u_{ill}, то получим:

$$(B_j{}^{ij} - b_j{}^{ij}) - B^{ill} + b^i = 0.$$

В силу предыдущего, круглая скобка обращается в ноль и, следовательно, B^{ill} есть вектор, равный b^i (не зависит от значка l).

Таким образом, интеграл (1.1) можно переписать в двух следующих видах:

$$I(u, v) = \int_D \{b^{ij}u_{il}v_{jl} + b^{ij}u_{it}v_{jt} + b^{j}u_{il}v_l + b^i u_{it}v_t + T(u, v)\}\,dx +$$
$$+ \int_S Q(u, v)\,ds;$$
$$I_1(u, v) = \int_D (B^{ij}u_{ij}v_{ll} + B^{ij}u_{it}v_{jt} + B^i u_{il}v_l + B^i u_{it}v_t + T(u, v))\,dx +$$
$$+ \int_S Q_1(u, v)\,ds.$$

Матрицы b^{ij} и B^{ij}, по предположению, симметричны, следовательно, поворотом осей координат билинейные формы $b^{ij}u_{it}$, $B^{ij}u_{ij}v_{ll}$ могут быть преобразованы к диагональному виду

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i u_{it}v_{it}, \qquad v_{ll}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{ii},$$

но последние будут инвариантными только в том случае, когда $\beta_i = \beta$, $\lambda_i = \lambda$ (не зависят от значка i).

Таким образом, интеграл $I(u, v)$ должен совпадать с интегралом (1), изученным выше. Применение необходимых и достаточных условий к $I_1(u, v)$ дает только один интеграл следующего вида:

$$I_1(u, v) = \int_D (u_{ii}v_{ll} + u_{it}v_{it})\,dx + \int_S Q(u, v)\,ds.$$

Объемные компоненты интегралов $I(u, v)$ и $I_1(u, v)$ переводятся друг в друга интегрированием по частям, так что можем написать равенство

$$I(u, v) = \int_D (u_{il}v_{il} + u_{lt}v_{lt})\,dx + \int_S Q_1(u, v)\,ds =$$
$$= \int_D (u_{ii}v_{ll} + u_{lt}v_{lt})\,dx + \int_S [Q_1(u, v) + u_{nl}v_l - u_{ii}v_n]\,ds.$$

В случае задачи I:

$$u_{ii}|_S = u_{tt}|_S = 0, \quad u_l|_S = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Следовательно,

$$u_{nl}v_l - u_{ii}v_n = u_{nn}v_n = -Ku_nv_n;$$
$$Q(u, v) = Q_1(u, v) - Ku_nv_n = (K - K)\,u_nv_n = 0.$$

В случае задачи II:

$$u_{nl}v_l - u_{ii}v_n = \sum_{j=1}^{m-1} P_{jj}u_jv_j,$$

$$Q(u, v) = \sum_{j=1}^{m-1} (P_{jj} - P_{jj})\,u_jv_j = 0.$$

В случае задачи III:

$$u_{nl}v_l - u_{ii}v_n = \sum_{j=1}^{m-1} (u_{nj}v_j - u_{jj}hv),$$

что после использования контурных тождеств и интегрирования по частям приводит (как и в задачах I, II) к равенству:

$$E_2^{\text{III}}(u, v) = E_1^{\text{III}}(u_t, v_t) + Z(u, v),$$

где $E_1^{\text{III}}(u, v)$ — интеграл первого порядка, найденный ранее [1], а $Z(u, v)$ — некоторый интеграл нулевого класса.

Резюмируя предыдущее, можно сформулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *В рассматриваемых задачах существует только один, принадлежащий к классу C, интеграл второго порядка пространственного типа (вида (1*.1)) в том смысле, что все остальные интегралы отличаются от него лишь на интеграл нулевого класса.*

Однако введение интегралов второго порядка $E_2(u, v)$ в математическую физику целесообразно, в частности, в силу справедливости следующей теоремы.

5*

ТЕОРЕМА 2. *Найденные выше интегралы класса* C *первого и второго порядков являются независимыми друг от друга константами задачи.*

Действительно, пусть существует зависимость:

$$E_2(u, v) = f(E_1(u, v)).$$

Заменяя здесь u на ku, где k — произвольное число, мы придем к равенству:

$$f(kE_1) = kf(E_1),$$

которое означает, что если существует зависимость между $E_2(u, v)$ и $E_1(u, v)$, так только линейная. Но последняя также невозможна, так как разность

$$z(u, v) = E_2(u, v) - kE_1(u, v) =$$
$$= \int_D (u_{il}v_{il} + u_{lt}v_{lt} - ku_iv_i - ku_tv_t)\, dx + \int_S (\cdots)\, ds$$

не может быть интегралом нулевого класса, вследствие нарушения объемных необходимых условий [1].

Отметим, что, в частности, классическую энергию $E = E_1(u, v)$ можно зафиксировать, а величину $E_2(u, v)$ изменять по произволу.

Перейдем теперь к рассмотрению интегралов второго порядка другого типа.

§ 2. Существование положительно определенного интеграла $E_N(u, \bar{u})$ любого порядка N

Откажемся теперь при отыскании интегралов от попутного доказательства их единственности. Пусть при перечисленных выше краевых условиях (I, II, III) для волнового уравнения существует интеграл порядка N следующего вида:

$$E_N(u, v) = \int_D \frac{\partial^N u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_m^{l_m} \partial x_i} \cdot \frac{\partial^N v}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_m^{l_m} \partial x_i}\, dx + \int_S Q_{N-1}(u, v)\, ds, \quad (1.2)$$

где $i = 1, 2, \ldots, m+1$; $\sum_{\nu=1}^{m} l_\nu = N - 1$, $Q_{N-1}(u, v)$ — форма от производных u, v до порядка $N - 1$ (при $N = 1, 2$ существование такого интеграла установлено выше). Докажем, что тогда существует интеграл $E_{N+2} = E_{N+2}(u, v)$, имеющий следующий вид:

$$E_{N+2}(u, v) =$$
$$= \int_D \frac{\partial^{N+2} u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_m^{l_m} \partial x_i \partial x_j \partial x_l} \cdot \frac{\partial^{N+2} v}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_m^{l_m} \partial x_i \partial x_j \partial x_l}\, dx + \int_S Q_{N+1}(u, v)\, ds, \quad (2.2)$$

где $Q_{N+1}(u, v)$ — искомая форма от производных до порядка $N + 1$ включительно.

Интегрируя по области D выражение (2.2) по частям по x_j и x_l, приведем его к виду

$$E_{N+2}(u, v) = \int_D \omega u_{jj} \omega u_{ll} dx + \int_S \{Q_{N+1}(u, v) + \omega u_n \cdot \omega v_{jj} - \omega u_j \omega_j v_n\} ds, \quad (3.2)$$

где для краткости положено

$$\omega u = \frac{\partial^N u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_m^{l_m} \partial x_i}, \quad \omega_j u = \frac{\partial \omega u}{\partial x_j}, \quad \omega_j u_n = \sum_{\rho=1}^{m} C^\rho \frac{\partial \omega u_j}{\partial x_\rho}; \;\; C^\rho = \cos(n, x_\rho).$$

Если заменить в (3.2) фигурную скобку на

$$Q_{N-1}(u_{jj}, v_{ll}) = Q_{N-1}(u_{tt}, v_{tt}),$$

то получим интеграл

$$E_N(u_{jj}, v_{ll}) = E_N(u_{tt}, v_{tt}),$$

который существует, согласно сделанному выше предположению (т. е. сохраняет постоянное значение во времени).

Займемся изучением дополнительных членов, которые выделились при интегрировании по частям. Прежде всего заметим, что выражение

$$P = \omega u_n \omega v_{jj} - \omega u_j \cdot \omega_j v_n = C^\rho \omega u_\rho \cdot \omega v_{jj} - \omega u_i \cdot C^\rho \omega v_{j\rho} \quad (4.2)$$

инвариантно при переходе от прямоугольных декартовых координат к прямоугольным же, причем если $j = m = n$, то соответствующие члены взаимно сокращаются, так что P остается инвариантным и не меняет своего значения, если j будем изменять от 1 до $m - 1$ включительно, что впредь и подразумевается.

Производную от искомой функции будем относить к P-му классу, если она содержит P-кратное дифференцирование по переменной x_m.

Производные $\frac{\partial \omega u}{\partial x_m}$ и $\omega_j \frac{\partial v}{\partial x_m}$ при фиксированном l_m принадлежат к одному и тому же классу $1 + l_m$. Точно так же производные ωv_{jj} и ωu_j принадлежат к одному и тому же классу l_m. При этом одна из названных пар (например, левые множители в выражении P) принадлежат к нечетному классу, а вторая пара обязательно принадлежит к четному классу. Заметим, что в условиях задач III, II, как показывает система контурных тождеств ${}^{III}S_N$, объемная производная нечетного класса $2\nu + 1$ выражается через полные частные так, что из коэффициентов, стоящих при старших производных, конечными оказываются только коэффициенты при производных на единицу сниженного порядка, т. е. при производных порядка 2ν.

Действительно,

$$u_m = \frac{\partial u}{\partial x_m} = \frac{-hu}{T} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{P_j}{T^2} \frac{\partial u}{\partial x} = -hu + \cdots$$

$$u_{mjj} = -(hu)_{jj} + P_{jj} \sum_{l=0}^{m-1} u_{ll} + \cdots$$

$$u_{mmm} = -\sum_{i=0}^{m-1} u_{mjj} = -\sum_{j=1}^{m-1} \left[(-hu)_{jj} + P_{jj} \sum_{l=0}^{m-1} u_{ll}\right] - hu_{tt} + \cdots$$

Здесь в правой части имеются в виду полные частные производные, многоточием обозначены члены, содержащие полные производные порядка $k \leqslant 2\nu + 1$, но имеющие бесконечно малые вместе с P_j коэффициенты, а также члены с производными порядков $k < 2\nu$, которые могут иметь и конечные коэффициенты.

В случае задачи I, как легко проследить по системе контурных тождеств ${}^{\text{I}}S_N$, в силу наличия тождества $u_{mm} = -Ku_m + \cdots$ и его следствий, снижение порядка полных производных на единицу (при конечных коэффициентах) получается в производных четного класса, т. е. в другой паре множителей выражений P.

Таким образом, после перехода в выражении (4.2) к полным производным, мы получим сумму одночленов следующего вида:

$$\left[A_{s_0 s_1 \cdots s_{m-1}} \frac{d^{s_0+s_1+\cdots+s_{m-1}} u}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_{m-1}^{s_{m-1}}} + \cdots\right] \cdot \left[B_{\rho_0 \rho_1 \cdots \rho_{m-1}} \frac{d^{\rho_0+\rho_1+\cdots+\rho_{m-1}} v}{\partial t^{\rho_0} \partial x_1^{\rho_1} \cdots \partial x_{m-1}^{\rho_{m-1}}} + \cdots\right]$$

многоточия имеют тот же смысл, что и выше. Здесь возможны два случая

1) $$\sum_{i=0}^{m-1} s_i = \sum_{i=0}^{m-1} \rho_i = N + 1,$$

когда снижение порядка получается в первых множителях выражения P

2) $$\sum_{i=0}^{m-1} s_i = N, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \rho_i = N + 2.$$

Во втором случае однократным интегрированием по частям* по x_j по плоской области σ' мы получим вместо P билинейную форму $q_{N+1}(u, v)$ от производных порядка $k \leqslant N + 1$.

Таким образом, в трех перечисленных задачах I, II, III для волнового уравнения, которое часто встречается в математической физике, мы приходим к следующему равенству, определяющему поверхностную билинейную форму интеграла $E_{N+2}(u, v)$:

$$Q_{N+1}(u, v) = Q_{N-1}(u_{tt}, v_{tt}) - q_{N+1}(u, v). \tag{5.2}$$

Так как существование интегралов $E_1(u, v)$ и $E_2(u, v)$ было установлено выше, то тем самым доказано существование интегралов любого порядка N вида (1.2).

Заметим, что переход от интеграла $E_{N+2}(u, v)$ к интегралу (3.2), равному $E_N(u_{tt}, v_{tt})$, равносилен прибавлению к последнему определенного интеграла нулевого класса. Отсюда следует, что если $E_N(u, \overline{u}) > 0$ и может обращаться в ноль только при $u \equiv 0$, то этим же свойством обладает $E_{N+2}(u, \overline{u})$. Действительно, пусть $E_N(\Delta u, \Delta\overline{u}) = 0$, тогда $\Delta u \equiv 0$; если, кроме того, учесть пограничное условие, например, задачи I, $u|_S = 0$ (или задачи III, $(u_n + hu)_S = 0$ при $h > 0$), то отсюда следует равенство $u \equiv 0$ (вследствие теоремы единственности для задачи Дирихле).

* Интегрирование по частям производится в терминах полных производных.

Таким образом, $E_N(u, \overline{u})$ отличается лишь на интегралы нулевого класса от $E_\nu\left(\frac{\partial^{N-\nu}u}{\partial t^{N-\nu}}, \frac{\partial^{N-\nu}\overline{u}}{\partial t^{N-\nu}}\right)$; $\nu = 1, 2$. При этом все квадратичные интегралы $E_N(u, \overline{u})$ строго определенно положительны.

Между конечным числом интегралов $E_1, E_2, \ldots, E_N$ не может существовать линейной зависимости, так как соответствующая линейная комбинация не может быть интегралом нулевого класса, в силу нарушения необходимых условий в объемной компоненте (они вообще являются независимыми константами задачи). Можно было бы показать, что, наоборот, вся бесконечная совокупность интегралов E_N будет линейно зависима (конечно, на множестве решений, имеющих производные всех порядков).

§ 3. Явная запись интегралов третьего порядка

Найдем интеграл третьего порядка задачи I. В данном случае на границе

$$u\Big|_S = \frac{ud}{\partial x_j}\Big|_S \equiv 0,$$

поэтому система Коши — Ковалевской (K_1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} u_m &= \frac{u_n}{T}, \\ u_j &= \frac{-P_j u_n}{T}. \end{aligned}\right\} (j = 1, 2, \ldots, m-1). \qquad ({}^{I}S_1)$$

Система (K_2), выписанная на стр. 258, в данном случае может быть переписана в виде:

$$u_{mj} = -P_j u_{mm} + \frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{u_n}{T}\right),$$

$$u_{jj_1} = -\frac{d}{\partial x_{j_1}}\left(\frac{P_j u_n}{T}\right) - u_{mj}P_{j_1},$$

$$u_{mm} = -\sum_{j=0}^{m-1} u_{jj}.$$

Приведенные ниже выкладки ясны без комментариев:

$$\begin{aligned} \frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{u_n}{T}\right) &= u_{mj} + P_j u_{mm} = u_{mj} - P_j \sum_{k=1}^{m-1} u_{kk} \quad \Big| -P_j \\ + \qquad -\frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{P_j u_n}{T}\right) &= u_{jj} + P_j u_{mj} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} u_{jj} = -\frac{1}{T^2}\sum_{j=1}^{m-1}\left[P_j \frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{u_n}{T}\right) + \frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{P_j u_n}{T}\right)\right].$$

Отсюда находим выражение всех объемных производных через полные производные от функций поверхностного базиса:

$$u_{mj}=\frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{u_n}{T}\right)\frac{-P_j}{T^2}\sum_{l=1}^{m-1}\left[P_l\frac{d}{\partial x_l}\left(\frac{u_n}{T}\right)+\frac{d}{\partial x_l}\left(\frac{P_lu_n}{T}\right)\right],$$

$$u_{jk}=-P_ku_{mj}-\frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{P_ju_n}{T}\right)= \qquad ({}^{\mathrm{I}}S_2)$$

$$=\frac{P_jP_k}{T^2}\sum_{l=1}^{m-1}\left[P_l\frac{d}{\partial x_l}\left(\frac{u_n}{T}\right)+\frac{d}{\partial x_l}\left(\frac{P_lu_n}{T}\right)\right]-P_k\frac{d}{\partial x_j}\left(\frac{u_n}{T}\right)-\frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{P_ju_n}{T}\right),$$

$$u_{mm}=\sum_{j=1}^{m-1}\left(2P_j\frac{d}{\partial x_j}\frac{u_n}{T}+P_{jj}\frac{u_n}{T}\right)-\frac{\Sigma P_j^2}{T^2}\sum_{l=1}^{m-1}\left[P_l\frac{d}{\partial x_l}\left(\frac{u_n}{T}\right)+\frac{d}{\partial x_l}\left(\frac{P_lu_n}{T}\right)\right].$$

Далее, напишем очевидные равенства:

$$-\left.\begin{aligned}\frac{du_{jk}}{\partial x_j}&=u_{jjk}+P_ju_{mjk}\\ \frac{du_{mk}}{\partial x_j}&=u_{mkj}+P_ju_{mmk}\end{aligned}\right|\,P_j \qquad (*)$$

$$\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{du_{jk}}{\partial x_j}-P_j\frac{du_{mk}}{\partial x_j}\right)=T^2\sum_{j=1}^{m-1}u_{jjk}-u_{ttk}\sum_{l=1}^{m-1}P_l^2,$$

$$\sum_{j=1}^{m-1}u_{jjk}=\frac{u_{ttk}\sum_1^{m-1}P_l^2+\sum_{j=1}^{m-1}\left(-2P_j\frac{du_{mk}}{\partial x_j}-P_{jj}u_{mk}-\frac{d^2}{\partial x_j^2}\frac{P_ku_n}{T}\right)}{T^2}.$$

Здесь u_{ttk} хотя и объемная производная, но она выражена через полные из системы $({}^{\mathrm{I}}S_1)$, продиференцированной два раза по времени. Далее,

$$u_{mmk}=u_{ttk}-\sum_{j=1}^{m-1}u_{jjk},$$

откуда подстановкой в (*) найдем выражение объемных производных третьего порядка через полные:

$$u_{mjk}=\frac{du_{mk}}{\partial x_j}-P_ju_{ttk}+\frac{P_j\left[u_{ttk}\sum_1^{m-1}P_l^2+\sum_{j=1}^{m-1}\left(-2P_j\frac{du_{mk}}{\partial x_j^2}-P_{jj}u_{mk}-\frac{d^2}{\partial x_j^2}\frac{P_ku_n}{T^2}\right)\right.}{T^2},$$

$$u_{ljk}=\frac{du_{jk}}{\partial x_l}-P_lu_{mjk},$$

$$n_{mmk}=u_{ttk}+\frac{-u_{ttk}\sum_1^{m-1}P_l^2+\sum_{j=1}^{m-1}\left(2P_j\frac{du_{mk}}{\partial x_j}+P_{jj}u_{mk}+\frac{d^2}{\partial x_j^2}\frac{P_ku_n}{T}\right)}{T^2}, \qquad ({}^{\mathrm{I}}S_3)$$

$$u_{mmm}=u_{ttm}-\sum_{j=1}^{m-1}u_{mjj};\quad l,k,j=1,2,\ldots,m-1.$$

При разыскании интеграла третьего порядка задачи I мы используем прием, изложенный в § 2. Именно, умножая выражение (4.2) (стр. 269) на $Td\sigma'$, мы получим

$$TPd\sigma' = (C^l u_{il} v_{ikk} - u_{il} C^j v_{ilj}) T d\sigma' = [-P_l u_{il} v_{ikk} + P_l u_{ik} v_{ilk}]\; d\sigma'. \qquad (1.3)$$

Здесь $j, l, k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, m+1$; $P_m = -1$; $C^j = \frac{-P_j}{T}$. В дальнейшем значки i, j, k, l изменяются от 1 до $m-1$ включительно. Соответственно (1.3) перепишем в развернутом виде:

$$\begin{gathered}
[u_{mj}v_{jll} + u_{mm}v_{mkk} + \underline{u_{mm}v_{mmm}} + u_{lm}v_{lkk} + \underline{\underline{u_{lm}v_{lmm}}} - \\
- u_{lk}v_{lmk} - \underline{\underline{u_{lm}v_{lmm}}} - u_{mk}v_{mmk} - \underline{u_{mm}v_{mmm}} - u_{ik}v_{imk} - u_{im}v_{imm} - \\
- P_l u_{ll} v_{lkk} - P_l u_{ll} v_{lmm} - \cdots - P_l u_{il} v_{imm} + \\
+ P_l u_{lk} v_{llk} + P_l u_{lm} v_{llm} + \cdots + P_l u_{im} v_{ilm}]\, d\sigma'. \qquad (2.3)
\end{gathered}$$

Здесь подчеркнутые члены сокращаются.

Выражение (2.3) инвариантно и его можно вычислять в каждой точке поверхности S, в начале координат специальной системы, построенной для этой точки. При переходе в начало такой системы пропадут все члены, содержащие множителем P_l $(l = 1, 2, \ldots m-1)$, и многие другие.

Далее, дифференцированием зависимости

$$u_{nn} - u_n \sum_1^{m-1} P_{jj} = 0$$

можно получить тождество

$$u_{nnj} - u_{nj} \sum_{k=1}^{m-1} P_{kk} - u_n \sum_{k=1}^{m-1} P_{kkj} = 0.$$

Принимая во внимание контурные тождества задачи, в частности, только что выписанное, можно в начале координат написать равенства:

$$\left.\begin{aligned}
-2u_{mk} v_{mmk} &= 2K \sum_{j=1}^{m-1} u_{nj} v_{nj} - 2 \sum_{j,k=1}^{m-1} u_{nk} P_{jjk} v_n, \\
u_{lm} v_{lkk} &= -u_{lm} P_{kk} v_{nl} = K u_{nl} v_{nl}.
\end{aligned}\right\} \qquad (Z_1)$$

Используя вышенайденные системы ${}^{\mathrm{I}}S_1$, ${}^{\mathrm{I}}S_2$, ${}^{\mathrm{I}}S_3$ и выполняя в терминах полных частных производных однократное интегрирование по частям, мы получим в начале координат специальной системы:

$$\left.\begin{aligned}
-u_{ik} v_{imk} &= (v_{mk} + \cdots) \frac{d}{\partial x_i}\left[-P_k \frac{d}{\partial x_i}\left(\frac{u_n}{T}\right) - \frac{d}{\partial x_k}\left(\frac{P_i u_n}{T}\right) + \cdots\right] = \\
&= v_{nk}\left(-\sum_1^{m-1} P_{jj} - 2P_{kk}\right) u_{nk} - \sum_{j,k=1}^{m-1} v_{nk} P_{jjk} u_n + \sum_{i,k,l=1}^{m-1} P_{ik} P_{kl} P_{il} u_n \bar{v}_n = \\
&= v_{nk} (K - 2P_{kk}) u_{nk} - \sum_{k,j=1}^{m-1} v_{nk} P_{jjk} u_n + \sum_{i,k,l=1}^{m-1} P_{ik} P_{kl} P_{il} u_n \bar{v}_n, \\
u_{mm} v_{mkk} &= (-v_{mk} + \cdots) \frac{d}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{m-1} \left(2P_j \frac{d}{\partial x_j} \frac{u_n}{T} + P_{jj} \frac{u_n}{T}\right) = \\
&= K v_{nk} u_{nk} - 2u_{nk} P_{kk} v_{nk} - v_{nk} u_n \sum_{j,k=1}^{m-1} P_{jjk} + u_n \bar{v}_n K \sum_{l,k=1}^{m-1} P_{ll} P_{kk}.
\end{aligned}\right\} \qquad (Z_2)$$

На основании (Z_1) и (Z_2), вместо (2.3) мы получим под знаком поверхностного интеграла следующие выражения:

$$Q_2(u, v) = \sum_{k=1}^{m-1} (4K - 4P_{kk}) u_{nk} v_{nk} + K u_{nt} v_{nt} + 2 u_n \overline{v}_n K \sum_{l,k=1}^{m-1} P_{ll} P_{kk} -$$
$$- 2 \sum_{j,k=1}^{m-1} (u_{nk} P_{jjk} v_n + u_n P_{jjk} v_{nk}).$$

Итак, имеем явное выражение для интеграла третьего порядка задачи I:

$${}^{\mathrm{I}}E_3(u, \overline{v}) = \int_D \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{k,l=1}^{m} u_{ikl} \overline{v}_{ikl} \, dx + \int_S \Big\{ K u_{nt} \overline{v}_{nt} + 2 u_n \overline{v}_n K \sum_{l,k=1}^{m-1} P_{ll} P_{kk} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m-1} \left(4K + \frac{4}{R_j}\right) u_{nj} \overline{v}_{nj} - 2 \sum_{j,k=1}^{m-1} (u_{nk} P_{jjk} \overline{v}_n + u_n P_{jjk} \overline{v}_{nk} \Big\} ds.$$

Аналогично можно найти интеграл третьего порядка в задаче III:

$${}^{\mathrm{III}}E_3(u, v) = \int_D \left(\sum_{i,l,k=1}^{m} u_{ilk} v_{ilk} + \sum_{l,k=1}^{m} u_{tlk} v_{tlk} \right) dx +$$
$$+ \int_S \Big\{ u_{ij} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} + h \right) v_{ij} + 2h u_{ii} v_{jj} - u_{ij} P_{sij} v_s +$$
$$+ 2 (h^2 K - 2P_{jj} K h + h P_{jj}^2 + 3K^2 h) v_{jj} u - h u_{ii} v_{tt} +$$
$$+ 2 (-2P_{llj} K h + 2P_{kkj} h^2 - 2P_{kkj} P_{jj} h) v_j u +$$
$$+ h P_{ii} u v_{tt} + \left[\left(h + \frac{2}{R_j} \right) u_{ii} v_{ii} - \frac{1}{R_j} u_{ii} v_{nn} - P_{sii} u_{ii} v_s + \right.$$
$$+ h \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_i} \right) u_{ii} v + u_{nn} \left[2P_{jj} v_{jj} - h v_{jj} + \frac{1}{R_i} v_{nn} + P_{sjj} v_s - \right.$$
$$\left. - h \left(\frac{1}{R_j^2} - \frac{1}{R_j} \right) v \right] + 2h u_{tj} v_{tj} + h^2 K u_t v_t \Big\} ds;$$
$$l, i, j, s = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Этот интеграл был найден в дипломной работе В. А. Колесниковой.

§ 4. Билинейные интегралы для некоторых, известных в математической физике систем уравнений

Рассмотрим упругие колебания неподвижно заделанного твердого тела произвольной формы. Пусть каждая внутренняя точка конечной области D к моменту t получает смещение на вектор $\vec{u}$, проекции которого на прямоугольные декартовы оси x_1, x_2, x_3 обозначим через u^1, u^2, u^3. На контуре S, ограничивающем D, смещения равны нулю, а внутри D удовлетворяют известным уравнениям теории упругости:

$$\rho u_{tt}^1 = (\lambda + 2\mu) u_{11}^1 + (\lambda + \mu)(u_{12}^2 + u_{13}^3) + \mu (u_{22}^1 + u_{33}^1),$$
$$\rho u_{tt}^2 = (\lambda + 2\mu) u_{22}^2 + (\lambda + \mu)(u_{12}^1 + u_{23}^3) + \mu (u_{11}^2 + u_{33}^2),$$
$$\rho u_{tt}^3 = (\lambda + 2\mu) u_{33}^3 + (\lambda + \mu)(u_{12}^1 + u_{23}^2) + \mu (u_{22}^3 + u_{11}^3);$$
$$u^\mu |_S = 0, \quad \mu = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Здесь ρ — объемная плотность массы, которую считаем постоянной, λ, μ — известные в теории упругости постоянные. Обозначим через v^1, v^2, v^3 второе решение той же задачи, которое, в частности, может совпадать и с первым решением u^1, u^2, u^3.

Общим методом, преодолевая довольно сложные вычисления, можно было бы разыскать следующие интегралы первого и второго порядков данной задачи:

$$I_1(\vec{u},\vec{v}) = \int_D [(\lambda+2\mu)(u_1^1v_1^1+u_2^2v_2^2+u_3^3v_3^3) +$$
$$+\mu(u_2^1v_2^1+u_3^1v_3^1+u_1^2v_1^2+u_2^3v_2^3+u_1^3v_1^3+u_3^2v_3^2+u_1^2v_2^1+$$
$$+u_2^1v_1^2+u_3^1v_1^3+u_1^3v_3^1+u_3^2v_2^3+u_2^3v_3^2)+$$
$$+\lambda(u_2^2v_1^1+u_1^1v_2^2+u_1^1v_3^3+u_3^3v_1^1+u_2^2v_3^3+u_3^3v_2^2)+$$
$$+\rho(u_t^1v_t^1+u_t^2v_t^2+u_t^3v_t^3)]\,dx; \quad u_j^i=\frac{\partial u^i}{\partial x_j};$$

$$I_1^*(\vec{u},\vec{v}) = \int_D \{(\lambda+2\mu)(u_1^1v_1^1+u_2^2v_2^2+u_3^3v_3^3)+\mu(u_2^1v_2^1+u_3^1v_3^1+$$
$$+u_1^2v_1^2+u_1^3v_1^3+u_2^3v_2^3+u_3^2v_3^2)+(\lambda+\mu)(u_1^2v_2^1+u_1^3v_3^1+$$
$$+u_2^3v_3^2+u_1^1v_2^2+u_2^1v_3^3+u_1^1v_3^3)+\rho(u_t^1v_t^1+u_t^2v_t^2+u_t^3v_t^3)\}\,dx;$$

$$D(\vec{u},\vec{v}) = \int_D [u_t^1v^1+u_t^2v^2+u_t^3v^3-(u^1v_t^1+u^2v_t^2+u^3v_t^3)]\,dx.$$

$$I_2(\vec{u},\vec{v}) = \int_D \{(\lambda+2\mu)^2\sum_{i=1}^3 u_{ii}^i\,v_{ii}^i+\mu^2(u_{22}^1\,v_{33}^1+u_{23}^1\,v_{23}^1+u_{33}^1\,v_{33}^1+$$
$$+u_{22}^1\,v_{22}^1+u_{11}^2\,v_{33}^2+u_{33}^2\,v_{33}^2+u_{13}^2\,v_{13}^2+u_{11}^2\,v_{11}^2+u_{11}^3\,v_{11}^3+$$
$$+u_{12}^3\,v_{12}^3+u_{11}^3\,v_{22}^3+u_{22}^3\,v_{22}^3)+\mu(\lambda+2\mu)(u_{11}^1\,v_{33}^1+u_{11}^1\,v_{22}^1+$$
$$+u_{22}^2\,v_{33}^2+u_{11}^2\,v_{22}^2+u_{11}^3\,v_{33}^3+u_{22}^3\,v_{33}^3)+[\mu(\lambda+2\mu)+$$
$$+(\lambda+\mu)^2](u_{13}^1\,v_{13}^1+u_{12}^1\,v_{12}^1+u_{23}^2\,v_{23}^2+u_{12}^2\,v_{12}^2+u_{13}^3\,v_{13}^3+$$
$$+u_{23}^3v_{23}^3)+\mu(\lambda+\mu)(u_{13}^3\,v_{33}^1+u_{11}^3\,v_{13}^1+u_{12}^3\,v_{23}^1+u_{33}^1\,v_{13}^3+$$
$$+u_{11}^1\,v_{13}^3+u_{12}^1\,v_{23}^3+u_{22}^3\,v_{23}^2+u_{13}^3\,v_{12}^2+u_{23}^3\,v_{33}^2+u_{33}^2\,v_{23}^3+$$
$$+u_{13}^2\,v_{12}^3+u_{22}^2\,v_{23}^3+u_{11}^1\,v_{12}^2+u_{23}^1\,v_{13}^2+u_{21}^1\,v_{12}^2+u_{11}^2\,v_{12}^1+$$
$$+u_{22}^2\,v_{12}^1+u_{23}^2\,v_{13}^1)+(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)(u_{33}^3\,v_{13}^1+u_{13}^3\,v_{11}^1+$$
$$+u_{13}^1\,v_{33}^3+u_{13}^1v_{11}^3+u_{33}^3\,v_{23}^2+u_{23}^3\,v_{22}^2+u_{23}^2\,v_{33}^3+u_{23}^2\,v_{22}^3+$$
$$+u_{12}^1\,v_{11}^2+u_{12}^1\,v_{22}^2+u_{12}^2\,v_{11}^1+u_{12}^2v_{22}^1)+[\mu(\lambda+\mu)+(\lambda+\mu)^2]\cdot$$
$$\cdot\, u_{22}^3\,v_{13}^1+u_{22}^1\,v_{13}^3+u_{23}^3\,v_{11}^2+u_{23}^2\,v_{11}^3+u_{12}^1\,v_{33}^2+u_{12}^2\,v_{33}^1)+$$
$$+\rho(\lambda+2\mu)(u_{3t}^3\,v_{3t}^3+u_{1t}^1\,v_{1t}^1+u_{2t}^2\,v_{2t}^2)+\rho\mu(u_{2t}^3\,v_{2t}^3+u_{1t}^3\,v_{1t}^3+$$
$$+u_{3t}^1\,v_{3t}^1+u_{2t}^1\,v_{2t}^1+u_{3t}^2\,v_{3t}^2+u_{1t}^2\,v_{1t}^2)+\rho(\lambda+\mu)(u_{3t}^1\,v_{1t}^3+$$
$$+u_{3t}^3\,v_{{}_{\imath}t}^1+u_{3t}^2\,v_{2t}^3+u_{2t}^1\,v_{1t}^2+u_{2t}^2\,v_{1t}^1+u_3{}^2{}_t{}^3v_{2t})\}\,dx+$$
$$+\int_S\Big\{\Big(\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{R_1}+\frac{\mu^2}{R_2}\Big)u_n^1\,v_n^1+\Big(\frac{\mu^2}{R_1}+\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{R_2}\Big)u_n^2\,v_n^2+$$
$$+\mu(\lambda+2\mu)\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)u_n^3\,v_n^3\Big\}\,ds;\ \frac{1}{R_j}=-P_{jj}=-\frac{\partial^2x_3(x_2x_1)}{\partial x^2{}_j}.$$

Интегралы $I_1(\vec{u}, \vec{v})$ и $I_1^{\bullet}(\vec{u}, \vec{v})$ совпадают с классическим интегралом энергии (отличаются лишь на интеграл нулевого класса). Интеграл $I_2(\vec{u}, \vec{v})$ был найден в дипломной работе И. Ф. Павловой, выполненной под руководством автора.

Непосредственно дифференцированием по t, подстановкой u_{tt}^k вместо ρ правых частей уравнений (1.4), затем интегрированием по частям, а также использованием контурных тождеств задачи можно убедиться в том, что выписанные выражения действительно сохраняют постоянное значение во времени.

Рассмотрим электромагнитные волны в конечной пустой трехмерной области D произвольной формы (односвязной или многосвязной), ограниченной металлической поверхностью S с идеальной проводимостью.

В классической электродинамике совершенно не рассматривается взаимодействие поля тяготения и электромагнитного поля, поэтому все дальнейшие вычисления имеют в виду пустое галилеево пространство, отнесенное к декартовым координатам x_1, x_2, x_3, $x_4 = t$ (скорость света принимается за единицу). В дальнейшем $'x_1$, $'x_2$, $'x_3$ означают специальные координаты, именно $'x_3$ направлено по внешней нормали к S, а $'x_1$, $'x_2$ — по направлению линий главных кривизн в касательной плоскости. Вообще штрихованными буквами мы будем обозначать соответствующие величины, отнесенные к специальной системе координат.

Рассмотрим трехмерный вектор N с проекциями на оси $'x_1$, $'x_2$, $'x_3$, равными

$$'N_1 = P_1 = \frac{\partial' x_3 ('x_1 'x_2)}{\partial' x_1},$$

$$'N_2 = P_2 = \frac{\partial' x_3 ('x_1 'x_2)}{\partial' x_2},$$

$$'N_3 = -1.$$

Внутри области D должны выполняться классические уравнения Максвелла, а на поверхности S, вследствие идеальной проводимости, касательные $'E^1$, $'E^2$ электрического поля E и нормальная составляющая $'H^3$ магнитного поля H должны обращаться в ноль. Таким образом, для области D ставится следующая краевая задача:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \operatorname{rot} H \\ -\frac{\partial H}{\partial t} &= \operatorname{rot} E \\ \operatorname{div} E &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{внутри } D; \tag{M}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{'E^1}{'N_1} = \frac{'E^2}{'N_2} &= \frac{'E^3}{'N_3}, \\ (H, N)_s &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{на } S. \tag{M$_S$}$$

Пограничные условия мы запишем в виде следующих равенств, легко получаемых преобразованием (M_S) и последующим дифференцированием полученных при этом тождеств:

$$('E^2 + 'E^3 P_2)_S \equiv 0, \quad ('E^1 + 'E^3 P_1)_S \equiv 0,$$

$$(H_1 N)_S = ('H^1 P_1 + 'H^2 P_2 - 'H^3)_S \equiv 0;$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial' E^2}{\partial' x_j} + \frac{\partial' E^2}{\partial' x_3} P_j + \frac{\partial' E^3}{\partial' x_j} P_2 + \frac{\partial' E^3}{\partial' x_3} P_2 P_j + 'E^3 P_{2j} \equiv 0, \\ &\frac{\partial' E^1}{\partial' x_j} + \frac{\partial' E^1}{\partial' x_3} P_j + \frac{\partial' E^3}{\partial' x_j} P_1 + \frac{\partial' E^3}{\partial' x_3} P_1 P_j + 'E^3 P_{1j} \equiv 0, \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2)$$

$$\frac{d}{\partial x_j}(H, N) = \left(\frac{\partial H}{\partial' x_j}, N\right) + \left(H, \frac{\partial N}{\partial' x_j}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial' x_3}, N\right) P_j \equiv 0.$$

Здесь имеется в виду специальная система координат, определенная выше. Переходя в начало координат, где $P_1 = P_2 = 0$, $P_{jj} = \frac{-1}{R_i}$, получим равенства:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial' E^1}{\partial' x_1} = -'E^3 P_{11} = \frac{'E^3}{R}, \quad \frac{\partial' E^2}{\partial' x_2} = \frac{'E^3}{R_2} = \frac{E}{R_2}, \\ &\frac{\partial' H^3}{\partial' x_j} = 'H^j P_{jj}, \quad \frac{\partial' H^j}{\partial' x_3} = \frac{\partial' H^3}{\partial' x_j} = \frac{-'H^j}{R_j}, \quad j = 1, 2; \\ &\frac{\partial' E^3}{\partial' x_3} = -\frac{\partial' E'}{\partial' x_1} - \frac{\partial' E^2}{\partial' x_2} = -E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -EK. \end{aligned} \qquad (M_S{}^0)$$

Пользуясь зависимостями $(M_S{}^0)$, нетрудно непосредственным дифференцированием по времени и последующим интегрированием по частям убедиться, что, наряду с классическим интегралом энергии $\mathcal{E}_1$, выражение

$$\mathcal{E}_2 = \int_D \sum_{k,l=1}^{3} \left(\frac{\partial H^l}{\partial x_k} \frac{\partial H^l}{\partial x_k} + \frac{\partial E^l}{\partial x_k} \frac{\partial E^l}{\partial x_k}\right) dx +$$

$$+ \int_S \left(KEE + \sum_{j=1}^{2} \frac{'H^j\, 'H^j}{R_j}\right) ds$$

будет также сохранять постоянное значение во времени. Заметим, что $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ являются независимыми постоянными задачи, в частности, $\mathcal{E}_1$ можно фиксировать, а $\mathcal{E}_2$ изменять по произволу за счет выбора начального возбуждения.

Дальнейшие исследования автора будут посвящены приложениям интегралов высших порядков, имеющих характер дополнительных к классическим законам сохранения. В частности, из интеграла $\mathcal{E}_2$ будут извлечены следствия.

Поступило
16. XI. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Волков Д. М., Билинейные интегралы линейных гиперболических задач, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 75—90.

[2] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, М.— Л., 1945.

[3] Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Л.— М., 1937.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 279—296

З. И. КОЗЛОВА

РАСЩЕПЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ B-МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

Работа непосредственно примыкает к предыдущим статьям автора (1), (2).

Рассматривается вопрос о расщеплении плоского B-множества $H \subset I_{xy}$, пересекаемого параллелями к оси ординат P_x по множествам абсолютно первого класса и подкласса не выше $\alpha < \Omega$, в трансфинитную сумму непересекающихся слагаемых H_ξ, являющихся B-множествами, для которых все множества $P_x H_\xi$ компактны.

Мы будем рассматривать множества, лежащие в пространстве произведений двух бэровских пространств $I_{xy} = I_x \times I_y$, которое в дальнейшем будем называть плоскостью.

Для каждого плоского множества $H \subset I_{xy}$ мы будем рассматривать семейство всех линейных множеств $P_x \cdot H$, где P_x обозначает множество всех точек плоскости с постоянной абсциссой x. Нас будут интересовать некоторые взаимоотношения между свойствами плоского множества H и свойствами всех его сечений $P_x \cdot H$, а именно: в том случае, когда множество H является плоским B-множеством, а все множества $P_x \cdot H$ представимы в виде трансфинитной суммы непересекающихся слагаемых некоторой специальной природы,

$$P_x \cdot H = \sum_{\xi<\alpha} U_\xi, \tag{1}$$

где $\alpha < \Omega$ и не зависит от x, можно ли представить H в виде трансфинитной суммы непересекающихся слагаемых H_ξ,

$$H = \sum_{\xi<\alpha} H_\xi,$$

с тем же значением α, где каждое из слагаемых H_ξ является B-множеством, а все суммы

$$\sum_{\xi<\alpha} P_x \cdot H_\xi$$

той же природы, что и суммы (1)?

Задачи такого рода получили название задач о *расщеплении* B-множеств.

Первый результат в этом направлении был получен Н. Н. Лузиным:

Всякое плоское B-множество H, для которого все множества $P_x \cdot H$ состоят не более, чем из счетного числа точек (имеют мощность $\aleph_0$),

расщепляется на счетное множество униформных B-кривых так, что из двух кривых этого семейства всегда одна лежит под другой [([3]), стр. 244].

В том случае, когда множества $P_x \cdot H$ состоят из конечного, но, быть может, неограниченного числа точек, возможность расщепления плоского B-множества H на счетное число униформных B-кривых

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \ldots, \quad y = \varphi_n(x), \ldots$$

таких, что кривая $y = \varphi_n(x)$ всегда лежит выше кривой $y = \varphi_m(x)$, когда $n > m$, была доказана А. А. Ляпуновым ([4]).

В случае, когда все множества $P_x \cdot H$ являются вполне упорядоченными вверх множествами порядка $< \alpha$, где $\alpha < \Omega$, возможность расщепления плоского B-множества H на вполне упорядоченное вверх семейство униформных B-кривых того же порядка была доказана мной ([1]).

В случае, когда все множества $P_x \cdot H$ являются рассеянными * множествами порядка $< \alpha$, где $\alpha < \Omega$, возможность расщепления плоского B-множества H на рассеянное семейство униформных B-кривых того же порядка, если α — трансфинитное число второго рода, и порядка $\alpha - 1$, если α — трансфинитное число первого рода, была доказана мной ([1]).

Целью настоящей статьи является продолжение работы по изучению расщеплений плоских B-множеств. Нас будет интересовать тот случай, когда все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса ** подкласса не выше α, где $\alpha < \Omega$. Мы покажем, что расщепление плоского B-множества H в трансфинитную сумму непересекающихся слагаемых H_ξ, являющихся B-множествами, для которых все множества $P_x \cdot H_\xi$ компактны, в этом случае имеет место.

Бэровские пространства I_x и I_y мы будем считать соответственно множествами всех иррациональных точек эвклидовых пространств J_x и J_y, как это делается обычно.

Пусть $E \equiv E^{\{0\}}$ есть линейное множество абсолютно первого класса. Если α — трансфинитное число первого рода, то обозначим через $E^{\{\alpha\}}$ множество, которое получается из множества $E^{\{\alpha-1\}}$ путем выбрасывания всех его компактных порций; если α — трансфинитное число второго рода, то положим

$$E^{\{\alpha\}} = \prod_{\alpha' < \alpha} E^{\{\alpha'\}}.$$

Наименьшее число β такое, что

$$E^{\{\beta\}} = 0,$$

называется *подклассом* множества E.

Будем рассматривать плоские B-множества H, для которых все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса.

---

* *Рассеянным* множеством называется всякое множество точек, не имеющее плотного в себе подмножества.

** Т. е. такое, что всякий его гомеоморф также первого класса.

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что все подклассы множеств $P_x \cdot H$ меньше α, когда x пробегает I_x, назовем *порядком* множества H.

Известно существование плоских B-множеств порядка Ω [(5), стр. 422].

Пусть $H \equiv H^{\{0\}}$. Обозначим через $H^{\{\alpha\}}$ множество, образованное всеми точками $(P_x \cdot H)^{\{\alpha\}}$, когда x пробегает I_x.

ЛЕММА. *Если $H \subset I_{xy}$ есть плоское B-множество, для которого все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса, то и $H^{\{\alpha\}}$ есть B-множество при всех $\alpha < \Omega$.*

Доказательство. Пусть $H \equiv H^{\{0\}}$ есть плоское B-множество, для которого все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса.

Допустим, что построены плоские множества $H^{\{\beta\}}$, являющиеся B-множествами при всех $\beta < \alpha$, где α — трансфинитное число первого рода.

Так как бэровское пространство I_{xy} мы рассматриваем как часть эвклидовского пространства J_{xy}, то мы можем рассматривать H как B-множество пространства J_{xy}.

Множество всех точек пространства J_{xy}, имеющих постоянную абсциссу x, обозначим через $\overline{P}_x$. Так как все линейные множества $P_x \cdot H^{\{\alpha-1\}}$ являются множествами абсолютно первого класса, т. е. одновременно абсолютными F_σ и G_δ, то и множества $\overline{P}_x \cdot H^{\{\alpha-1\}}$ будут одновременно абсолютными F_σ и G_δ. На основании теорем П. С. Новикова (6) и В. Я. Арсенина (7), замыкание множества $H^{\{\alpha-1\}}$ в пространстве J_{xy} вдоль оси OY, $(H^{\{\alpha-1\}})^y_J$, будет B-множеством. Тогда B-множество

$$(H^{\{\alpha-1\}})^y_J - H^{\{\alpha-1\}}$$

в пространстве J_{xy} будет иметь каждое из линейных множеств $\overline{P}_x[(H^{\{\alpha-1\}})^y_J - H^{\{\alpha-1\}}]$ множеством F_σ при любом x, как разность между замкнутым множеством $\overline{P}_x(H^{\{\alpha-1\}})^y_J$ и множеством $\overline{P}_x \cdot H^{\{\alpha-1\}}$, являющимся абсолютным G_δ. На основании теоремы В. Я. Арсенина (7),

$$L^{\{\alpha-1\}} = \Pi_x[(H^{\{\alpha-1\}})^y_J - H^{\{\alpha-1\}}]$$

в пространстве J_{xy} будет B-множеством, а следовательно, $L^{\{\alpha-1\}}$ будет B-множеством и в пространстве I_{xy}. Образуем теперь в пространстве I_{xy} B-множество

$$V_1^{\{\alpha-1\}} = (L^{\{\alpha-1\}} \times I_y) \cdot H^{\{\alpha-1\}},$$

которое в пространстве J_{xy} будет иметь все множества $\overline{P}_x \cdot V_1^{\{\alpha-1\}}$ незамкнутыми множествами абсолютно первого класса.

B-множество

$$\mathscr{E}_0^{\{\alpha-1\}} = H^{\{\alpha-1\}} - V_1^{\{\alpha-1\}} = (CL^{\{\alpha-1\}} \times I_y) \cdot H^{\{\alpha-1\}}$$

в пространстве I_{xy} будет иметь все линейные множества $P_x \cdot \mathscr{E}_0^{\{\alpha-1\}}$ замкнутыми множествами абсолютно первого класса, так как в точках

$x \in CL^{\{\alpha-1\}}$ B-множество $H^{\{\alpha-1\}}$ пересекается параллелями оси OY по замкнутым множествам абсолютно первого класса относительно обоих пространств I_y и J_y.

Допустим, что построены B-множества $\mathscr{E}_{k-1}^{\{\alpha-1\}}$ и $V_k^{\{\alpha-1\}}$ для всех $k \leqslant n$, для которых линейные множества $P_x \cdot \mathscr{E}_{k-1}^{\{\alpha-1\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ являются замкнутыми множествами абсолютно первого класса относительно пространства I_{xy}, а $\overline{P}_x \cdot V_k^{\{\alpha-1\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ являются незамкнутыми множествами абсолютно первого класса относительно пространства J_{xy}.

Рассмотрим B-множество

$$V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}} = V_n^{\{\alpha-1\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Поместим это множество в пространство J_{xy}. Так как линейные множества $P_x \cdot V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}$ являются множествами абсолютно первого класса, т. е. одновременно абсолютными F_σ и G_δ, то и множества $\overline{P}_x \cdot V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}$ в пространстве J_{xy} будут множествами абсолютно первого класса. Тогда, на основании теорем П. С. Новикова (6) и В. Я. Арсенина (7), замыкание множества $V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}$ в пространстве J_{xy} вдоль оси OY, $(V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}})_J^y$, будет B-множеством и, значит, B-множество

$$(V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}})_J^y - V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}$$

в пространстве J_{xy} будет иметь каждое из линейных множеств

$$\overline{P}_x \cdot [(V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}})_J^y - V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}]$$

множеством F_σ при любом x, как разность между замкнутым множеством $\overline{P}_x (V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}})_J^y$ и множеством $\overline{P}_x \cdot V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}$, являющимся абсолютным G_δ. На основании теоремы В. Я. Арсенина (7),

$$L_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}} = \Pi_x \left[(V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}})_J^y - V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}\right]$$

в пространстве J_{xy} будет B-множеством, а следовательно, $L_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}$ будет B-множеством и в пространстве I_{xy}. Образуем в пространстве I_{xy} B-множество

$$V_{n+1;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}} = (L_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \cdot V_n^{\{\alpha-1\}},$$

которое в пространстве J_{xy} будет иметь все множества $\overline{P}_x \cdot V_{n+1;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}$ незамкнутыми множествами абсолютно первого класса.

B-множество

$$\mathscr{E}_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}} = V_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}} - V_{n+1;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}} = (CL_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \cdot V_n^{\{\alpha-1\}}$$

в пространстве I_{xy} будет иметь все линейные множества $P_x \cdot \mathscr{E}_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}^{\{\alpha-1\}}$ замкнутыми множествами абсолютно первого класса, так как в точках

$x \subset CL^{\{\alpha-1\}}_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}$ B-множество $V^{\{\alpha-1\}}_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n}$ пересекается параллелями оси OY по замкнутым множествам абсолютно первого класса относительно обоих пространств.

Пусть теперь

$$\mathscr{E}_n^{\{\alpha-1\}} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \mathscr{E}^{\{\alpha-1\}}_{n;\, i_1 i_2 \ldots i_n} \quad \text{и} \quad V^{\{\alpha-1\}}_{n+1} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} V^{\{\alpha-1\}}_{n+1;\, i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Рассмотрим систему B-множеств

$$H^{\{\alpha-1\}} \equiv V_0^{\{\alpha-1\}} \supset V_1^{\{\alpha-1\}} \supset \ldots \supset V_n^{\{\alpha-1\}} \supset \ldots.$$

Положим

$$V^{\{\alpha-1\}} = \prod_{n=0}^{\infty} V_n^{\{\alpha-1\}}.$$

B-множество $V^{\{\alpha-1\}}$ не содержит точек, принадлежащих изолированным компактным подмножествам множеств $P_x \cdot H^{\{\alpha-1\}}$. Действительно, если точка $q(x_0, y_0)$ принадлежит некоторому изолированному компактному подмножеству множества $P_{x_0} \cdot H^{\{\alpha-1\}}$, то найдется такая полоса Бэра m-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_m} \ni q(x_0, y_0)$, что $P_{x_0} \cdot H^{\{\alpha-1\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ будет компактной порцией множества $P_{x_0} \cdot H^{\{\alpha-1\}}$. Это значит, что

$$q(x_0, y_0) \,\overline{\in}\, V^{\{\alpha-1\}}_{m+1;\, i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

Следовательно

$$q(x_0, y_0) \,\overline{\in} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} V^{\{\alpha-1\}}_{m+1;\, i_1 i_2 \ldots i_m} = V^{\{\alpha-1\}}_{m+1},$$

откуда

$$q(x_0, y_0) \,\overline{\in} \prod_{n=0}^{\infty} V_n^{\{\alpha-1\}} = V^{\{\alpha-1\}}.$$

Рассмотрим теперь B-множество $\mathscr{E}_0^{\{\alpha-1\}}$. Пусть

$$\Gamma_{i_1}^{\{\alpha-1\}} = \Pi_x\left(\mathscr{E}_0^{\{\alpha-1\}} \cdot I_{i_1}\right).$$

Это будет B-множество, так как $P_x \cdot \mathscr{E}_0^{\{\alpha-1\}}$ есть множество абсолютно первого класса, т. е. абсолютное F_σ.

Возьмем

$$S^{\{\alpha-1\}} = \overline{\lim_{i_1}}\, \Gamma_{i_1}^{\{\alpha-1\}}$$

и построим B-множество

$$M_1^{\{\alpha-1\}} = \left(S^{\{\alpha-1\}} \times I_y\right) \cdot \mathscr{E}_0^{\{\alpha-1\}},$$

которое будет пересекаться параллелями оси OY по множествам, точки которых содержатся в бесконечном числе полос первого ранга I_{i_1}, в то время как $CM_1^{\{\alpha-1\}} \cdot \mathscr{E}_0^{\{\alpha-1\}}$ будет пересекаться параллелями оси OY по множествам, точки которых содержатся лишь в конечном числе полос первого ранга I_{i_1}.

Допустим, что построены множества $M_k^{\{\alpha-1\}}$ для всех $k \leqslant n$, где любое из множеств $M_k^{\{\alpha-1\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ пересекается параллелями оси OY

по множествам, точки которых содержатся в бесконечном числе полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$.

Рассмотрим B-множество

$$\sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}.$$

Пусть

$$\Gamma^{\{\alpha-1\}}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n} = \Pi_x\left[\left(\sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}\right) \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}\right].$$

Это будет B-множество, так как $P_x \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$ есть множество абсолютно первого класса, т. е. абсолютное F_σ.

Возьмем

$$S^{\{\alpha-1\}}_{i_1 i_2 \dots i_n} = \overline{\lim_{i_{n+1}}}\, \Gamma^{\{\alpha-1\}}_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$$

и построим B-множество

$$M^{\{\alpha-1\}}_{n+1;\, i_1 i_2 \dots i_n} = \left(S^{\{\alpha-1\}}_{i_1 i_2 \dots i_n} \times I_{i_1 i_2 \dots i_n}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}},$$

которое будет пересекаться параллелями оси OY по множествам, точки которых содержатся в бесконечном числе полос $(n+1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$, подчиненных полосе n-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$, в то время как

$$CM^{\{\alpha-1\}}_{n+1;\, i_1 i_2 \dots i_n} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$$

будет пересекаться параллелями оси OY по множествам, точки которых содержатся лишь в конечном числе полос $(n+1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$, подчиненных полосе n-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

B-множество

$$M^{\{\alpha-1\}}_{n+1} = \sum_{i_1 i_2, \dots, i_n} M^{\{\alpha-1\}}_{n+1;\, i_1 i_2 \dots i_n}$$

будет характеризоваться тем, что каждое из множеств $M^{\{\alpha-1\}}_{n+1} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_n}$ пересекается параллелями оси OY по множествам, точки которых содержатся в бесконечном числе полос $(n+1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$, подчиненных полосе n-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$, в то время как

$$CM^{\{\alpha-1\}}_{n+1} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$$

пересекается параллелями оси OY по множествам, точки которых содержатся лишь в конечном числе полос $(n+1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$, подчиненных полосе n-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

Множество

$$M^{\{\alpha-1\}} = \overline{\lim_{n}}\, M_n^{\{\alpha-1\}}$$

будет B-множеством, получаемым из множества $\sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$ путем уда-

ления с каждого перпендикуляра P_x всех изолированных компактных порций множества $P_x \cdot H^{\{\alpha-1\}}$. Действительно, если

$$q(x_0, y_0) \in H^{\{\alpha-1\}} \cdot C(M^{\{\alpha-1\}} + V^{\{\alpha-1\}}),$$

то

$$q(x_0, y_0) \in H^{\{\alpha-1\}} \cdot CV^{\{\alpha-1\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}},$$

где $\mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}} \cdot \mathscr{E}_r^{\{\alpha-1\}} = 0$ при $k \neq r$, а значит, $q(x_0, y_0)$ принадлежит некоторому множеству $\mathscr{E}_s^{\{\alpha-1\}}$ и

$$q(x_0, y_0) \in CM^{\{\alpha-1\}} = C\, \overline{\lim_n}\, M_n^{\{\alpha-1\}} = \underline{\lim_n}\, CM_n^{\{\alpha-1\}},$$

и, следовательно,

$$q(x_0, y_0) \in CM_n^{\{\alpha-1\}}$$

при $n \geqslant m$, где m — некоторое натуральное число. Если $s < m$, то

$$q(x_0, y_0) \in \mathscr{E}_s^{\{\alpha-1\}} \subset \sum_{k=0}^{m-1} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}} \quad \text{и} \quad q(x_0, y_0) \in CM_m^{\{\alpha-1\}}.$$

Это значит, что на прямой P_{x_0} в каждой полосе $(n-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \ni q(x_0, y_0)$ множество $P_{x_0} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$ состоит из точек, принадлежащих лишь конечному числу подчиненных полос n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$ при всех $n \geqslant m$. Следовательно,

$$P_{x_0} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$$

является компактным подмножеством множества $P_{x_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$, а значит, и множества $P_{x_0} \cdot H^{\{\alpha-1\}}$. Если $s \geqslant m$, то

$$q(x_0, y_0) \in \mathscr{E}_s^{\{\alpha-1\}} \subset \sum_{k=0}^{s} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}} \quad \text{и} \quad q(x_0, y_0) \in CM_{s+1}^{\{\alpha-1\}}.$$

Это значит, что на прямой P_{x_0} в каждой полосе $(n-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \ni q(x_0, y_0)$ множество $P_{x_0} \cdot \sum_{k=0}^{s} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$ состоит из точек, принадлежащих лишь конечному числу подчиненных полос n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$ при всех $n > s \geqslant m$. Следовательно,

$$P_{x_0} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_s} \cdot \sum_{k=0}^{s} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$$

является компактным подмножеством множества $P_{x_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}_k^{\{\alpha-1\}}$, а значит и множества $P_{x_0} \cdot H^{\{\alpha-1\}}$. Если же точка

$$p(x_1, y_1) \subset M^{\{\alpha-1\}} = \overline{\lim_n} M_n^{\{\alpha-1\}},$$

то это означает, что $p(x_1, y_1) \in M_n^{\{\alpha-1\}}$ при бесконечном числе значений n, например, $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$. Следовательно, в каждой полосе (n_k-1)-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n_k-1}} \ni p(x_1, y_1)$ точки множества $P_{x_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}_k$ содержатся в бесконечном числе подчиненных полос n_k-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n_k-1} i_{n_k}}$. Значит, точка $p(x_1, y_1)$ не попадает ни в одну из изолированных компактных порций множества $P_{x_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}_k$, а следовательно, и множества $P_{x_1} \cdot H^{\{\alpha-1\}}$. Тогда множество $H^{\{\alpha\}} = M^{\{\alpha-1\}} + V^{\{\alpha-1\}}$ будет B-множеством, полученным из множества $H^{\{\alpha-1\}}$ путем удаления с каждого перпендикуляра P_x всех изолированных компактных порций множества $P^x \cdot H^{\{\alpha-1\}}$.

Если построены все плоские множества $H^{\{\beta\}}$, являющиеся B-множествами при всех $\beta < \alpha$, где α — трансфинитное число второго рода, то множество

$$H^{\{\alpha\}} = \prod_{\beta<\alpha} H^{\{\beta\}}$$

есть также B-множество, что и требовалось доказать.

Пусть U есть семейство плоских B-множеств N_ξ,

$$U = \{N_\xi\},$$

для которых все множества $P_x \cdot N_\xi$ компактны.

B-множество N_ξ назовем *изолированным* множеством этого семейства, если для всякого значения $x_0 \in I_x$ найдется некоторый интервал $(y_\xi'(x_0), y_\xi''(x_0))$ на прямой P_{x_0}, содержащий $P_{x_0} \cdot N_\xi$ и не содержащий ни одной точки ни одного из множеств $N_{\xi'}$ при $\xi' \neq \xi$, а семейство множеств $N_{\xi'}$, лежащих в области $(\Pi_x N_\xi) \times I_y$, либо целиком распадается на две части множеств, лежащих выше и ниже N_ξ, либо некоторые из множеств $N_{\xi'}$ при $\xi' \neq \xi$ распадаются на две части, одна из которых лежит выше, а другая ниже B-множества N_ξ, причем каждая из этих частей также пересекается параллелями оси OY по компактным множествам.

Счетное семейство B-множеств N_ξ,

$$U = \{N_\xi\},$$

для которых все множества $P_x N_\xi$ компактны, назовем *рассеянным семейством* множеств, если в каждом его подсемействе по крайней мере одно множество оказывается изолированным.

Пусть $U \equiv U^{\{0\}}$ есть рассеянное семейство B-множеств N_ξ, для которых линейные множества $P_x \cdot N_\xi$ компактны. Если определены все семейства

множеств $U^{\{\beta\}}$ для $\beta < \alpha$, где α — трансфинитное число первого рода, то обозначим через $U^{\{\alpha\}}$ семейство всех неизолированных множеств N_ξ семейства $U^{\{\alpha-1\}}$; если же α — трансфинитное число второго рода, то положим

$$U^{\{\alpha\}} = \prod_{\beta<\alpha} U^{\{\beta\}}.$$

Так как U есть рассеянное семейство B-множеств N_ξ, то существует такое число $\alpha < \Omega$, что

$$U^{\{\alpha\}} = 0.$$

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что $U^{\{\alpha\}} = 0$, назовем *порядком* рассеянного семейства B-множеств U.

ТЕОРЕМА. *Всякое плоское B-множество $H \subset I_{xy}$, для которого все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса, порядка $\alpha < \Omega$, можно расщепить на рассеянное семейство плоских B-множеств N_ξ, для которых все множества $P_x \cdot N_\xi$ компактны, того же порядка α, если α — трансфинитное число второго рода, и порядка $\alpha - 1$, если α — трансфинитное число первого рода.*

Доказательство. Пусть $H \subset I_{xy}$ есть плоское B-множество, для которого все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса, порядка $\alpha < \Omega$.

Применим метод трансфинитной индукции. Достаточно показать, что теорема верна для

1) $\alpha = 2$,
2) $\alpha = \alpha^* + n$, где $n \geqslant 2$, α^* — трансфинитное число второго рода,
3) α — трансфинитное число второго рода,
4) $\alpha = \alpha^* + 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода.

Пусть $\alpha = 2$. Это значит, что B-множество $H^{\{1\}} = 0$, где $H^{\{1\}}$ получается из множества $H \equiv H^{\{0\}}$ путем удаления с каждого перпендикуляра P_x всех изолированных компактных подмножеств множества $P_x \cdot H$. Таким образом, каждое из множеств $P_x \cdot H$ является суммой изолированных друг от друга компактных множеств.

Согласно лемме,

$$H^{\{1\}} = M^{\{0\}} + V^{\{0\}} = 0,$$

откуда следует, что

$$M^{\{0\}} = 0 \text{ и } V^{\{0\}} = 0.$$

Но B-множество

$$V^{\{0\}} = \prod_{n=0}^{\infty} V_n^{\{0\}},$$

где B-множество $V_n^{\{0\}} \subset H^{\{0\}}$, характеризуется тем, что каждое его линейное множество $\overline{P}_x \cdot V_n^{\{0\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ в пространстве J_{xy} представляет собой незамкнутое множество абсолютно первого класса. Так как

$$H^{\{0\}} \cdot CV_n^{\{0\}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{E}_k^{\{0\}},$$

где $\mathscr{E}_k^{\{0\}}$ характеризуется тем, что каждое его линейное множество $P_x \cdot \mathscr{E}_k^{\{0\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ является замкнутым множеством абсолютно первого класса, то

$$H \equiv H^{\{0\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}_k^{\{0\}}.$$

B-множество $M^{\{0\}} = \overline{\lim}\, M_n^{\{0\}}$, где B-множество $M_n^{\{0\}} = H^{\{0\}}$ характеризуется тем, что каждое его множество $M_n^{\{0\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ пересекается параллелями оси OY по множествам, точки которых содержатся в бесконечном числе полос n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$, подчиненных полосе $(n-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, в то время как $CM_n^{\{0\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{E}_k^{\{0\}}$ пересекается параллелями оси OY по множествам, точки которых содержатся лишь в конечном числе полос n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$, подчиненных полосе $(n-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$.

Следовательно,

$$M^{\{0\}} = \overline{\lim_n}\, M_n^{\{0\}} = (M_1^{\{0\}} + M_2^{\{0\}} + M_3^{\{0\}} + \cdots) \cdot (M_2^{\{0\}} + M_3^{\{0\}} + \cdots) \cdot$$

$$\cdot (M_3^{\{0\}} + \cdots) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} K_n = 0,$$

где B-множество $K_n = \sum_{k=n}^{\infty} M_k^{\{0\}}$ получается из множества H путем удаления с каждого перпендикуляра P_x всех порций $P_x \cdot H \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}$ при $m \geqslant n$, точки которых в каждой полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ содержатся в конечном числе подчиненных полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$ при всех $k \geqslant n$. Тогда

$$\Pi_x K_n = \sum_{k=n}^{\infty} \Pi_x M_k^{\{0\}}$$

будет B-множеством при всех значениях n.

Пусть

$$L_1 = \Pi_x K_1, \quad E_0 = \Pi_x \mathscr{E}_0^{\{0\}}.$$

Построим плоское B-множество

$$W_0 = (CL_1 \cdot E_0) \times I_y.$$

B-множество

$$N_0 = W_0 \cdot H = W_0 \cdot \mathscr{E}_0^{\{0\}}$$

таково, что все его линейные множества $P_x \cdot N_0$ компактны, так как они замкнуты и в полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ их точки содержатся

лишь в конечном числе подчиненных полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$ при всех натуральных значениях k.

Множество N_0 образует семейство B-множеств $\mathfrak{N}_0$:

$$\mathfrak{N}_0 = \{N_0\}.$$

Допустим, что из B-множества H выделены семейства B-множеств

$$\mathfrak{N}_k = \{N_k^{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$$

для всех $k < n$, линейные множества которых $P_x \cdot N_k^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ компактны, каждое из множеств $N_k^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ изолировано, так как

$$N_k^{i_1 i_2 \ldots i_k} \subset W_k^{i_1 i_2 \ldots i_k} = (L_k^{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \cdot CL_{k+1}^{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k} \cdot E_k^{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}) \times I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k},$$

причем плоское B-множество $W_k^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ никаких других точек множества H, кроме множества $N_k^{i_1 i_2 \ldots i_k}$, не содержит, а

$$L_{k+1}^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \Pi_x (K_{k+1} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_k}),$$

$$E_k^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \Pi_x \left(I_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot \sum_{m=0}^{k} \mathscr{E}_m^{\{0\}} \right).$$

Пусть

$$L_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Pi_x (K_{n+1} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}),$$

$$E_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Pi_x \left(I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k^{\{0\}} \right).$$

Так как $K_n \supset K_{n+1}$, то

$$L_n^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \supset L_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}.$$

Построим плоское B-множество

$$W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = (L_n^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \cdot CL_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} \cdot E_n^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}) \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}.$$

B-множество

$$N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot H = W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k^{\{0\}}$$

таково, что все линейные множества $P_x \cdot N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ компактны, так как они замкнуты, и в полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ их точки содержатся лишь в конечном числе подчиненных полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$ при всех $k \geqslant n+1$.

Множества $N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ образуют семейство изолированных друг от друга B-множеств

$$\mathfrak{N}_n = \{N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$$

при переменных значениях $i_1, i_2, \ldots, i_n$ и постоянном значении n, так как $N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, а $W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ никаких других точек множества H, кроме $N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, не содержит и

$$W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot W_n^{i_1' i_2' \ldots i_n'} = 0,$$

хотя бы при одном $i_k \neq i_k'$.

Так как B-множество H таково, что каждое его линейное множество $P_x \cdot H$ является суммой изолированных друг от друга компактных множеств, т. е.

$$\prod_{n=1}^{\infty} K_n = 0,$$

$$H \equiv H^{\{0\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}_k^{\{0\}},$$

то множество H расщепляется на счетное число B-множеств $N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$,

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{N}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n; n} N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

линейные множества которых $P_x \cdot N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ компактны, каждое из множеств $N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ изолировано, так как

$$N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} =$$
$$= (L_n^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \cdot CL_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} \cdot E_n^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}) \times I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n},$$

а множество $W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ никаких других точек множества H, кроме $N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, не содержит и

$$W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot W_m^{i'_1 i'_2 \ldots i'_m} = 0$$

при $n \neq m$ или хотя бы при одном $i_k = i'_k$, если $n = m$.

Следовательно, семейство B-множеств $\{N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$ образует рассеянное семейство B-множеств, линейные множества которых $P_x \cdot N_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ компактны, порядка 1.

Таким образом, для $\alpha = 2$ теорема верна.

Пусть $\alpha = \alpha^* + n$, где $n \geqslant 2$, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна.

Множество $H^{\{\alpha-1\}} = 0$, а B-множество $H^{\{\alpha-2\}}$ имеет порядок, равный 2. Так как теорема верна для $\alpha = 2$, то множество $H^{\{\alpha-2\}}$ расщепляется на рассеянное семейство B-множеств $\{N_n\}$, для которых все линейный множества $P_x \cdot N_n$ компактны, порядка 1.

Так как проекция на ось OX B-множества N_n, для которого все линейные множества $P_x N_n$ компактны, есть B-множество, то из теоремы Мазуркевича* [(3), стр. 282] следует, что множество низших точек B-множества N_n есть униформное B-множество.

Рассмотрим B-множество N_1. Множество всех низших точек L_1^1 множества N_1 будет униформным B-множеством так же, как и множество его высших точек L_2^1. Пусть уравнения L_1^1 и L_2^1 соответственно будут

$$y = \varphi_1(x) \quad \text{и} \quad y = \varphi_2(x),$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определены на $\Pi_x N_1$. Проведем внутри B-множества N_1 кривую L_3^1, имеющую уравнение

$$y = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2}.$$

* Теорема Мазуркевича: Множество всех низших точек плоского B-множества H есть аналитическое дополнение, униформное относительно оси OX.

Часть B-множества N_1, заключенная в замкнутой полосе, ограниченной кривыми $L_1{}^1$ и $L_3{}^1$ (соответственно $L_3{}^1$ и $L_2{}^1$), будет также B-множеством $N_1{}^1$ (соответственно $N_2{}^1$), для которого все множества $P_x \cdot N_1{}^1$ (соответственно $P_x \cdot N_2{}^1$) компактны.

Пусть $L_4{}^1$ есть множество всех высших точек множества $N_1{}^1$ и $L_5{}^1$ есть множество всех низших точек множества $N_2{}^1$. Пусть их уравнения соответственно будут

$$y = \varphi_4(x) \quad \text{и} \quad y = \varphi_5(x).$$

Часть плоскости I_{xy}, заключенная между B-кривыми $L_4{}^1$ и $L_5{}^1$, определенными на множестве $\Pi_x N_1$, будет B-множеством, не содержащим точек B-множества N_1. Обозначим это B-множество через $B_1{}^1$.

К B-множествам $N_1{}^1$ и $N_2{}^1$ применим тот же процесс, что и к B-множеству N_1. Получим B-множества $B_2{}^1$ и $B_3{}^1$, не содержащие точек B-множества N_1 и лежащие между кривыми $L_1{}^1$ и $L_2{}^1$, а B-множество N_1 распадется на четыре B-множества $N_{11}{}^1$, $N_{12}{}^1$, $N_{21}{}^1$, $N_{22}{}^1$, между которыми будут расположены соответственно B-множества $B_2{}^1$, $B_1{}^1$, $B_3{}^1$, причем каждое из множеств $N_{\alpha\beta}{}^1$, где $\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$, пересекается параллелями оси OY по компактным множествам.

Применяя к множествам $N_{11}{}^1$, $N_{12}{}^1$, $N_{21}{}^1$, $N_{22}{}^1$ тот же процесс, получим B-множества $B_4{}^1$, $B_5{}^1$, $B_6{}^1$, $B_7{}^1$, не содержащие точек B-множества N_1 и лежащие между кривыми $L_1{}^1$ и $L_2{}^1$.

Если этот процесс продолжить неограниченно, то получим неограниченную (или конечную) последовательность B-множеств

$$B_1{}^1,\ B_2{}^1, \ldots, B_n{}^1, \ldots,$$

совокупность которых образует дополнение множества N_1 по отношению к B-множеству, заключенному в замкнутой полосе, ограниченной кривыми $L_1{}^1$ и $L_2{}^1$.

Обозначим через $H_{11}{}^{\{\alpha-2\}}$ часть множества $H^{\{\alpha-2\}} \cdot (\Pi_x N_1 \times I_y)$, лежащую под B-множеством N_1, и через $H_{12}{}^{\{\alpha-2\}}$ — часть множества $H^{\{\alpha-2\}} \cdot (\Pi_x N_1 \times I_y)$, лежащую над B-множеством N_1. Так как множества $P_x \cdot H_{11}{}^{\{\alpha-2\}}$ и $P_x \cdot H_{12}{}^{\{\alpha-2\}}$ являются множествами абсолютно первого класса, то множество всех высших точек множества $H_{11}{}^{\{\alpha-2\}}$ и множество всех низших точек множества $H_{12}{}^{\{\alpha-2\}}$ будут униформными B-множествами, которые обозначим соответственно через $\Lambda_1{}^1$ и $\Lambda_2{}^1$. Получим два B-множества

$$D_1{}^1 \quad \text{и} \quad D_2{}^1,$$

лежащих соответственно между кривыми $\Lambda_1{}^1$, $L_1{}^1$ и $\Lambda_2{}^1$, $L_2{}^1$, определенными на множестве $\Pi_x N_1$, и не содержащих точек множества $H^{\{\alpha-2\}}$.

Пусть

$$Q_1 = N_1 + \sum_n B_n{}^1 + D_1{}^1 + D_2{}^1.$$

Рассмотрим B-множество N_n. Применяя тот же процесс, что и к множеству N_1, выделим последовательность B-множеств

$$B_1^n, B_2^n, \ldots, B_k^n, \ldots,$$

не содержащую точек B-множества $H^{\{\alpha-2\}}$, совокупность которых образует дополнение множества N_n но отношению к B-множеству, заключенному в замкнутой полосе, ограниченной совокупностью всех низших и всех высших точек множества N_n, которые обозначим соответственно через L_1^n и L_2^n.

Обозначим через $H_{n1}^{\{\alpha-2\}}$ часть B-множества

$$\left(H^{\{\alpha-2\}}+\sum_{k=1}^{n-1} Q_k\right)\cdot(\Pi_x N_n \times I_y),$$

лежащую под B-множеством N_n, и через $H_{n2}^{\{\alpha-2\}}$ — часть множества

$$\left(H^{\{\alpha-2\}}+\sum_{k=1}^{n-1} Q_k\right)\cdot(\Pi_x N_n \times I_y),$$

лежащую над B-множеством N_n. Так как множества $P_x \cdot H_{n1}^{\{\alpha-2\}}$ и $P_x \cdot H_{n2}^{\{\alpha-2\}}$ являются множествами абсолютно первого класса, то множество Λ_1^n всех высших точек множества $H_{n1}^{\{\alpha-2\}}$ и множество Λ_2^n всех низших точек множества $H_{n2}^{\{\alpha-2\}}$ будут униформными B-множествами. Получим два B-множества

$$D_1^n \quad \text{и} \quad D_2^n,$$

лежащих соответственно между B-кривыми Λ_1^n, L_1^n и Λ_2^n, L_2^n, не содержащих точек множества $H^{\{\alpha-2\}}$.

Пусть

$$Q_n = N_n + \sum_k B_k^n + D_1^n + D_2^n.$$

Образуем B-множество

$$R = C\sum_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Тогда

$$CH^{\{\alpha-2\}} = \sum_{k,\,n} B_k^n + \sum_{n=1}^{\infty} D_1^n + \sum_{n=1}^{\infty} D_2^n + R.$$

Множества

$$H \cdot B_k^n, \quad H \cdot D_1^n, \quad H \cdot D_2^n, \quad H \cdot R$$

будут B-множествами, пересекаемыми параллелями оси OY по множествам абсолютно первого класса, порядка $\alpha - 1$. По предположению, они расщепляются на рассеянные семейства B-множеств, пересекаемых параллелями оси OY по компактным множествам, порядка, не превосходящего $\alpha - 2$.

Следовательно, все множество H расщепляется на рассеянное семейство B-множеств, пересекаемых параллелями оси OY по компактным множествам, порядка, не превосходящего $\alpha - 1$.

Пусть α — трансфинитное число второго рода, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна.

Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \cdots \to \alpha.$$

Множество

$$E_n = \Pi_x H^{\{\alpha_n\}}$$

будет B-множеством, как проекция множества, для которого все линейные множества $P_x \cdot H^{\{\alpha_n\}}$ являются множествами абсолютно первого класса, т. е. абсолютными F_σ (7).

Очевидно, что $E_n \supset E_m$ при $n < m$, а

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0,$$

так как подкласс каждого из множеств $P_x \cdot H$ меньше α. B-множества

$$\begin{aligned} B_1 &= E_1 \cdot CE_2, \\ B_2 &= E_2 \cdot CE_3, \\ &\dots\dots\dots \\ B_n &= E_n \cdot CE_{n+1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

будут попарно без общих точек, причем $B_n \cdot E_{n+1} = 0$.

B-множество

$$M_n = H\,(B_n \times I_y)$$

будет иметь порядок $\alpha_{n+1} + 1$. По предположению, его можно расщепить на рассеянное семейство B-множеств, пересекаемых параллелями оси OY по компактным множествам, порядка α_{n+1}:

$$M_n = \sum_j N_j^n.$$

Следовательно, множество

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

расщепляется на рассеянное семейство B-множеств, пересекаемых параллелями оси OY по компактным множествам, порядка α,

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_n \sum_j N_j^n = \sum_{j,n} N_j^n,$$

так как порядки α_{n+1} слагаемых семейств B-множеств $\{N_j^n\}$ при постоянном n и переменном j, расположенных в плоских B-множествах $B_n \times I_y$, могут быть как угодно велики, не превосходя α.

Пусть $\alpha = \alpha^* + 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна.

Множество

$$H^{\{\alpha^*\}} = \prod_{\alpha' < \alpha^*} H^{\{\alpha'\}} = 0. \tag{2}$$

Построим B-множества

$$E^{\{\alpha'\}} = \Pi_x H^{\{\alpha'\}}, \quad K_0 = \prod_{\alpha' < \alpha^*} E^{\{\alpha'\}}.$$

Плоское B-множество

$$Q_0 = K_0 \times I_y$$

таково, что множества $P_x \cdot Q_0$ имеют точки каждого из множеств $H^{\{\alpha'\}}$, где $\alpha' < \alpha^*$.

Рассмотрим полосу n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Пусть

$$E^{\{\alpha'\}}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Pi_x (H^{\{\alpha'\}} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}),$$
$$K_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \prod_{\alpha' < \alpha^*} E^{\{\alpha'\}}_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Плоское B-множество

$$Q_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = K_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

таково, что линейные множества $P_x \cdot Q_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ содержат точки каждого из множеств $H^{\{\alpha'\}}$, где $\alpha' < \alpha^*$. Пусть

$$Q_n = \sum_{i_1 i_2, \ldots, i_n} Q_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Таким образом, мы получаем ряд плоских B-множеств

$$Q_0 \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_n \supset \cdots.$$

B-множество

$$Q = \prod_{n=0}^{\infty} Q_n$$

обладает тем свойством, что для любой точки $q(x_0, y_0) \in Q$ на прямой P_{x_0} в любой полосе Бэра n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \ni q(x_0, y_0)$ содержатся точки каждого из множеств $H^{\{\alpha'\}}$, где $\alpha' < \alpha^*$.

Докажем, что

$$H \cdot Q = 0. \tag{3}$$

Действительно, если точка $q(x_0, y_0) \in H \cdot Q$, то это означает, что, каково бы ни было n, полоса Бэра n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset q(x_0, y_0)$ на прямой P_{x_0} имеет точки каждого из множеств $H^{\{\alpha'\}}$, где $\alpha' < \alpha^*$. Но так как $q(x_0, y_0) \in H$, то это означает, что

$$q(x_0, y_0) \in \prod_{\alpha' < \alpha^*} H^{\{\alpha'\}} = H^{\{\alpha^*\}},$$

что противоречит равенству (2).

В силу равенства (3),

$$H \subset CQ = C \prod_{n=0}^{\infty} Q_n = \sum_{n=0}^{\infty} CQ_n.$$

Применим к множеству H следующий процесс.

Рассмотрим B-множество

$$W_0 = CQ_0.$$

B-множество

$$M_0 = H \cdot W_0$$

имеет порядок, не превосходящий α^*. По предположению, его можно расщепить на рассеянное семейство B-множеств, пересекаемых параллелями оси OY по компактным множествам, порядка, не превосходящего α^*:

$$M_0 = \sum_k N_{0;k}.$$

Рассмотрим полосу n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ и в ней B-множество

$$W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = Q_{n-1}^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \cdot CQ_n^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}.$$

B-множество

$$M_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = H \cdot W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

будет иметь порядок, не превосходящий α^*. По предположению, его можно расщепить на рассеянное семейство B-множеств, пересекаемых параллелями оси OY по компактным множествам, порядка, не превосходящего α^*:

$$M_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_k N_{n;k}^{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Следовательно, B-множество

$$M_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} M_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

расщепляется на рассеянное семейство B-множеств, пересекаемых параллелями оси OY по компактным множествам, порядка, не превосходящего α^*,

$$M_n = \sum_{k;\, i_1, i_2, \ldots, i_n} N_{n;k}^{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

так как каждое из слагаемых семейств $\{N_{n;k}^{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$ при фиксированных $n; i_1, i_2, \ldots, i_n$ отделяется одно от другого плоским B-множеством $W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, которое не содержит в себе ни одной точки других семейств B-множеств и $W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot W_n^{i_1' i_2' \ldots i_n'} = 0$, если хотя бы одно $i_k \neq i_k'$, где $k \leqslant n$.

Этим процессом мы исчерпаем все B-множество H, так как

$$H \subset CQ = \sum_{n=0}^{\infty} W_n,$$

где

$$W_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Следовательно, B-множество

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

расщепляется на счетное число B-множеств, пересекаемых параллелями оси OY по компактным множествам,

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n} \sum_{k;\, i_1 i_2, \ldots, i_n} N_{n;\,k}^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{k;\, i_1, i_2, \ldots, i_n;\, n} N_{n;\,k}^{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

которые образуют рассеянное семейство B-множеств порядка $\alpha^* = \alpha - 1$, так как каждое из слагаемых семейств B-множеств $\{N_{n;\,k}^{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$ при фиксированных n; $i_1, i_2, \ldots, i_n$ порядка, не превосходящего α^*, отделяется одно от другого плоским B-множеством

$$W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = Q_{n-1}^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \cdot C Q_n^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n},$$

где

$$Q_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = K_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

причем множество $W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ никаких точек других семейств B-множеств не содержит, а

$$W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot W_m^{i_1' i_2' \ldots i_m'} = 0$$

при $n \neq m$ или хотя бы при одном $i_k \neq i_k'$, если $n = m$.

Таким образом, теорема верна при всех значениях $\alpha < \Omega$, что требовалось доказать.

Поступило
25. IV. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Козлова З. И., О некоторых плоских A- и B-множествах, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 479—500.

[2] Козлова З. И., О накрытиях некоторых A-множеств, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 14 (1950), 421—442.

[3] Лузин Н. Н., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930.

[4] Ляпунов А. А., Об отделимости аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, II (1934), 276—279.

[5] Ляпунов А. А., О подклассах B-множеств, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 3 (1937), 419—426.

[6] Новиков П. С., К теории релятивного континуума, Доклады Ак. Наук СССР, III (1934), 17—20.

[7] Арсенин В. Я., Природа проекций некоторых B-множеств, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 403—410.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 297—308

И. М. ВИНОГРАДОВ

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ПРИМЕНЕНИИ К ВОПРОСАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ СВОЙСТВОМ ИНДЕКСА

В работе дается новый элементарный вывод ряда законов распределения чисел с заданным свойством индекса по простому модулю.

Обозначения. Примем обозначения:

a) q — простое число, превосходящее 2; $\operatorname{ind} x$ — индекс числа x по модулю q при выбранном основании; n — делитель числа $q-1$ с условием $1 < n \leqslant q-1$; $\nu = n^{-1}$; k — целое число, не делящееся на q.

b) x' определяется сравнением $xx' \equiv 1 \pmod q$, если x не делится на q; $x' = 0$, если x делится на q.

c) При целом r функция $\sigma_r(x)$ определяется для всех целых x равенствами:

$\sigma_r(x) = 0$, если x делится на q.

$\sigma_r(x) = 1 - \nu$, если x не делится на q, а $\operatorname{ind} x - r$ делится на n.

$\sigma_r(x) = -\nu$, если x не делится на q, а $\operatorname{ind} x - r$ не делится на n.

d) θ — число с условием $|\theta| \leqslant 1$.

e) ε — произвольно малое положительное постоянное.

f) Символическое неравенство $A \ll B$ при положительном B показывает, что $|A| B^{-1}$ не превосходит постоянного числа.

g) Символ $\sum\limits_z$ обозначает суммирование, распространенное на указанные заранее значения z.

Нетрудно убедиться, что функция $\sigma_r(x)$ обладает следующими свойствами:

$$\sigma_{r_1}(x) = \sigma_r(x), \quad \text{если } r_1 \equiv r \pmod n;$$
$$\sigma_r(x_1) = \sigma_r(x), \quad \text{если } x_1 \equiv x \pmod q;$$
$$\sigma_r(x) = \sigma_{r+\operatorname{ind} y}(xy); \qquad \sum_{r=0}^{n-1} \sigma_r(x) = 0; \qquad \sum_{x=0}^{q-1} \sigma_r(x) = 0.$$

Настоящее исследование имеет целью показать, что присоединение к моему методу двойных сумм (1934—1937 гг.) особого способа исчерпывания области суммирования может служить источником чисто арифметических подходов к решению разнообразных вопросов теории чисел. В качестве примера здесь дается новый арифметический вывод закона распределения чисел с данным значением остатка от деления на n индекса по модулю q (краткое описание этого вывода было дано раньше ([1])); близкие к указанному по основной идее новые выводы даются также для

закона распределения индексов по модулю q и для закона распределения чисел вида $p+k$ с данным значением остатка от деления на n индекса по модулю q при условии, что p пробегает простые числа.

ЛЕММА 1. *Имеем*

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(x)\,\sigma_{s+r}(y) = \sigma_r(yx').$$

Доказательство. Справедливость леммы в случае, когда по меньшей мере одно из чисел x и y делится на q, очевидна. Рассмотрим случай, когда ни одно из чисел x и y не делится на q. Если $\operatorname{ind} yx' - r$ делится на n, то

$$\sigma_s(x)\,\sigma_{s+r}(y) = \sigma_s(x)\,\sigma_{s+r}(x \cdot yx')$$

равно $(1-\nu)^2$ в случае, когда $s \equiv \operatorname{ind} x \pmod{n}$, и равно $(-\nu)^2$ в остальных $n-1$ случаях. При этом

$$(1-\nu)^2 + (n-1)(-\nu)^2 = 1-\nu = \sigma_r(yx').$$

Если $\operatorname{ind} yx' - r$ не делится на n, то $\sigma_s(x)\,\sigma_{s+r}(y)$ равно $(1-\nu)(-\nu)$ в случае, когда $s \equiv \operatorname{ind} x \pmod{n}$, равно $(-\nu)(1-\nu)$ в случае, когда $s+r \equiv \operatorname{ind} y \pmod{n}$ и равно $(-\nu)^2$ в остальных $n-2$ случаях. При этом

$$(1-\nu)(-\nu) + (-\nu)(1-\nu) + (n-2)(-\nu)^2 = -\nu = \sigma_r(yx').$$

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$P_{z,r} = \sum_{x=0}^{q-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(x)\,\sigma_{s+r}(x+z).$$

Тогда

1. *Если z делится на q, то имеем*

$$P_{z,r} = (q-1)\,\sigma_r(1).$$

2. *Если z не делится на q, то имеем*

$$P_{z,r} = -\sigma_r(1).$$

Доказательство. Согласно лемме 1, имеем

$$P_{z,r} = \sum_{x=0}^{q-1} \sigma_r((x+z)\,x') = \sum_{x=1}^{q-1} \sigma_r(1+zx').$$

В случае 1 отсюда находим

$$P_{z,r} = \sum_{x=1}^{q-1} \sigma_r(1) = (q-1)\,\sigma_r(1).$$

Рассмотрим случай 2. Когда x пробегает значения $1, \ldots, q-1$, то $1+zx'$ очевидно пробегает значения, сравнимые с числами $0, 1, \ldots, q-1$, кроме 1. Поэтому

$$P_{z,r} = \sum_{u=0}^{q-1} \sigma_r(u) - \sigma_r(1) = -\sigma_r(1).$$

ЛЕММА 3. *Пусть Y — целое положительное, M пробегает m целых чисел $M_1, \ldots, M_m$ с условиями*

$$M_1 + Y \leqslant M_2,\; M_2 + Y \leqslant M_3, \ldots, M_m + Y \leqslant M_1 + q,$$

$\beta(M)$ — *функция, значениями которой могут быть лишь* 1 *и* -1, *наконец,*

$$U_{M,Y,r} = \sum_{x=M+1}^{M+Y} \sum_{y=1}^{Y} \sigma_r(x+y).$$

Тогда имеем

$$\left|\sum_M \beta(M) U_{M,Y,r}\right| < Y\sqrt{mq}.$$

Доказательство. Находим (обозначение $P_{z,r}$ имеет смысл, указанный в лемме 2)

$$\left|\sum_M \beta(M) U_{M,Y,r}\right| \leqslant \sum_M \sum_{x=M+1}^{M+Y} \left|\sum_{y=1}^{Y} \sigma_r(x+y)\right|,$$

$$\left(\sum_M \beta(M) U_{M,Y,r}\right)^2 \leqslant \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_M \beta(M) U_{M,Y,s}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{n-1} mY \sum_{x=0}^{q-1} \left(\sum_{y=1}^{Y} \sigma_s(x+y)\right)^2 = mY \sum_{y_1=1}^{Y} \sum_{y=1}^{Y} P_{y-y_1,0}.$$

Но, согласно лемме 2, для Y пар значений y и y_1 с условием $y = y_1$ имеем $P_{y-y_1,0} = (q-1)(1-\nu)$, а для оставшихся $Y^2 - Y$ пар значений y и y_1 имеем $P_{y-y_1,0} = -(1-\nu)$. Поэтому

$$\left(\left|\sum_M \beta(M) U_{M,Y,r}\right|\right)^2 \leqslant mY\left((q-1)(1-\nu)Y - (1-\nu)(Y^2 - Y)\right) < mY^2 q,$$

$$\sum_M |U_{M,Y,r}| < Y\sqrt{mq}.$$

Замечание. При $0 < Y \leqslant 0{,}5q$ сумму $U_{M,Y,r}$ можно рассматривать как сумму значений $\sigma_r(x)$, распространенную на целые точки (x, y) области параллелограмма с вершинами $(M, 0)$, $(M+Y, 0)$, $(M+Y, Y)$, $(M+2Y, Y)$, причем стороны, соединяющие первую вершину со второй и с третьей, к области не причисляются.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть M — целое число, Q — целое число с условием $\sqrt{q} \leqslant Q \leqslant 0{,}5q$,*

$$S_r = \sum_{x=M+1}^{M+Q} \sigma_r(x).$$

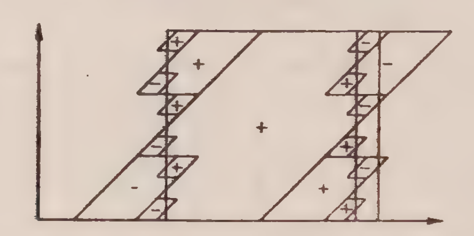
Тогда, полагая $Q = h\sqrt{q}$, будем иметь

$$|S_r| < \sqrt{q}\left(\frac{2\ln h}{\ln 27} + 2{,}5\right).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\tau = \left[\frac{\ln h}{\ln 3}\right], \quad Q_0 = 2\cdot 3^{\tau}\left[\frac{Q}{2\cdot 3^{\tau}}\right],$$

причем сначала будем считать, что $h \geqslant 3$ (следовательно, $\tau \geqslant 1$ и $q \geqslant 36$). Очевидно, $0 \leqslant Q - Q_0 < 2 \cdot 3^\tau$. Произведение $S_r Q_0$ можно рассматривать как сумму значений $\sigma_r(x)$, распространенную на целые точки (x, y) (т. е. с целыми x и y) области прямоугольника с вершинами $(M, 0)$, $(M+Q, 0)$, (M, Q_0), $(M+Q, Q_0)$, причем стороны, соединяющие первую вершину со второй и с третьей, к области не причисляются. Из этой области мы выделим область прямоугольника с вершинами $(M+Q_0, 0)$, $(M+Q, 0)$, $(M+Q_0, Q_0)$, $(M+Q, Q_0)$, а к оставшейся области (квадрат со стороною длиной Q_0) применим способ исчер-



пывания по схеме, изображенной на чертеже, при помощи параллелограммов с номерами $0, 1, \ldots, \tau$, стороны которых соответственно имеют длины

$$Q_0, \ \frac{Q_0}{3}, \ \ldots, \ \frac{Q_0}{3^\tau}$$

(значения $\sigma_r(x)$ для одних параллелограммов берутся со знаком $+$, для других параллелограммов они берутся со знаком $-$). Очевидно, имеется один параллелограмм с номером 0 и при целом s с условием $0 < s \leqslant \tau$ имеется $4 \cdot 3^{s-1}$ параллелограммов с номером s. Применяя лемму 3 к параллелограмму с номером 0 $(m=1, \ Y=Q_0)$ и, при каждом s с условием $0 < s \leqslant \tau$, к 3^{s-1} четверкам параллелограммов с номером s $\left(m=4, \ Y=\frac{Q_0}{3^s}\right)$, наконец, замечая, что после исчерпания всех параллелограммов останутся неисчерпанными или же окажутся излишне исчерпанными области треугольников с общим числом целых точек $\frac{Q_0^2}{2 \cdot 3^\tau}$, а также область выделенного выше прямоугольника с числом целых точек, меньшим $2 \cdot 3^\tau Q_0$, получим

$$|S_r Q_0| < Q_0 \sqrt{q} + \frac{Q_0}{3} \sqrt{4q} + 3 \frac{Q_0}{3^2} \sqrt{4q} + \cdots + 3^{\tau-1} \frac{Q_0}{3^\tau} \sqrt{4q} + \frac{Q_0^2}{2 \cdot 3^\tau} + 2 \cdot 3^\tau Q_0,$$

$$|S_r| < \sqrt{q} \left(1 + \frac{2}{3}\tau + \frac{Q_0}{2 \cdot 3^\tau \sqrt{q}} + \frac{2 \cdot 3^\tau}{\sqrt{q}}\right) \leqslant \sqrt{q} \left(\frac{2 \ln h}{\ln 27} + 2{,}5\right).$$

Очевидно, последняя граница для $|S_r|$ верна и при $1 \leqslant h \leqslant 3$; это следует из тривиального неравенства $|S_r| < Q = h\sqrt{q}$.

З а м е ч а н и е. При $0 \leqslant M$, $M + Q < q$, обозначая символом T_r число чисел ряда $x = M+1, \ldots, M+Q$ с условием $\operatorname{ind} x \equiv r \pmod{n}$, будем иметь $S_r = T_r - Q_\nu$.

ЛЕММА 4. *Пусть Y и R — целые положительные, M пробегает m целых чисел $M_1, \ldots, M_m$ с условиями*

$$M_1 + Y \leqslant M_2,\ M_2 + Y \leqslant M_3, \ldots, M_m + Y \leqslant M_1 + q,$$

а L пробегает l целых чисел с условиями

$$L_1 + R \leqslant L_2,\ L_2 + R \leqslant L_3, \ldots, L_l + R \leqslant L_1 + n.$$

$\beta(M)$ и $\delta(L)$ — функции, значениями которых могут быть лишь 1 и —1, наконец,

$$H = \sum_M \beta(M) \sum_{x=M+1}^{M+Y} \sum_{y=1}^{Y} \sum_L \delta(L) \sum_{s=L+1}^{L+R} \sum_{r=1}^{R} \sigma_{s+r}(x+y).$$

Тогда имеем

$$|H| < YR\sqrt{mlq}.$$

Доказательство. Мы будем применять лемму 2. Имеем

$$H^2 \leqslant mYlR \sum_{x=0}^{q-1} \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{y=1}^{Y} \sum_{r=1}^{R} \sigma_{s+r}(x+y) \right)^2 =$$

$$= mYlR \sum_{y_1=1}^{Y} \sum_{y=1}^{Y} \sum_{r_1=1}^{R} \sum_{r=1}^{R} P_{y-y_1,\, r-r_1} =$$

$$= mYlR \sum_{y_1=1}^{Y} \sum_{y=1}^{Y} \sum_{r_1=1}^{R} \sum_{r=1}^{R} \psi(y-y_1)\, \sigma_{r-r_1}(1),$$

где $\psi(y-y_1)$ равно $q-1$ при $y=y_1$ и равно -1 в противном случае. Поэтому

$$H^2 \leqslant mYlR\,(Y(q-1) - (Y^2 - Y))\,(R(1-\nu) - (R^2 - R)\nu)\, mlqY^2R^2;$$
$$|H| < YR\sqrt{mlq}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $n = q-1$, M и N — целые, Q — целое число с условием $\sqrt{q} \leqslant Q \leqslant 0{,}5q$, Z — целое число с условием $\sqrt{n} \leqslant Z \leqslant 0{,}5n$, наконец,*

$$W = \sum_{x=M+1}^{M+Q} \sum_{s=N+1}^{N+Z} \sigma_s(x).$$

Тогда, полагая $Q = h\sqrt{q}$, $Z = t\sqrt{n}$, имеем

$$|W| < \sqrt{q}\left(\frac{2\ln h}{\ln 27} + 2{,}5\right)\left(\frac{2\ln t}{\ln 27} + 2{,}5\right).$$

Доказательство. Пусть $R, L_1, \ldots, L_l$ удовлетворяют условиям леммы 4, пусть L пробегает значения $L_1, \ldots, L_l$ и $\delta(L)$ — функция, значениями которой могут быть лишь 1 и —1. Рассмотрим сумму

$$V = \sum_{x=M+1}^{M+Q} F(x); \quad F(x) = \sum_L \delta(L) \sum_{s=L+1}^{L+R} \sum_{r=1}^{R} \sigma_{s+r}(x),$$

причем сначала будем считать, что $h \geqslant 3$. Для этой цели к произведению VQ_0 в отношении суммирования по x применим способ исчерпывания, согласно схеме, использованной при доказательстве теоремы 1 (см. черт. к доказательству теоремы 1). Нетрудно видеть, что при заданном x в сумму $F(x)$ войдет не более чем R слагаемых $\sigma_{s+r}(x)$ с условием, что $s+r$ по модулю n сравнимо с одним и тем же числом. Поэтому

$$|F(x)| \leqslant \max(R(1-\nu),\ R(n-1)\nu) < R.$$

Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1, применяя при этом лемму 4, легко найдем

$$|VQ_0| < R\sqrt{l}\, Q_0\sqrt{q}\left(1+\frac{2}{3}\tau\right)+R\left(\frac{Q_0^2}{2\cdot 3^\tau}+2\cdot 3^\tau Q_0\right),$$

$$|V| < R\sqrt{l\cdot q}\left(1+\frac{2}{3}\tau+\frac{Q_0}{2\cdot 3^\tau\sqrt{q}}+\frac{2\cdot 3^\tau}{\sqrt{q}}\right) < R\sqrt{lq}\left(\frac{2\ln h}{\ln 27}+2{,}5\right).$$

Последняя граница для $|V|$ верна и при $1 \leqslant h \leqslant 3$; это следует из тривиального неравенства

$$|V| < RQ = Rh\sqrt{q}.$$

Чтобы теперь оценить сумму W, представим ее в виде

$$W=\sum_{s=N+1}^{N+Z} f(s); \quad f(s)=\sum_{x=M+1}^{M+Q}\sigma_s(x)$$

и введем обозначения

$$\alpha=\left[\frac{\ln t}{\ln 3}\right], \quad Z_0=2\cdot 3^\tau\left[\frac{Z}{2\cdot 3^\tau}\right],$$

причем сначала будем считать, что $t \geqslant 3$. К произведению WZ_0, но теперь уже в отношении суммирования по s, применим способ исчерпывания согласно схеме, подобной использованной при доказательстве теоремы 1, заменяя M, Q, τ, Q_0 числами N, Z, α, Z_0, а переменные x и y — переменными s и r. Нетрудно видеть, что в сумму $f(s)$ войдет не более чем одно слагаемое, равное $1-\nu$, не более чем одно слагаемое, равное 0; остальные слагаемые будут равны $-\nu$. Поэтому

$$|f(s)| \leqslant \max(1-\nu,\ Q\nu) < 1.$$

Повторяя далее рассуждения, аналогичные примененным в доказательстве теоремы 1, и пользуясь при этом найденной выше оценкой для $|V|$, легко получим

$$|WZ_0| < Z_0\sqrt{q}\left(\frac{2\ln h}{\ln 27}+2{,}5\right)\left(1+\frac{2}{3}\alpha\right)+\frac{Z_0^2}{2\cdot 3^\alpha}+2.3^\alpha Z_0,$$

$$|W| < \sqrt{q}\left(\frac{2\ln h}{\ln 27}+2{,}5\right)\left(\frac{2\ln t}{\ln 27}+2{,}5\right).$$

Последнее неравенство справедливо и при $1 \leqslant t \leqslant 3$. Это следует из тривиального неравенства

$$|W| < Z = t\sqrt{n} < t\sqrt{q}.$$

Замечание. При $0 \leqslant M$, $M+Q<q$, обозначая буквою D число чисел ряда $x=M+1, \ldots, M+Q$ с условием, что $\operatorname{ind} x$ сравним по модулю n с одним из чисел ряда $N+1, \ldots, N+Z$, будем иметь

$$W=D-QZ\nu.$$

ЛЕММА 5. *Пусть y и y_1 — два числа ряда* $0, 1, \ldots, q-1$,

$$B_{y, y_1}=\sum_{x=0}^{q-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(xy+k) \sigma_s(xy_1+k).$$

Тогда

1. *Если* $y=y_1=0$, *то имеем* $B_{y, y_1}=q(1-\nu)$.
2. *Если только одно из чисел y и y_1 равно* 0, *то имеем* $B_{y, y_1}=0$.
3. *Если ни одно из чисел y и y_1 не равно* 0, *то при* $y=y_1$ *имеем* $B_{y, y_1}=(q-1)\sigma_0(y_1 y')$, *а при y, не равном y_1, имеем* $B_{y, y_1}=-\sigma_0(y_1 y')$.

Доказательство. В случае 1 имеем (лемма 1)

$$B_{y, y_1}=\sum_{x=0}^{q-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(k) \sigma_s(k)=\sum_{x=0}^{q-1} \sigma_0(kk')=q\sigma_0(1).$$

В случае 2, предполагая для определенности $y_1=0$, имеем

$$B_{y, y_1}=\sum_{x=0}^{q-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(xy+k) \sigma_s(k)=\sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(k) \sum_{z=0}^{q-1} \sigma_s(z)=0.$$

В случае 3, полагая $r=\operatorname{ind} y_1 y'$, находим

$$B_{y, y_1}=\sum_{z=0}^{q-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(z) \sigma_s(y_1 y' z-k y_1 y'+k)=$$
$$=\sum_{z=0}^{q-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(z) \sigma_{s-r}(z+k(y_1' y-1)).$$

Поэтому, согласно лемме 2, при $y=y_1$ имеем

$$B_{y, y_1}=(q-1)\sigma_{-r}(1)=(q-1)\sigma_0(y_1 y'),$$

а при y, не равном y_1, имеем

$$B_{y, y_1}=-\sigma_{-r}(1)=-\sigma_0(y_1 y').$$

ЛЕММА 6. *Пусть*

$$S_r=\sum_{x=0}^{q-1} \sum_{y=0}^{q-1} \xi(x) \eta(y) \sigma_r(xy+k);$$

$$\xi(x) \geqslant 0, \quad \eta(y) \geqslant 0, \quad \sum_{x=0}^{q-1}(\xi(x))^2 \leqslant X_2, \quad \sum_{y=0}^{q-1}(\eta(y))^2 \leqslant Y_2.$$

Тогда имеем

$$|S_r| \leqslant \sqrt{X_2 Y_2 q}.$$

Доказательство. Имеем

$$|S_r|^2 \leqslant \sum_{s=0}^{n-1}|S_s|^2 \leqslant \sum_{s=0}^{n-1} X_2 \sum_{x=0}^{q-1} \sum_{y=0}^{q-1} \sum_{y_1=0}^{q-1} \eta(y) \eta(y_1) \sigma_s(xy+k)(xy_1+k).$$

Согласно лемме 5, отсюда находим

$$|S_r|^2 \leqslant X_2 \sum_{y=0}^{q-1} \sum_{y_1=0}^{q-1} \eta(y)\eta(y_1) B_{y,y_1},$$

где B_{y,y_1} положительно только в двух случаях: B_{y,y_1} положительно и $\leqslant q(1-\nu)$ в случае, когда $y=y_1$; $B_{y,y_1}=\nu$ в случае, когда y и y_1 отличны от 0 и не равны между собою, причем $\operatorname{ind} y_1 y'$ не делится на n. Часть правой части найденного неравенства, отвечающая первому случаю, не превосходит

$$X_2 q(1-\nu) \sum_{y=0}^{q-1} (\eta(y))^2 = X_2 Y_2 q(1-\nu).$$

Часть, отвечающая второму случаю, не превосходит

$$X_2\nu \sum_{y=0}^{q-1} \sum_{y_1=0}^{q-1} \eta(y)\eta(y_1) = X_2\nu \left(\sum_{y=0}^{q-1} \eta(y)\right)^2 \leqslant X_2 Y_2 q\nu.$$

Поэтому

$$|S_r|^2 \leqslant X_2 Y_2 q(1-\nu) + X_2 Y_2 q\nu = X_2 Y_2 q, \quad |S_r| \leqslant \sqrt{X_2 Y_2 q}.$$

ЛЕММА 7. *Пусть M, N, X, Y — целые, $X>0$, $Y>0$,*

$$S = \sum_{x=M+1}^{M+X} \sum_{y=N+1}^{N+Y} \xi(x)\eta(y)\alpha_r(xy+k); \quad 0 \leqslant \xi(x) \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \eta(y) \leqslant \beta.$$

Тогда имеем

$$S \ll \alpha\beta XY \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{q} + \frac{q}{XY}}.$$

Доказательство. Сумму S легко приведем к виду, рассмотренному в лемме 6, если вместо $\xi(x)$ и $\eta(y)$ введем новые функции $\xi_1(x)$ и $\eta_1(y)$, определяемые равенствами

$$\xi_1(x) = \sum{}' \xi(x_1), \quad \eta_1(y) = \sum{}'' \eta(y_1),$$

где суммирование по x_1 распространяется на значения x_1 с условием $x_1 \equiv x \pmod q$, а суммирование по y распространяется на значения y_1 с условием $y_1 \equiv y \pmod q$. Применяя лемму 6, мы вместо X_2 и Y_2 теперь можем взять X_1 и Y_1 с условиями

$$X_1 = \alpha^2 X = \alpha^2 X^2 \frac{1}{X}, \text{ если } X \leqslant q,$$

$$Y_1 = \beta^2 Y = \beta^2 Y^2 \frac{1}{Y}, \text{ если } Y \leqslant q,$$

$$X_1 = \alpha^2 \left(\frac{X}{q} + 1\right)^2 q \ll \alpha^2 X^2 \frac{1}{q}, \text{ если } X > q,$$

$$Y_1 = \beta^2 \left(\frac{Y}{q} + 1\right)^2 q \ll \beta^2 Y^2 \frac{1}{q}, \text{ если } Y > q,$$

причем всегда будем иметь

$$\sqrt{X_1} \ll \alpha X \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{1}{q}}, \quad \sqrt{Y_1} \ll \beta Y \sqrt{\frac{1}{Y} + \frac{1}{q}},$$

$$\sqrt{X_1 Y_1 q} \ll \alpha\beta XY \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{q} + \frac{q}{XY}}.$$

ЛЕММА 8. *Пусть x и y пробегают целые положительные числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям. Пусть, далее,*

$$1 < U \leqslant N, \quad U < U' \leqslant 2U,$$
$$S = \sum\sum \xi(x)\,\eta(y)\,\sigma_r(xy+k),$$

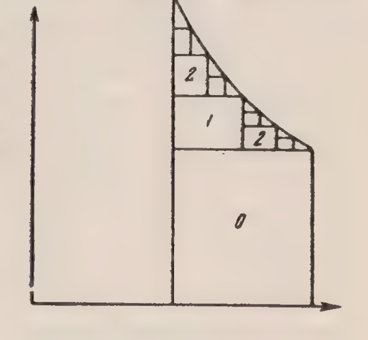
где $0 \leqslant \xi(x) \ll N^{\varepsilon}$, $0 \leqslant \eta(y) \ll N^{\varepsilon}$ и суммирование распространяется на область

$$U < x \leqslant U', \quad xy \leqslant N.$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon_0} F, \quad F = \sqrt{\frac{1}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\,.$$

Доказательство. Пусть $F \leqslant F_0$, где F_0 — достаточно малое положительное постоянное, меньшее 1 (в противном случае лемма тривиальна). Из области суммирования выделим области с номерами $0, 1, \ldots, \tau_0$, где τ_0 — наибольшее целое число с условием $2^{\tau_0} \leqslant F^{-1}$, согласно схеме, изображенной на чертеже. Область с номером τ представится прямоугольником с основанием длиною



$$\frac{U'-U}{2^{\tau}} \ll \frac{U}{2^{\tau}}$$

и высотой длиною

$$\ll \frac{N}{U2^{\tau}}\,.$$

Число областей с номером τ при $\tau = 0$ будет 1, а при $\tau > 0$ будет $2^{\tau-1}$ Часть суммы S, отвечающая одной из областей с номером τ, согласно лемме 7, будет

$$\ll N^{2\varepsilon}\frac{U}{2^{\tau}}\frac{N}{U2^{\tau}}\sqrt{\frac{2^{\tau}}{U} + \frac{U\cdot 2^{\tau}}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q2^{2\tau}}{N}} \ll \frac{N^{1+2\varepsilon}}{2^{\tau}}F.$$

Часть суммы S, отвечающая точкам, не принадлежащим ни одной из выделенных областей, будет

$$\ll N^{2\varepsilon}\frac{N}{U}\frac{U}{2^{\tau_0}} \ll N^{1+2\varepsilon}F.$$

Поэтому

$$S \ll N^{1+2\varepsilon}F\left(1 + \sum_{\tau=1}^{\tau_0}\frac{2^{\tau-1}}{2^{\tau}}\right) \ll N^{1+\varepsilon_0}F.$$

ЛЕММА 9. *Пусть x, y, m пробегают не делящиеся на q целые положительные числа, принадлежащие трем возрастающим последовательностям. Пусть, далее, $1 < U_1 < U_2 \leqslant N$,*

$$S = \sum\sum\sum \sigma_r(xym+k),$$

где суммирование распространяется на область

$$U_1 < x \leqslant U_2, \quad xym \leqslant N, \quad (x,\ y) = 1.$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon_1} \sqrt{\frac{1}{U_1} + \frac{U_2}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\,.$$

Доказательство. Имеем

$$S = \sum \mu(d)\, S_d,$$

где d пробегает целые положительные числа, делящие одновременно числа хотя бы одной из возможных пар значений x и y (следовательно, $d \leqslant \sqrt{N}$); при этом

$$S_d = \sum\sum\sum \sigma_r\,(d^2 x_1 y_1 m + d^2 k_1),$$

где $k \equiv d^2 k_1 \pmod q$, x_1 и y_1 пробегают частные от деления на d значений x и y, кратных d, причем суммирование распространяется на область

$$\frac{U_1}{d} < x_1 \leqslant \frac{U_2}{d}, \quad x_1 y_1 m \leqslant \frac{N}{d^2}\,.$$

Эту область можно подразделить на $\ll \ln N$ областей вида

$$\frac{u}{d} < x_1 \leqslant \frac{u_1}{d}, \quad x_1 y_1 m \leqslant \frac{N}{d^2}, \quad u_1 \leqslant 2u.$$

Но при $y_2 \leqslant N$ число $\eta(y_2)$ пар y_1 и m с условием $y_1 m = y_2$ будет $\ll N^{\varepsilon}$. При этом часть $S_{d,1}$ суммы S_d, отвечающая области такого вида, может быть представлена в форме

$$S_{d,1} = \sum\sum \eta(y_2)\, \sigma_{r_1}(x_1 y_2 + k_1),$$

где $r \equiv r_1 + 2\,\mathrm{ind}\, d \pmod n$, и суммирование распространяется на область

$$\frac{u}{d} < x_1 \leqslant \frac{u_1}{d}, \quad x_1 y_2 \leqslant \frac{N}{d^2}\,.$$

Применяя лемму 8, найдем

$$S_{d,1} \ll \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{d^2} \sqrt{\frac{d}{u} + \frac{u}{d}\frac{d^2}{N} + \frac{1}{q} + \frac{qd^2}{N}} \ll \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{d} \sqrt{\frac{1}{U} + \frac{u}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\,,$$

$$S_d \ll \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{d} \sqrt{\frac{1}{U_1} + \frac{U_2}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\, \ln N,$$

$$S \ll N^{1+\varepsilon_0} (\ln N)^2 \sqrt{\frac{1}{U_1} + \frac{U_2}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\,.$$

ЛЕММА 10. *Пусть $N \geqslant 55$; h — произвольно малое положительное постоянное с условием $0 < h \leqslant \frac{1}{6}$; P — произведение некоторых простых чисел, не превосходящих $N^{\frac{1}{3}}$; d пробегает все не превосходящие N делители числа P.*

Тогда значения d могут быть распределены среди $< D$ классов, где

$$D = (\ln N)^{\frac{\ln\ln N}{\ln(1+h)}}\,.$$

Для значений d, принадлежащих одному и тому же классу, $\mu(d)$ сохраняет неизменное значение. Часть классов включает только значения d с условием

$$d \leqslant N^{\frac{1}{3}+h}.$$

Для каждого из остальных классов существует целое положительное H и две возрастающие последовательности (x) и (y) целых положительных чисел с условием

$$N^{\frac{1}{3}} < x \leqslant N^{\frac{2}{3}+h}$$

такие, что все числа класса, взятые каждое H раз, получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условиям

$$xy \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 6 моей статьи (2) при условии, что $\gamma = \sigma = \frac{1}{3}$. При этом условие, что $N \geqslant N_0$, где N_0 — достаточно большое постоянное $\geqslant 55$, заменено (что вполне достаточно для правильности всех рассуждений доказательства леммы) условием $N \geqslant 55$. Кроме того, отмечено, что для значений d, принадлежащих одному классу, $\mu(d)$ сохраняет неизменное значение.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $N \geqslant 55$, p пробегает простые числа,*

$$S = \sum_{p \leqslant N} \sigma_r(p+k).$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon} G, \quad G = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-\frac{1}{6}}.$$

Доказательство. Пусть P — произведение всех отличных от q простых чисел p с условием $p \leqslant N^{\frac{1}{3}}$, а Q — произведение всех отличных от q простых чисел с условием $N^{\frac{1}{3}} < p \leqslant N$. Пусть, далее, p_1 и p_2 пробегают простые делители числа Q, d пробегает делители числа P, наконец, m пробегает целые положительные числа, не делящиеся на q. Находим

$$\sum\sum \sigma_r(p_1p_2 + k) + S + O\left(N^{\frac{1}{3}}\right) = \sum\sum \mu(d)\,\sigma_r(dm+k), \qquad (1)$$

где в левой части суммирование распространяется на область $p_1p_2 \leqslant N$, $(p_1, p_2) = 1$, а в правой части суммирование распространяется на область $dm \leqslant N$.

Согласно лемме 10, значения d, не превосходящие N, можно распределить среди $\ll N^{\varepsilon_1}$ классов (h произвольно мало). Сначала рассмотрим класс, включающий только значения d с условием $d \ll N^{\frac{1}{3}+h}$. Сумма слагаемых правой части равенства (1), отвечающая заданному значению d этого класса, может быть представлена в форме

$$\mu(d) \sum_{m \leqslant Nd^{-1}} \sigma_{r_1}(m + k_1), \quad r \equiv r_1 + \operatorname{ind} d \,(\operatorname{mod} n), \quad k_1 d \equiv k \,(\operatorname{mod} q)$$

и, следовательно, согласно теореме 1, будет $\ll \sqrt{q}\ln q + \frac{N}{qd}$. Поэтому сумма слагаемых правой части равенства (1), отвечающих всем значениям d рассматриваемого класса, будет

$$\ll N^{\frac{1}{3}+h}\sqrt{q}\ln q + \frac{N}{q}\ln N \ll N^{1+h}G.$$

Сумма слагаемых правой части равенства (1), отвечающая числам d одного из оставшихся классов, с точностью до знака может быть представлена в форме (лемма 10)

$$\frac{1}{H}\sum\sum\sum \sigma_r(xym+k),$$

где x, y, m пробегают не делящиеся на q целые положительные числа, принадлежащие трем возрастающим последовательностям, причем суммирование распространяется на область

$$N^{\frac{1}{3}} < x \leqslant N^{\frac{2}{3}+h}, \quad xym \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Поэтому, согласно лемме 9, указанная сумма будет

$$\ll N^{1+\varepsilon_1}\sqrt{\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} + \frac{N^{\frac{2}{3}+h}}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon_2}G.$$

Наконец, оценим двойную сумму, стоящую в левой части равенства (1). Здесь $N^{\frac{1}{3}} < p_1 \leqslant N^{\frac{2}{3}}\left(p_2 \geqslant N^{\frac{1}{3}}\right)$ и, следовательно, суммирование распространяется на область вида

$$N^{\frac{1}{3}} < p_1 \leqslant N^{\frac{2}{3}}, \quad p_1p_2 \leqslant N, \quad (p_1, p_2) = 1.$$

Поэтому опять можно применить лемму 9 ($m = 1$), согласно которой окажется, что рассматриваемая двойная сумма будет

$$\ll N^{1+\varepsilon_1}\sqrt{\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} + \frac{N^{\frac{2}{3}}}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon_1}G.$$

Собирая все доказанное, мы и убедимся в справедливости нашей теоремы.

Замечание. Обозначая символом V_r число не превосходящих N значений p с условием $\operatorname{ind}(p+k) \equiv r \pmod{n}$, мы можем в доказанном неравенстве теоремы 3 заменить S разностью $V_r - \nu\pi(N)$, отличающейся от S слагаемым порядка G.

Математический институт
имени В. А. Стеклова Академии Наук СССР

Поступило
2. IV. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Новое усовершенствование метода оценки двойных сумм, Доклады Ак. Наук СССР, т. 73, № 4 (1950), 635—638.

[2] Виноградов И. М., Уточнение оценки сумм с простыми числами, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 7 (1943), 17—34.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 309—360

И. М. ГЕЛЬФАНД и Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЕГО СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

В работе даются методы восстановления дифференциального уравнения второго порядка по его спектральной функции $\rho(\lambda)$. Эта задача сводится здесь к некоторому линейному интегральному уравнению. Выясняется также, какие монотонные функции $\rho(\lambda)$ могут служить спектральными функциями дифференциального уравнения второго порядка.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка, заданное на интервале $(0, \infty)$:

$$y'' + (\lambda - q(x))\, y = 0 \tag{1}$$

с граничным условием

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h. \tag{1'}$$

Функция $q(x)$ предполагается непрерывной на любом конечном интервале. Известно, что произвольную функцию с интегрируемым квадратом можно разлагать в интеграл Фурье по собственным функциям этого уравнения при заданном h. Точнее говоря, существует такая монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$, что для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом имеет место равенство

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{2}$$

Здесь $E(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$, т. е.

$$E(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx, \ * \tag{3}$$

где $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения (1) с начальными условиями (1').

Функцию $\rho(\lambda)$ назовем *спектральной функцией* уравнения (1) при условиях (1'). Смысл спектральной функции $\rho(\lambda)$ особенно ясен в случае дискретного спектра. В этом случае $\rho(\lambda)$ есть функция скачков со

---

* В каком смысле этот интеграл сходится, см. в § 1.

скачками в точках спектра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$. Величина скачков равна в этом случае

$$\frac{1}{\int\limits_0^\infty \varphi^2(x, \lambda_n)\, dx}$$

и, таким образом, равенство (2) превращается в равенство Парсеваля для ряда Фурье функции $f(x)$.

Можно, следовательно, сказать, что задание $\rho(\lambda)$ определяет как спектр, так и нормировку собственных функций.

Эта работа посвящена решению следующей задачи. Пусть задана функция $\rho(\lambda)$. Требуется определить, существует ли уравнение вида (1), имеющее данное $\rho(\lambda)$, и дать способ фактического вычисления $q(x)$. Впервые задачей такого типа занимался Амбарцумян ([1]). Единственность решения задачи в такой постановке была установлена В. А. Марченко ([2]). Затем вопросом разрешимости обратной задачи занимался М. Г. Крейн ([3]). Используя созданную им теорию продолжения положительно определенных функций, М. Г. Крейн свел к ней рассматриваемую здесь задачу и получил ряд очень интересных и важных результатов. В частности, своими методами он до конца решил вопрос о необходимых и достаточных условиях для существования струны с распределением масс, имеющей при двух граничных условиях заданные спектры ([3a]).

В настоящей работе указанный выше вопрос разбирается при помощи элементарных средств, а именно, сводится к решению некоторого линейного интегрального уравнения.

Идея этой работы очень проста. Подобно тому как полиномы, ортогональные по данному весу, строятся, ортогонализуя степени x, мы строим по спектральной функции $\rho(\lambda)$ собственные функции $\varphi(x, \lambda)$, «ортогонализуя» по $\rho(\lambda)$ функции $\cos\sqrt{\lambda}t$.

Поясним сказанное сейчас более подробно. Как известно, для уравнения $y'' + \lambda y = 0$ и граничного условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ имеем: $\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}$ для $\lambda > 0$ и $\rho(\lambda) = 0$ для $\lambda < 0$.

Чтобы сделать изложение более выпуклым, предположим пока, что функция $\rho(\lambda)$ имеет вид

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + \sigma(\lambda) & \text{для} \quad \lambda > 0, \\ \sigma(\lambda) & \text{для} \quad \lambda < 0, \end{cases}$$

где функция $\sigma(\lambda)$ достаточно хорошо ведет себя на ∞, а именно, предположим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \cdot |d\sigma(\lambda)| < +\infty.$$

Будем искать собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ в виде *

* Тот факт, что собственные функции могут быть так представлены, доказан в ([4]) и ([5]). Более простое доказательство этого см. в § 1 настоящей работы.

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,x+\int\limits_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt. \tag{4}$$

Здесь мы приведем нестрогие рассуждения, которые обоснованы для более широкого класса функций $\rho(\lambda)$ в самой работе. Мы требуем, чтобы $\varphi(x,\lambda)$ была «ортогональной нормированной системой» с весом $\rho(\lambda)$, т. е. чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)\,d\rho(\lambda)=\delta(x-y),$$

где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака. Так как, в силу (4), при $y<x$ $\varphi(y,\lambda)$ есть комбинация $\cos\sqrt{\lambda}\,t$ для $t\leqslant y$, то, обращая уравнение (4), убеждаемся, что и, обратно, $\cos\sqrt{\lambda}\,y$ есть комбинация $\varphi(t,\lambda)$ для $t\leqslant y$. Поэтому $\cos\sqrt{\lambda}\,y$ ортогонален $\varphi(x,\lambda)$, если $y<x$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,y\,d\rho(\lambda)=0,\quad \text{если}\quad y<x.$$

Подставим сюда вместо $\varphi(x,\lambda)$ его значение из уравнения (4). Мы получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\sqrt{\lambda}\,x\cos\sqrt{\lambda}\,y\,d\rho(\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\sqrt{\lambda}\,y\int\limits_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\,d\rho(\lambda)=0. \tag{5}$$

В таком виде написанные интегралы расходятся. Однако написанному равенству можно придать совершенно точный смысл: именно, представим $\rho(\lambda)$ в виде

$$\rho(\lambda)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\sigma(\lambda),$$

где $\lambda>0$, и заметим, что имеет место следующее символическое равенство:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\sqrt{\lambda}\,t\cos\sqrt{\lambda}\,y\cdot d\sqrt{\lambda}=\delta(y-t),$$

$$y>0,\quad t>0.$$

Тогда, меняя порядок интегрирования в (5) и воспользовавшись символическим равенством

$$\int\limits_0^{+\infty}\delta(y-t)f(t)\,dt=f(y),$$

получим (заметим, что $x \neq y$ и, следовательно, $\delta(x-y)=0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} y \, d\sigma(\lambda) + K(x, y) +$$
$$+ \int_{0}^{x} K(x, t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \sqrt{\lambda} t \cos \sqrt{\lambda} y \, d\sigma(\lambda) \right] dt = 0. \quad (6)$$

Так как функция $\sigma(\lambda)$ задана, то функция

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} y \, d\sigma(\lambda)$$

также известна.

Уравнение (6) при фиксированном x является линейным интегральным уравнением относительно неизвестной функции $K(x, y)$ и имеет вид *

$$f(x, y) + \int_{0}^{x} f(y, t) K(x, t) \, dt + K(x, y) = 0. \quad (7)$$

Мы показываем, что уравнение (7) разрешимо. Найдя $K(x, t)$, мы сможем по формуле (4) найти собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ и, следовательно, восстановить уравнение (1).

Чтобы показать, что построенные функции $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению, поступаем следующим образом.

Мы сначала доказываем (§ 5), что для построенных функций $\varphi(x, \lambda)$ имеет место равенство Парсеваля, определяемое приведенными выше формулами (2) и (3). Используя его и интегральное уравнение (7), мы получаем затем в § 7 функциональное уравнение для функций $\varphi(x, \lambda)$:

$$\varphi(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda} t = \frac{1}{2} \left[\varphi(x+t, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda) \right] + \int_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, s) \varphi(s, \lambda) \, ds, \quad (8)$$

где функция $W(x, t, s)$ строится по функции $K(x, t)$. Для получения дифференциального уравнения вычтем из обеих частей равенства (8) $\varphi(x, \lambda)$ и разделим на t^2. Мы получим

$$\varphi(x, \lambda) \frac{\cos \sqrt{\lambda} t - 1}{t^2} = \frac{\varphi(x+t, \lambda) - 2\varphi(x, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)}{2t^2} +$$
$$+ \frac{1}{t^2} \int_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, s) \varphi(s, \lambda) \, ds.$$

Перейдя к пределу при $t \to 0$, получаем

$$-\frac{1}{2} \lambda \varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2} \varphi''(x, \lambda) - \frac{1}{2} q(x) \varphi(x, \lambda),$$

* Строгий вывод этого уравнения и точные условия на функцию $\sigma(\lambda)$ см. в § 3, 4.

где мы обозначили

$$-\frac{1}{2}q(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t}W(x,\ t,\ s)\,ds.$$

Существование всех пределов доказывается в § 7.

Заметим, что функция $q(x)$ в уравнении (1) может быть и непосредственно построена по $K(x,\ t)$ при помощи следующей формулы, приведенной в § 1:

$$\frac{1}{2}q(x)=\frac{dK(x,\ x)}{dx}.$$

Для приближенного решения поставленной задачи можно использовать выведенное в § 2 нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра.

Сформулируем основной результат работы. В работе, в известном смысле, даны необходимые и достаточные условия существования уравнения с заданной функцией $\rho(\lambda)$. А именно, эти условия являются достаточными для существования уравнения с непрерывной функцией $q(x)$ и необходимыми, если $q(x)$ имеет непрерывную производную. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть на всей оси задана монотонная функция* $\rho(\lambda)$. *Представим ее в виде*

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\sigma(\lambda) & \textit{для}\quad \lambda\geqslant 0,\\ \sigma(\lambda) & \textit{для}\quad \lambda\leqslant 0.\end{cases}$$

Предположим, что $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1°. *Для всякого* $x>0$ *существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{0}e^{\sqrt{|\lambda|}\,x}\,d\rho(\lambda).$$

2°. *Функция*

$$a(x)=\int_{1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)$$

имеет непрерывную четвертую производную.

Если функция $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет условиям* 1°, 2°, *то существует непрерывная функция* $q(x)$ *и такое* h, *что* $\rho(\lambda)$ *является спектральной функцией уравнения* (1) *с граничными условиями* (1′). *Обратно, если функция* $q(x)$ *имеет непрерывную производную, то отвечающая ей спектральная функция* $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет условиям* 1°, 2°.

По функции $\sigma(\lambda)$ можно судить о степени гладкости $q(x)$, а именно, если функция $a(x)$ имеет производные порядка $n+4$, то $q(x)$ имеет n производных. Обратно, можно показать, что если $q(x)$ имеет $n+1$-ую непрерывную производную, то $a(x)$ имеет непрерывные производные порядка $n+4$.

Так как все условия, наложенные на спектральную функцию $\rho(\lambda)$, относятся лишь к ее поведению на $+\infty$, то можно сделать следующий интересный вывод. *Спектральная функция* $\rho(\lambda)$ *на конечном интервале может быть произвольной монотонной функцией.* Более того, если на конечном интервале взять $\rho(\lambda)$ произвольной монотонной функцией, продолжив ее так, чтобы, начиная с некоторого $\lambda>0$, она имела вид $\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}$, то функция $f(x, y)$, а значит, и $K(x, y)$, следовательно, и $q(x)$ будут аналитическими функциями. Таким образом можно построить уравнение с аналитическими коэффициентами и сколь угодно плохим поведением на конечном интервале спектральной функции $\rho(\lambda)$.

Доказательства, приведенные в статье, иногда громоздки, хотя по идее просты. Все доказательства значительно упрощаются, если предположить, что для $\lambda>0$

$$\rho(\lambda)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\sigma(\lambda),$$

где $\int\limits_1^\infty \lambda\,|d\sigma(\lambda)|<+\infty$, для случая непрерывного спектра (и аналогичное этому неравенство для случая чисто точечного спектра).

В § 8 разбирается случай, когда спектральная функция является ортогональной спектральной функцией. Это есть аналог так называемого определенного случая проблемы моментов. Отметим, что нами в неопределенном случае указаны все (а не только ортогональные) спектральные функции.

Заметим также, что для случая, когда весь спектр лежит на полуоси (a, ∞), всегда имеет место определенный случай (см. § 8).

В последнем параграфе рассматривается классическая задача о собственных значениях для уравнения

$$y''+(\lambda-q(x))\,y=0$$

на конечном интервале (a, b) и с граничными условиями в a и b.

Если обозначить через $\varphi_n(x)$ собственные функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_n(a)=1, \qquad \varphi_n'(a)=0,$$

и если λ_n — собственные значения, а $\rho_n=\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)\,dx$, то полученный результат можно сформулировать так: *по всякой последовательности чисел* λ_n *и* ρ_n, *удовлетворяющих обычным асимптотическим равенствам, можно построить функцию* $q(x)$. Более подробно см. соответствующий параграф.

§ 1. Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях второго порядка

1. Пусть $q(x)\,(0\leqslant x\leqslant\infty)$ есть непрерывная в каждом конечном интервале действительная функция. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''+(\lambda-q(x))\,y=0, \tag{1.1}$$

где λ — действительное число. Обозначим через $\varphi_1(x, \lambda)$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_1'(0, \lambda) = 0,$$

а через $\varphi_2(x, \lambda)$ — решение того же уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_2(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2'(0, \lambda) = 1.$$

Далее, обозначим через h произвольное действительное число. Тогда функция

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_1(x, \lambda) + h\varphi_2(x, \lambda)$$

есть также решение уравнения (1.1) и удовлетворяет граничному условию

$$\varphi'(0, \lambda) - h\varphi(0, \lambda) = 0. \tag{1.2}$$

Если $h = 0$, то $\varphi(x, \lambda) = \varphi_1(x, \lambda)$. При $h = \infty$ мы полагаем, по определению, $\varphi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda)$.

Известно, что для каждой функции $q(x)$ и каждого фиксированного h существует по крайней мере одна неубывающая функция $\rho(\lambda)\,(-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty)$ такая, что для каждой функции $f(x) \in L_2(0, \infty)$ функции

$$E_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx$$

сходятся в среднем квадратичном по мере $\rho(\lambda)$ к некоторой функции $E(\lambda)$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [E(\lambda) - E_n(\lambda)]^2\,d\rho(\lambda) = 0.$$

При этом имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) = \int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Функция $\rho(\lambda)$ называется *спектральной функцией* уравнения (1.1) при условиях (1.2).

2. В этом пункте мы выведем формулы, выражающие собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (1.1) через $\cos\sqrt{\lambda}\,x$, и аналогичные формулы, выражающие $\cos\sqrt{\lambda}\,x$ через $\varphi(x, \lambda)$. Эти формулы рассматривались ранее в ([4]) и ([5]). Здесь дается новый вывод этих формул.

Предположим, что существует функция $K(x, t)\,(t \leqslant x)$, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядка, такая, что

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x K(x, t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt. \tag{1.4}$$

Выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $K(x, t)$ для того, чтобы $\varphi(x, \lambda)$ являлась решением уравнения (1.1). Дифференцируя (1.4) дважды по x, мы получим:

$$\varphi''(x, \lambda) = -\lambda \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{dK(x, x)}{dx} \cos \sqrt{\lambda} x - \sqrt{\lambda} K(x, x) \sin \sqrt{\lambda} x +$$

$$+ \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\Big|_{t=x} \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} \cos \sqrt{\lambda} t \, dt. \tag{1.5}$$

Проинтегрируем теперь выражение

$$\lambda \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t \cdot dt$$

дважды по частям. Получим:

$$\lambda \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t \, dt = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x \; K(x, x) + \frac{\partial K(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=t} \cos \sqrt{\lambda} x -$$

$$- \frac{\partial K(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} - \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} \cos \sqrt{\lambda} t \; dt.$$

Вставляя это выражение и (1.5) в уравнение (1.1), мы получим после приведения подобных членов:

$$\frac{dK(x, x)}{dx} \cdot \cos \sqrt{\lambda} x + \left(\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\right)_{x=t} \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{\partial K(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} -$$

$$- q(x) \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(x) K(x, t)\right] \cos \sqrt{\lambda} t \, dt = 0.$$

В силу единственности разложения функции в интеграл Фурье-Стильтьеса, из последнего уравнения следует уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - q(x) K(x, t) = \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

и граничные условия

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.7}$$

$$\frac{dK(x, x)}{dx} = \frac{1}{2} q(x). \tag{1.8}$$

Чтобы найти из (1.8) функцию $K(x, x)$, следует знать $K(0, 0)$. Если $\varphi(x, \lambda)$ представляется в виде (1.4), то очевидно, что

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = K(0, 0). \tag{1.8'}$$

Поэтому для того чтобы $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяла граничному условию (1.2), следует положить $K(0, 0) = h$. Таким образом, из (1.8) следует

$$K(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) \, dt. \tag{1.9}$$

Если функция $q(x)$ имеет непрерывную производную, то, как известно, существует единственное решение уравнения (1.6), удовлетворяющее

условиям (1.7) и (1.9). Поэтому функция $K(x,t)$, удовлетворяющая (1.4), существует. Решая уравнение (1.4) как уравнение Вольтерра с неизвестной функцией $\cos\sqrt{\lambda}\, t$, мы получим

$$\cos\sqrt{\lambda}\, x = \varphi(x, \lambda) - \int_0^x K_1(x, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt. \tag{1.10}$$

Аналогично предыдущему, можно показать, что $K_1(x, t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 K_1(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K_1(x, t)}{\partial t^2} - q(t)\, K_1(x, t),$$

удовлетворяющее условиям

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial t} - hK_1\right)_{t=0} = 0,$$

$$K_1(x, x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(x)\, dx.$$

Ясно, что формулы (1.4) и (1.10) имеют место и при $\lambda < 0$.

Далее, из формулы (1.4) видно, что, зная $K(x, t)$, мы будем знать собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (1.1), а значит, и самое уравнение, так как

$$\lambda - q(x) = -\frac{\varphi''(x, \lambda)}{\varphi(x, \lambda)}.$$

3. Рассмотрим теперь отдельно случай $h = \infty$. Положим

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x L(x, t)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}}\, dt. \tag{1.4'}$$

Рассуждая так же, как и прежде, мы получим для $L(x, t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 L(x, t)}{\partial x^2} - q(x)\, L(x, t) = \frac{\partial^2 L(x, t)}{\partial t^2}$$

и начальные условия

$$L(x, 0) = 0,$$

$$L(x, x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(x)\, dx.$$

Решая уравнение (1.4′) относительно неизвестной функции $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}}$, мы получим

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}} = \psi(x, \lambda) - \int_0^x L_1(x, t)\, \psi(t, \lambda)\, dt. \tag{1.10'}$$

Таким образом, мы получили формулы, аналогичные формулам (1.4) и (1.10). При этом функции $L(x, t)$ и $L_1(x, t)$ обладают теми же свойствами, что и функции $K(x, t)$ и $K_1(x, t)$.

Мы предполагали в пп. 2 и 3, что функция $q(x)$ имеет непрерывную производную. В этом случае функции $K(x, t)$, $K_1(x, t)$ из п. 2 и аналогичные функции из п. 3 имеют непрерывные вторые производные. Если

предположить, что $q(x)$ просто непрерывна, то можно поступить следующим образом. Аппроксимируем $q(x)$ последовательностью функций $q_n(x)$, имеющих непрерывную производную. Соответствующие им функции $K_n(x, t)$ имеют непрерывные вторые производные и сходятся к функции $K(x, t)$. Сама функция $K(x, t)$ заведомо имеет первые производные, но может не иметь вторых производных. Однако построенные по $K(x, t)$ функции $\varphi(x, \lambda)$ имеют вторые производные и удовлетворяют уравнению (1.1). Действительно,

$$\varphi_n''(x, \lambda) + (\lambda - q_n(x))\varphi_n(x, \lambda) = 0.$$

Так как $K_n \to K$, то φ_n сходятся равномерно по x к $\varphi(x, \lambda)$, а значит, и $\varphi_n''(x, \lambda)$ равномерно сходятся, т. е. $\varphi(x, \lambda)$ имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет уравнению (1.1).

§ 2. Вывод нелинейного интегрального уравнения

1. Рассмотрим сначала случай $h \neq \infty$. Интегрируя обе части формулы (1.10) от 0 до x, мы получим, меняя порядок интегрирования,

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^x \varphi(t, \lambda)\,dt - \int_0^x \varphi(t, \lambda)\,dt \int_t^x K_1(u, t)\,du =$$

$$= \int_0^x \varphi(t, \lambda)\left[1 - \int_t^x K_1(u, t)\,du\right] dt.$$

Зафиксируем в этой формуле x. Тогда написанное равенство означает, что $\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ * есть преобразование Фурье по собственным функциям уравнения (1.1) следующей функции от t:

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} 1 - \int_t^x K_1(u, t)\,du, & t \leqslant x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Из равенства Парсеваля (1.3) следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \sin\sqrt{\lambda}y}{\lambda}\,d\rho(\lambda) = \int_0^y \Phi(x, t)\,\Phi(y, t)\,dt =$$

$$= \int_0^y dt - \int_0^y dt \int_t^x K_1(u, t)\,du - \int_0^y dt \int_t^y K_1(u, t)\,dt +$$

$$+ \int_0^y dt \int_t^x K_1(u,t)\,du \int_t^y K_1(v,t)\,dv.$$

Если в последней формуле положить, в частности, $x = y$, то мы полу-

---

* При $\lambda < 0$ под $\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ следует, конечно, понимать $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{|\lambda|}x}{\sqrt{|\lambda|}}$.

чим (так как правая часть равенства имеет смысл), что при каждом $x>0$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{sh}^2 \sqrt{|\lambda|}\, x}{|\lambda|} d\rho(\lambda),$$

а значит, и интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, x \, d\rho(\lambda).$$

Этот факт был уже ранее отмечен В. А. Марченко [2].

Перейдем к выводу интегрального уравнения для $K_1(x, y)$. Так как

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}\, t \, dt,$$

то из формулы Парсеваля для обычных итегралов Фурье следует $(y \leqslant x)$

$$\int_0^y dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} y}{\lambda} d(\sqrt{\lambda}).$$

Поэтому $(y \leqslant x)$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \cdot \sin \sqrt{\lambda} y}{\lambda} d\sigma(\lambda) = -\int_0^y dt \int_t^x K_1(u, t)\, du -$$

$$-\int_0^y dt \int_t^y K_1(u, t)\, du + \int_0^y dt \int_t^x K_1(u, t)\, du \int_t^y K_1(v, t)\, dv, \tag{2.1}$$

где

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}, & \lambda \geqslant 0, \\ \rho(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Так как правая часть равенства имеет смешанную производную, то существует $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, и, дифференцируя обе части равенства (2.1), мы получим для $K_1(x, y)$ нелинейное интегральное уравнение $(y \leqslant x)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y) = -K_1(x, y) + \int_0^y K_1(x, t) K_1(y, t)\, dt. \tag{I}$$

Под $F(x, y)$ мы понимаем

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \cdot \sin \sqrt{\lambda} y}{\lambda} d\sigma(\lambda). \tag{2.2}$$

В случае, если $\sigma(\lambda)$ ведет себя на $+\infty$ достаточно правильно (например, $\operatorname{var}[\sigma(\lambda)] < +\infty$), $f(x, y)$ можно непосредственно задавать формулой

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \sqrt{\lambda} x . \cos \sqrt{\lambda} y \, d\sigma(\lambda). \tag{2.2'}$$

Так как $K_1(x, x-0)$ — непрерывная функция и $f(x, y) = f(y, x)$, то из уравнения (I) следует, что функция $f(x, y)$ непрерывна для всех значений аргументов.

Пусть ε — произвольное положительное число. Из формулы (2.1) следует, что равномерно в каждой конечной области существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x+\varepsilon, y+\varepsilon)-F(x-\varepsilon, y+\varepsilon)-F(x+\varepsilon, y-\varepsilon)+F(x-\varepsilon, y-\varepsilon)}{4\varepsilon^2} =$$

$$=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\varepsilon\sqrt{\lambda}}{\varepsilon\sqrt{\lambda}}\right)^2\cos\sqrt{\lambda}\,x\cos\sqrt{\lambda}\,y\,d\sigma(\lambda).$$

В частности, полагая $x = y$, мы получим равномерно в каждом конечном интервале при $\varepsilon\to 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\varepsilon\sqrt{\lambda}}{\lambda}\cos^2\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda)=o(\varepsilon).$$

При $x = 0$ мы получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\varepsilon\sqrt{\lambda}}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)=o(\varepsilon).$$

Из последних двух равенств следует, что равномерно в каждом конечном интервале

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\varepsilon\sqrt{\lambda}}{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda)=o(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Условие (2.3) играет в дальнейшем важную роль.

2. Аналогично выводится интегральное уравнение для $h=\infty$. Интегрируя обе части равенства (1.9') в пределах $(0, x)$, мы получим

$$\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}=\int_0^x\psi(t,\lambda)\,\Phi(x,t)\,dt,$$

где

$$\Phi(x,t)=\begin{cases}1-\int_t^x L_1(u,t)\,du, & t\leqslant x,\\ 0, & t>x.\end{cases}$$

Поэтому из равенства Парсеваля следует $(y\leqslant x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\cos\sqrt{\lambda}\,x)\,(1-\cos\sqrt{\lambda}\,y)}{\lambda^2}\,d\rho(\lambda)=\int_0^y dt-\int_0^y dt\int_t^x L_1(u,t)\,du-$$

$$-\int_0^y dt\int_t^y L_1(u,t)\,dt+\int_0^y dt\int_t^x L_1(u,t)\,du\int_t^y L_1(v,t)\,dv.$$

Так как

$$\int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\,dt = \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}x}{\lambda},$$

то из формулы Парсеваля для обычных интегралов Фурье следует, что при $y \leqslant x$

$$\int_0^y dt = \frac{2}{3\pi}\int_0^\infty \frac{(1-\cos\sqrt{\lambda}x)\,(1-\cos\sqrt{\lambda}y)}{\lambda^2}\,d(\lambda^{3/2}).$$

Поэтому

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos\sqrt{\lambda}x)\,(1-\cos\sqrt{\lambda}y)}{\lambda^2}\,d\sigma(\lambda) = -\int_0^y dt \int_t^x L_1(u, t)\,du -$$

$$-\int_0^y dt \int_t^y L_1(u, t)\,du + \int_0^y dt \int_t^x L_1(u, t)\,du \int_t^y L_1(v, t)\,dv,$$

где

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda) - \frac{2}{3\pi}\lambda^{3/2}, & \lambda \geqslant 0 \\ \rho(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Рассуждая, как в п. 1, мы получим для $L_1(x, y)$ нелинейное интегральное уравнение ($y \leqslant x$):

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y} = f(x, y) = -L_1(x, y) + \int_0^y L_1(x, t)\,L_1(y, t)\,dt.$$

Вместо условия (2.3) мы получим условие, что при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon\sqrt{\lambda}}{\lambda} \cdot \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}x}{\lambda}\,d\sigma(\lambda) = o(\varepsilon) \tag{2.3'}$$

равномерно в каждом конечном интервале.

§ 3. Вывод линейного интегрального уравнения

Для функции $K(x, t)$, переводящей $\cos\sqrt{\lambda}x$ в $\varphi(x, \lambda)$ [формула (1.8)], мы выведем основное для дальнейшего линейное интегральное уравнение. Его легко получить из нелинейного уравнения. Однако мы выведем его непосредственно, так как в дальнейшем (при построении $K(x, t)$ по $\rho(\lambda)$) мы будем пользоваться приведенными ниже рассуждениями.

Это уравнение имеет следующий вид:

$$f(x, y) + \int_0^x K(x, s)\,f(s, y)\,ds + K(x, y) = 0 \quad (y \leqslant x), \tag{II}$$

где функция $f(x, y)$ определена в предыдущем параграфе.

Перейдем к выводу этого уравнения. Докажем предварительно, что для $b < y < a < x$ функции

$$\int_a^x \varphi(t, \lambda)\, dt \quad \text{и} \quad \int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt$$

ортогональны по мере $\rho(\lambda)$, т. е. что

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^x \varphi(t, \lambda)\, dt \right] \left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt \right] d\rho(\lambda) = 0. \tag{3.1}$$

Для вывода (3.1) выразим $\cos\sqrt{\lambda}\, t$ через $\varphi(t, \lambda)$ по формуле (1.10):

$$h(b, y) = \int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt =$$
$$= \int_b^y \varphi(t, \lambda)\, dt - \int_b^y dt \int_0^t K_1(t, s)\, \varphi(s, \lambda)\, ds =$$
$$= \int_b^y \varphi(t, \lambda)\, dt - \int_0^b \varphi(s, \lambda)\, ds \int_b^y K_1(t, s)\, dt - \int_b^y \varphi(s, \lambda)\, ds \int_s^y K_1(t, s)\, dt.$$

Поэтому функция $h(b, y)$ есть преобразование Фурье (по функциям $\varphi(t, \lambda)$) функции, равной нулю вне интервала (b, y). Так как интервалы (b, y) и (a, x) не перекрываются, то, в силу равенства Парсеваля (1.3), $I = 0$.

Для вывода интегрального уравнения (II) выразим теперь в равенстве (3.1) $\varphi(t, \lambda)$ через $\cos\sqrt{\lambda}\, t$ [по формуле (1.4)]:

$$\int_a^x \varphi(t, \lambda)\, dt = \int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt + \int_0^a \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int_a^x K(t, s)\, dt +$$
$$+ \int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int_s^x K(t, s)\, dt.$$

Поэтому

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \right] \left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \right] d\rho(\lambda) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^a \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int_a^x K(t, s)\, dt + \right.$$
$$\left. + \int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int_s^x K(t, s)\, dt \right] \left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \right] d\rho(\lambda) = 0. \tag{3.1'}$$

В силу формулы Парсеваля для обычных интегралов Фурье,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \right] \left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \right] d(\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{3.2}$$

Вычитая из равенства (3.1′) равенство (3.2), мы получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds\right]\left[\int\limits_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds\right] d\sigma(\lambda) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^a \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int\limits_a^x K(t, s)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int\limits_s^x K(t, s)\, dt\right]\left[\int\limits_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds\right] d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\int\limits_0^a \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int\limits_a^x K(t, s)\, dt + \int\limits_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int\limits_s^x K(t, s)\, dt\right] \cdot$$

$$\cdot\left[\int\limits_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds\right] d(\lambda^{1/2}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin\sqrt{\lambda}\, x - \sin\sqrt{\lambda}\, a)\,(\sin\sqrt{\lambda}\, y - \sin\sqrt{\lambda}\, b)}{\lambda}\, d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^a \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int\limits_a^x K(t, s)\, dt + \int\limits_a^x \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds \int\limits_s^x K(t, s)\, dt\right] \cdot$$

$$\cdot\left[\int\limits_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds\right] d\sigma(\lambda) + \int\limits_b^y ds \int\limits_a^x K(t, s)\, dt = 0. \qquad (3.3)$$

Определение $\sigma(\lambda)$ см. в предыдущем параграфе. Слагаемое $\int\limits_b^y ds \int\limits_a^x K(t,s)dt$ получилось здесь применением равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье из последнего слагаемого левой части.

Положим, как и ранее,

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x . \sin\sqrt{\lambda}\, y}{\lambda}\, d\sigma(\lambda).$$

Если выражение для $F(x, y)$ можно было бы дифференцировать под знаком интеграла, то интегральное уравнение (II) получилось бы непосредственно из (3.3) дифференцированием. Чтобы не накладывать на $\sigma(\lambda)$ лишних ограничений, поступим следующим образом. Положим

$$H(x, s) = \begin{cases} \int\limits_a^x K(t, s)\, dt, & 0 \leqslant s \leqslant a, \\ \int\limits_s^x K(t, s)\, dt, & a \leqslant s \leqslant x, \\ 0, & s > x. \end{cases}$$

Уравнение (3.3) можно переписать в виде

$$F(x, y) - F(x, b) - F(a, y) + F(a, b) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^x H(x, s)\cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds\right]\left[\int\limits_b^y \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds\right] d\sigma(\lambda) + \int\limits_b^y ds\left[\int\limits_a^x K(t, s)\, dt\right] = 0. \qquad (3.4)$$

Так как $H(x, x) = 0$ и $\frac{\partial H}{\partial s}$ ограничена, то, интегрируя по частям, мы получим

$$F(x, y) - F(x, b) - F(a, y) + F(a, b) -$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^x \frac{\partial H}{\partial s}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}}\,ds\right]\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}y - \sin\sqrt{\lambda}b}{\sqrt{\lambda}}\right]d\sigma(\lambda) + \int_b^y ds\int_a^x K(t, s)\,dt = 0.$$

Меняя порядок интегрирования, найдем

$$F(x, y) - F(x, b) - F(a, y) + F(a, b) -$$
$$-\int_0^x \frac{\partial H}{\partial s}\cdot[F(s, y) - F(s, b)]\,ds + \int_b^y ds\int_a^x K(t, s)\,dt = 0.$$

Интегрированием по частям получаем равенство

$$\int_0^x \frac{\partial H}{\partial s}[F(s, y) - F(s, b)]\,ds = -\int_0^x H(x, s)\left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, b)}{\partial s}\right]ds.$$

Поэтому имеет место следующее уравнение:

$$F(x, y) - F(x, b) - F(a, y) + F(a, b) +$$
$$+\int_0^x H(x, s)\left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, b)}{\partial s}\right]ds + \int_b^y ds\int_a^x K(t, s)\,dt = 0. \qquad (3.5)$$

Меняя порядок интегрирования, легко установить, что

$$\int_0^x H(x, s)\left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, b)}{\partial s}\right]ds = \int_a^x dt\int_0^t K(t, s)\left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, b)}{\partial s}\right]ds.$$

Поэтому из уравнения (3.5) следует уравнение

$$F(x, y) - F(x, b) - F(a, y) + F(a, b) +$$
$$+\int_a^x dt\int_0^t K(t, s)\left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, b)}{\partial s}\right]ds + \int_b^y ds\int_a^x K(t, s)\,dt = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по x и по y, мы получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \int_0^x K(x, s)\frac{\partial^2 F(s, y)}{\partial s\cdot\partial y}\,ds + K(x, y) = 0.$$

Полагая $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = f(x, y)$, приходим к интегральному уравнению:

$$f(x, y) + \int_0^x K(x, s) f(s, y)\,ds + K(x, y) = 0 \quad (y \leqslant x). \qquad (II)$$

При каждом фиксированном x уравнение (II) есть линейное уравнение Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром $f(s, y)$ и неизвестной функцией $K(x, y)$ (x — фиксировано!).

§ 4. Исследование линейного интегрального уравнения

1. Начиная с этого параграфа, мы будем заниматься обратной задачей, а именно, построением дифференциального уравнения

$$y'' + (\lambda - q(x))\, y = 0$$

по спектральной функции $\rho(\lambda)$. Мы получим условия на функцию $\rho(\lambda)$, которые достаточны для того, чтобы существовало дифференциальное уравнение с непрерывной функцией $q(x)$. Эти условия являются также необходимыми, если потребовать, чтобы функция $q(x)$ имела непрерывную производную.

Эти условия следующие:

1°. *При всяком x существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\, x}\, d\rho(\lambda)\,.$$

2°. *Положим $\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + \sigma(\lambda)$ для $\lambda > 0$ и $\rho(\lambda) = \sigma(\lambda)$ для $\lambda < 0$. Требуется, чтобы функция*

$$a(x) = \int_{1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\sigma(\lambda) \tag{4.1}$$

имела непрерывную четвертую производную.

Из условий 1° и 2° легко следует, что функция

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, y}{\lambda}\, d\sigma(\lambda) \tag{4.2}$$

имеет непрерывные четвертые производные.

Заметим, что, обратно, из дифференцируемости (4.2) следует дифференцируемость (4.1).

Необходимость условия 1° была доказана ранее. Если $q(x)$ имеет непрерывную производную, то $K(x, t)$ имеет непрерывную вторую производную. Из нелинейного интегрального уравнения следует, что $f(x, y)$ имеет непрерывную вторую производную, а значит, функция $F(x, y)$, определяемая формулой

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, y}{\lambda}\, d\sigma(\lambda)\,,$$

имеет непрерывные четвертые производные.

В силу условия 1°,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, y}{\lambda} \cdot d\sigma(\lambda)$$

имеет также четвертые производные. Отсюда следует, что $a(x)$ также имеет четвертые производные.

Ясно, что и, обратно, из условий 1° и 2° следует, что $F(x, y)$ имеет непрерывные четвертые производные.

Мы исключим пока из рассмотрения случай, когда спектр — чисто дискретный, стремящийся к $+\infty$. Этот случай будет отдельно рассмотрен в § 8.

Так как, по условию, $f(x, y)$ — непрерывная функция, то

$$f(x, y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(x+\varepsilon, y+\varepsilon) - F(x-\varepsilon, y+\varepsilon) - F(x+\varepsilon, y-\varepsilon) + F(x-\varepsilon, y-\varepsilon)}{4\varepsilon^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{\lambda}}\right)^2 \cos\sqrt{\lambda}\, x \cos\sqrt{\lambda}\, y\, d\sigma(\lambda). \tag{4.3}$$

Как показано в § 2, отсюда следует, что при $\varepsilon\to 0$ равномерно в каждом конечном интервале изменения x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\varepsilon}{\lambda}\cdot \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\sigma(\lambda) = o(\varepsilon). \tag{4.3'}$$

По теореме о среднем значении, для $\lambda < 0$ имеем

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}\,\varepsilon} = \operatorname{ch}\sqrt{|\lambda|}\,\theta\varepsilon \quad (0<\theta<1).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{\lambda}}\right)^2 \cos\sqrt{\lambda}x\, d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \operatorname{ch}^2\sqrt{\lambda}\,\theta\varepsilon\cdot\operatorname{ch}\sqrt{|\lambda|}\, x\, d\rho(\lambda) < A < \infty$$

равномерно в каждом конечном интервале. Отсюда равномерно в каждом конечном интервале при $\varepsilon\to 0$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{\lambda} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\rho(\lambda) = o(\varepsilon)$$

и, значит, в силу (4.3′), при $\varepsilon\to 0$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{\lambda} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\sigma(\lambda) = o(\varepsilon) \tag{4.4}$$

равномерно в каждом конечном интервале. Условие (4.4) играет в последующем существенную роль.

Нам понадобится далее неравенство

$$\int_{a}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda} < +\infty, \quad a > 0.$$

Докажем его. Полагая в (4.3) $x = y = 0$, имеем:

$$\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}\right)^2 d\sigma(\lambda) = O(1).$$

В силу обычного равенства Парсеваля, имеем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}\varepsilon}\right)^2 d\sqrt{\lambda} = \varepsilon^{-1}.$$

Поэтому для $\rho(\lambda)$ получаем

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\varepsilon}{\sqrt{\lambda}\varepsilon}\right)^2 d\rho(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon} + O(1).$$

Так как для $\varepsilon\sqrt{\lambda} \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\frac{\sin\varepsilon\sqrt{\lambda}}{\varepsilon\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2}{\pi}$, то

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\varepsilon}{\sqrt{\lambda}\varepsilon}\right)^2 d\rho(\lambda) \geqslant \int_0^{\frac{1}{\varepsilon^2}} \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\varepsilon}{\sqrt{\lambda}\varepsilon}\right)^2 d\rho(\lambda) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{\pi^2}\int_0^{1/\varepsilon^2} d\rho(\lambda) = \frac{4}{\pi^2}\left(\rho\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) - \rho(0)\right).$$

Таким образом,

$$\rho\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) - \rho(0) \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon} + O(1)\right)$$

и, значит,

$$\rho(\lambda) \leqslant c\sqrt{\lambda} + O(1).$$

Отсюда легко следует, что $\int_a^\infty \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda}$ сходится.

2. Пусть задана функция $\rho(\lambda)$, удовлетворяющая условиям 1° и 2° и имеющая бесконечное число точек роста на каком-либо конечном интервале. Построим по ней функции

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}y}{\lambda}\, d\sigma(\lambda) \quad \text{и} \quad f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *При фиксированном x интегральное уравнение*

$$f(x, y) + \int_0^x f(y, s)\,K(x, s)\,ds + K(x, y) = 0 \tag{4.5}$$

относительно неизвестной функции $K(x, y)$ имеет решение и притом единственное.

Доказательство. Как известно, для разрешимости уравнения (4.5) достаточно, чтобы однородное уравнение (x фиксировано)

$$\int_0^x f(s, y)\,h(s)\,ds + h(y) = 0 \tag{4.6}$$

не имело решения, отличного от тривиального. Для этого докажем, что квадратичная форма

$$I(g)=\int_0^x\int_0^x f(s, y)\, g(s)\, g(y)\, ds\, dy+\int_0^x g^2(y)\, dy>0 \tag{4.7}$$

для любой функции $g(y)$, не равной нулю.

Предположим сначала, что $g(y)$ $(0\leqslant y\leqslant x)$ такова, что

1) $g(x)=0$,

2) $g'(y)$ непрерывна для $0\leqslant y\leqslant x$.

Так как $f(y, s)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial s}$, то, интегрируя в (4.7) первое слагаемое по частям, мы получим

$$I(g)=\int_0^x g^2(y)\, dy+\int_0^x\int_0^x F(y, s)\, g'(y)\, g'(s)\, dy\, ds=$$

$$=\int_0^x g^2(y)\, dy+\int_0^x\int_0^x g'(y)\, g'(s)\, dy\, ds\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}}\, d\rho(\lambda)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^x\int_0^x g'(y)\, g'(s)\, dy\, ds\int_0^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}}\, d(\sqrt{\lambda})=$$

$$=\int_0^x g^2(y)\, dy+\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(\lambda)\, d\rho(\lambda)-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} G^2(\lambda)\, d(\sqrt{\lambda}),$$

где

$$G(\lambda)=\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}\, g'(t)\, dt=\int_0^x\cos\sqrt{\lambda}\,t\cdot g(t)\, dt.$$

В силу равенства Парсеваля, для обычных интегралов Фурье

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} G^2(\lambda)\, d(\sqrt{\lambda})=\int_0^x g^2(y)\, dy.$$

Поэтому

$$I(g)=\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(\lambda)\cdot d\rho(\lambda). \tag{4.8}$$

Покажем, что из $I(g)=0$ следует $g(t)=0$. Так как

$$G(\lambda)=\int_0^x\cos\sqrt{\lambda}t\cdot g(t)\, dt,$$

то она есть целая аналитическая функция экспоненциального роста относительно λ. Поэтому $G(\lambda)$ может иметь лишь изолированные нули с предельной точкой на ∞. Если $\rho(\lambda)$ имеет на каком-нибудь конечном

интервале бесконечное число точек роста, то из равенства $I(g)=0$, в силу (4.8), следует, что $G(\lambda)=0$, т. е.

$$\int_0^x \cos\sqrt{\lambda}\, t\, g(t)\, dt = 0$$

и, значит, $g(t)=0$.

Пусть теперь $g(y)$ — непрерывная ограниченная функция, не удовлетворяющая условиям 1) и 2). Пусть $g_n(y)$ при $n \to \infty$ в среднем квадратичном сходятся к $g(y)$ и удовлетворяют условиям 1) и 2). Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} I(g_n) = I(g).$$

Поэтому

$$I(g) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_n^2(\lambda)\, d\rho(\lambda),$$

где

$$G_n(\lambda) = \int_0^x g_n(y) \cos\sqrt{\lambda}\, y\; dy.$$

Так как $g_n(y)$ сходятся в среднем к $g(y)$, то $G_n(\lambda)$ сходятся равномерно к $G(\lambda)$. Если $I(g)=0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_n^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) \to 0,$$

то, так как подинтегральные функции неотрицательные и стремятся к пределу, это возможно лишь при $G(\lambda)\equiv 0$. Отсюда, как и раньше, мы получаем, что $g(t)=0$.

Покажем теперь, что однородное уравнение (4.6) имеет лишь тривиальное решение. Действительно, пусть $g(t)$ есть решение уравнения (4.6). Умножим его на $g(y)$ и проинтегрируем от 0 до x. Мы получим $I(g)=0$ и, значит, $g(y)\equiv 0$. Итак, мы доказали, что линейное уравнение (4.5) разрешимо.

Так как, по предположению, $f(x, y)$ — непрерывная функция, то из уравнения (4.5) следует, что при каждом фиксированном x функция $K(x, y)$ по переменной y непрерывна для $y \leqslant x$. Далее, из того же уравнения следует, что если существуют непрерывные производные $\frac{\partial^r f}{\partial y^r}$ $(r=1, 2, \ldots, n)$, то существуют также непрерывные производные $\frac{\partial^r K(x, y)}{\partial y^r}$.

3. Исследование поведения функции $K(x, y)$ по первому аргументу проводится несколько сложнее. Воспользуемся для этого следующей леммой.

ЛЕММА. *Пусть дано интегральное уравнение*

$$g(x, a) = h(x, a) + \int_0^1 H(x, y; a)\, h(y, a)\, dy, \tag{4.9}$$

в котором ядро и свободный член $g(x, a)$ являются непрерывными функциями параметра a и независимых переменных. Тогда, если при $a = a_0$ однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение, то в некоторой окрестности точки $a = a_0$ решение $h(x, a)$ есть непрерывная функция x и a. Если же H и g имеют n непрерывных производных по a, то столько же производных по a имеет $h(x, a)$.

Доказательство. Положим

$$H(x, y, a) = H(x, y, a_0) + H_1(x, y) = H_0 + H_1,$$

причем $|H_1(x, y)| < \varepsilon$, если a находится в некоторой достаточно малой окрестности точки a_0. Уравнение (4.9) можно символически переписать в виде

$$g = h + Hh = h + H_0 h + H_1 h.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $(E + H_0)^{-1}$, мы получим

$$(E + H_0)^{-1} g = h + (E + H_0)^{-1} H_1 h. \tag{4.10}$$

Так как норма оператора $(E + H_0)^{-1} H_1$ может быть сделана сколь угодно малой, то уравнение (4.10) можно решать методом последовательных приближений, и лемма доказана.

Применим теперь доказанную лемму к уравнению (II). Исследуем окрестность некоторой точки x_0. Заменим в уравнении (II) s на sx и y на yx. Мы получим уравнение

$$f(y, yx) + x \int_0^1 K(x, sx) f(sx, yx)\, ds + K(y, yx) = 0,$$

т. е. интегральное уравнение с ядром $x f(sx, yx)$ и свободным членом $f(x, yx)$, зависящим от параметра x. Так как $f(x, y)$, по условию,— непрерывная функция, то из леммы следует непрерывность функции $K(x, y)$ по совокупности переменных. Далее, из той же леммы следует, что $K(x, y)$ по переменной x имеет непрерывные производные того же порядка, что и $f(x, y)$.

4. Чтобы доказать разрешимость уравнения при $h = \infty$, полагаем

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos\sqrt{\lambda}\, x)(1 - \cos\sqrt{\lambda}\, y)}{\lambda^2}\, d\sigma(\lambda),$$

где

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda) - \dfrac{3}{2\pi} \lambda^{3/2}, & \text{если } \lambda \geqslant 0, \\ \rho(\lambda), & \text{если } \lambda < 0 \end{cases}$$

и

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

$L(x, y)$ удовлетворяет такому же уравнению, что и $K(x, y)$. Вместо равенства (4.4) мы имеем

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \varepsilon \sqrt{\lambda}}{\lambda} \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda} d\sigma(\lambda) = o(\varepsilon) \tag{4.4'}$$

равномерно в каждом конечном интервале изменения переменной x. Вместо $G(\lambda)$ мы вводим

$$H(\lambda) = \int_0^x g(y) \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, y}{\sqrt{\lambda}} dy.$$

В остальном доказательство проходит без изменений.

§ 5. Вывод равенства Парсеваля

1. В предыдущем параграфе мы показали, что для заданной монотонной функции $\rho(\lambda)$, удовлетворяющей условиям 1° и 2°, существует решение $K(x, t)$ линейного интегрального уравнения (4.5). Точнее говоря, для разрешимости этого уравнения достаточно условие 2° заменить более слабым — существованием у функции $F(x, y)$ непрерывной производной $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. При помощи функции $K(x, t)$ можно построить функции $\varphi(x, \lambda)$ по формуле

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}\, x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt.$$

В этом параграфе мы докажем, что функции $\varphi(x, \lambda)$ являются «ортогональными и нормированными» функциями с весом $\rho(\lambda)$, т. е., точнее говоря, для них имеет место равенство Парсеваля в том виде, в котором оно сформулировано в § 1, п. 1. Мы при этом опять не используем полностью условия 2°, а будем предполагать, что $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ имеет непрерывные производные первого порядка.

Перейдем к доказательству равенства Парсеваля.

Докажем сначала, что функции

$$h_1(\lambda) = \int_a^x \varphi(t, \lambda)\, dt \quad \text{и} \quad h_2(\lambda) = \int_b^y \varphi(t, \lambda)\, dt$$

в случае, если интервалы (a, x) и (b, y) не перекрываются, ортогональны с весом $\rho(\lambda)$, т. е. докажем равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\lambda)\, h_2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0. \tag{5.1}$$

Не нарушая общности, будем считать, что $b < y \leqslant a < x$. Проводя в обратном порядке рассуждения, приведшие нас в § 3 к линейному интегральному уравнению (II), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_a^x \varphi(t,\lambda)\,dt\Big]\Big[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\Big]\,d\rho(\lambda)=0, \quad b<y\leqslant a<x, \tag{5.2}$$

причем

$$\varphi(t,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,t+\int_0^t K(t,s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds. \tag{5.3}$$

Покажем, что из формулы (5.2) следует нужное нам равенство (5.1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_a^x \varphi(t,\lambda)\,dt\Big]\Big[\int_b^y \varphi(t,\lambda)\,dt\Big]\,d\rho(\lambda)=0. \tag{5.4}$$

В самом деле, из формулы (5.3) следует

$$\int_b^y \varphi(t,\lambda)\,dt=\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt+\int_0^b \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\int_b^y K(t,s)\,dt+$$

$$+\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\int_s^y K(t,s)\,dt=\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt+\int_0^y H(s,y)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds,$$

где функция

$$H(s,y)=\begin{cases}\int_b^y K(t,s)\,dt, & 0\leqslant s\leqslant b,\\ \int_s^y K(t,s)\,dt, & b\leqslant s\leqslant y\end{cases}$$

непрерывна и имеет производную $\frac{\partial H}{\partial s}$.

Подставив полученное выражение для $\int_b^y \varphi(t,\lambda)\,dt$ в левую часть (5.4) и воспользовавшись равенством (5.2), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_a^x \varphi(t,\lambda)\,dt\Big]\Big[\int_b^y \varphi(t,\lambda)\,dt\Big]\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_a^x \varphi(t,\lambda)\,dt\Big]\Big[\int_0^y H(t,y)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\Big]\,d\rho(\lambda).$$

Покажем теперь, что последний интеграл равен нулю при всяком фиксированном $y<a$. Для этого опять воспользуемся равенством (5.2).

Пусть $P(s,y)$ $(s\leqslant y)$ — какая-нибудь функция. Заменим в формуле (5.2) b на s, умножим обе части на $P(s,y)$ и проинтегрируем по s в пределах 0, y. Мы получим (меняя порядок интегрирования)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_a^x \varphi(t,\lambda)\,dt\Big]\Big[\int_0^y P(s,y)\,ds\int_s^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\Big]\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_a^x \varphi(t,\lambda)\,dt\Big]\Big[\int_0^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\int_0^t P(s,y)\,ds\Big]\,d\rho(\lambda)=0.$$

Полагая

$$H(t, y) = \int_0^t P(s, y)\, ds,$$

т. е.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = P(t, y),$$

мы получим (5.4).

Условие (5.4) есть условие ортогональности для преобразований Фурье характеристических функций неперекрывающихся интервалов. Для того чтобы получить равенство Парсеваля для ступенчатых функций, следует еще показать, что для любого интервала (a, b) $(a < b)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = b - a, \tag{5.5}$$

являющееся равенством Парсеваля для характеристической функции интервала (a, b).

Покажем сначала, что имеет место более слабое условие: если $b - a \to 0$ то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^t \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = b - a + o(b - a), \tag{5.6}$$

которое естественно назвать условием нормировки. Положим $b = \alpha + \varepsilon$, $a = \alpha - \varepsilon$. Вначале мы покажем, что

$$\int_{-\infty}^{0} \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = o(\varepsilon). \tag{5.7}$$

Так как, по условию, для всех $x \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{0} \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, x\, d\rho(\lambda) < \infty,$$

то, в силу формулы (5.3), для всех t

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi^2(t, \lambda)\, d\rho(\lambda) < +\infty.$$

Поэтому, в силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\int_{-\infty}^{0} \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) \leqslant 2\varepsilon \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{0} \varphi^2(t, \lambda)\, d\rho(\lambda)\right) dt = O(\varepsilon^2)$$

и притом равномерно по α в каждом конечном интервале. Таким образом, для доказательства (5.6) следует показать, что

$$\int_0^{\infty} \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = 2\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Мы имеем для $\lambda > 0$

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(t, \lambda)\, dt = \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} dt \int_0^t K(t, s) \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds =$$

$$= \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} K(t, t) - \int_0^t \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, s}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial K(t, s)}{\partial s}\, ds\right] dt =$$

$$= \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt + \frac{O(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Поэтому для $\lambda > 0$

$$\left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 = \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda} t . dt\right]^2 + 4\, \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, \varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \cdot \cos\sqrt{\lambda}\, \alpha \frac{O(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{O(\varepsilon^2)}{\lambda}.$$

В силу ограниченности $\varphi(t, \lambda)$ для любого $\lambda > 0$,

$$\int_0^a \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = O(\varepsilon^2). \tag{5.8}$$

Далее, мы имеем

$$\int_a^\infty \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = \int_a^\infty \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) +$$

$$+ O(\varepsilon) \cdot \int_a^\infty \sin\sqrt{\lambda}\, \varepsilon \cdot \cos\sqrt{\lambda}\, \alpha \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda} + O(\varepsilon^2) \int_a^\infty \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda}. \tag{5.9}$$

Так как (см. § 4)

$$\int_a^\infty \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda} < \infty,$$

то при $\varepsilon \to 0$

$$\int_a^\infty \sin\sqrt{\lambda}\, \varepsilon \cdot \cos\sqrt{\lambda}\, \alpha \cdot \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda} = o(1)$$

и притом равномерно по α. Из (5.8), (5.9) и оценки (4.4) следует:

$$\int_0^\infty \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = \int_a^\infty \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}\, t \cdot dt\right]^2 d\rho(\lambda) + o(\varepsilon) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}\, t \cdot dt\right]^2 d\sqrt{\lambda} + 4 \int_0^\infty \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, \varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 \cos^2\sqrt{\lambda}\alpha\, d\sigma(\lambda) + o(\varepsilon) =$$

$$= 2\varepsilon + o(\varepsilon),$$

т. е. условие (5.6) доказано.

Покажем теперь, что из условия ортогональности (5.4) и равенства (5.6) следует равенство (5.5), т. е. равенство Парсеваля для характеристической функции интервала (a, b).

Пусть (a, b) — произвольный фиксированный конечный интервал. Положим

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b,$$
$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_{i+1} - a_i) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

В силу (5.4) и (5.6),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi(t, \lambda)\, dt\right]^2 d\rho(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} [(a_i - a_{i-1}) + o(a_i - a_{i-1})] \to b - a.$$

Так как левая часть в последнем равенстве от n не зависит, то, переходя к пределу, мы получим (5.5).

Теперь уже легко доказать равенство Парсеваля для любой ступенчатой функции. Рассмотрим ступенчатую функцию $f(x)$, заданную формулой:

$$f(x) = d_i \text{ для } a_{i-1} \leqslant x < a_i \quad (i = 1, \ldots, n;\ a_0 = a,\ a_n = b),$$
$$f(x) = 0 \text{ вне интеграла } (a, b).$$

Из (5.4) и (5.6) следует:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx\right]^2 d\rho(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 (a_i - a_{i-1}) = \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Таким образом, нами получено равенство Парсеваля для ступенчатых функций. Так как множество ступенчатых функций плотно в $L_2(0, \infty)$, то равенство Парсеваля имеет место для всех функций из $L_2(0, \infty)$.

Итак, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° § 4* * *и $K(x, y)$ есть решение интегрального уравнения* (II). *Положим*

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, x + \int_0^x K(x, t) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt.$$

Тогда для каждой функции $f(x) \in L_2(0, \infty)$ функции

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx$$

при $n \to \infty$ сходятся в среднем квадратичном (с весом $\rho(\lambda)$) к некоторой функции $F(\lambda)$ (обобщенное преобразование Фурье функции $f(x)$), т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\lambda) - F_n(\lambda)]^2\, d\rho(\lambda) = 0.$$

---

* Достаточно, чтобы функция $a(x)$ из условия 2° имела три производных.

При этом имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} f^2(x)\, dx.$$

Если $g(x) \in L_2(0, \infty)$ — другая функция и $G(\lambda)$ — ее преобразование Фурье, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, G(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Аналогично можно получить равенство Парсеваля в случае $h = \infty$.

2. Равенство Парсеваля равносильно сходимости интеграла Фурье в среднем квадратичном. Во многих случаях необходимо иметь признаки равномерной сходимости интеграла Фурье. Докажем следующую теорему:

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, равная нулю вне некоторого конечного интервала $(0, a)$. Положим

$$E(\lambda) = \int_0^{a} f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx$$

и допустим, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(\lambda)\, \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda)$$

для всех $x \geqslant 0$ сходится абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале и, следовательно, представляет непрерывную функцию. При этих предположениях

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\lambda)\, \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Доказательство. Положим

$$h_n(x) = \int_{-n}^{n} E(\lambda)\, \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda).$$

В силу равенства Парсеваля,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} [f(x) - h_n(x)]^2\, dx \to 0.$$

Следовательно, и подавно для $N \geqslant a$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{N} [f(x) - h_n(x)]^2\, dx = 0. \tag{5.10}$$

По предположению, $h_n(x)$ при $n \to \infty$ сходится равномерно в каждом конечном интервале к некоторой функции $h(x)$. Поэтому в (5.10) можно перейти к пределу под знаком интеграла, и мы получим

$$\int_0^{N} [f(x) - h(x)]^2\, dx = 0.$$

Так как $f(x)$ и $h(x)$ — непрерывные функции, то из последнего равенства следует

$$f(x) = h(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Вывод дифференциального уравнения для $\varphi(x, \lambda)$

В предыдущих двух параграфах мы по функции $\rho(\lambda)$, удовлетворяющей условиям 1° и 2° § 4, построили систему функций $\varphi(x, \lambda)$, для которой было доказано равенство Парсеваля. Эти функции были построены по ядру $K(x, t)$ при помощи формулы

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, x + \int_0^x K(x, s) \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds. \tag{6.1}$$

Наряду с уравнением (6.1) нам понадобится также его обращение:

$$\cos\sqrt{\lambda}\, x = \varphi(x, \lambda) - \int_0^x K_1(x, s)\, \varphi(s, \lambda)\, ds. \tag{6.2}$$

Мы доказали, что при выполнении условия 2° функция $K(x, t)$, а следовательно, и функция $K_1(x, t)$ имеют непрерывные вторые производные. В этом параграфе мы докажем, что функции $\varphi(x, \lambda)$ являются собственными функциями дифференциального уравнения вида

$$y'' + (\lambda - q(x))\, y = 0, \tag{6.3}$$

где функция $q(x)$ непрерывна, и удовлетворяют определенным граничным условиям в нуле. Для этого мы раньше получим некоторое функциональное уравнение для функции $\varphi(x, \lambda)$, из которого мы дальше уже сможем получить дифференциальное уравнение (6.3) для $\varphi(x, \lambda)$. Умножим для этого обе части уравнения (6.1) на $\cos\sqrt{\lambda}\, t$. Мы получим

$$\varphi(x, \lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, t = \frac{1}{2}[\cos\sqrt{\lambda}(x + t) + \cos\sqrt{\lambda}(x - t)] + \\ + \frac{1}{2}\int_0^x K(x, s)[\cos\sqrt{\lambda}(s + t) + \cos\sqrt{\lambda}(s - t)]\, ds.$$

Подставив справа всюду вместо $\cos\sqrt{\lambda}\, x$ его значение из формулы (6.2), мы получим

$$\varphi(x, \lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, t = \frac{1}{2}[\varphi(x + t, \lambda) + \varphi(x - t, \lambda)] + \int_0^{x+t} W(x, t, s)\, \varphi(s, \lambda) ds, \tag{6.4}$$

где $W(x, t, s)$ есть некоторая функция, составленная из функций $K(x, t)$ и $K_1(x, t)$, точный вид которой нам в дальнейшем не понадобится. Заметим лишь, что так как $K(x, t)$ и $K_1(x, t)$ непрерывны при $t \leqslant x$, то $W(x, t, s)$ непрерывна для $s \leqslant x + t$.

Весьма существенно, что в (6.4) интегрирование фактически ведется не от 0, а от $|x - t|$. Строгое доказательство этого факта несколько громоздко. Поэтому предпошлем ему нестрогое рассуждение, из которого

видно существо дела. Умножим обе части равенства (6.4) на $\varphi(s_0, \lambda)$, где $s_0 < x+t$, $s_0 \neq x-t$, и проинтегрируем обе части равенства по $d\rho(\lambda)$. Так как $\varphi(x_1, \lambda)$ и $\varphi(x_2, \lambda)$ для $x_1 \neq x_2$ «ортогональны» по $d\rho(\lambda)$, то мы получим

$$W(x, t, s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}\, t\, \varphi(s_0, \lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{6.5}$$

Отсюда видно, что $W(x, t, s_0)$ симметрична по переменным x и s_0. Так как $W(x, t, s) = 0$ при $s_0 > x+t$, то из указанной симметрии следует, что $W(x, t, s_0) = 0$ также, если $x > s_0 + t$, т. е. $s_0 < x - t$. Значит, интеграл (6.4) можно брать в пределах от $x-t$ до $x+t$. Мы рассуждали нестрого, так как интеграл (6.5) расходится. Приводимое ниже строгое доказательство основано на той же идее, что и проведенные выше нестрогие рассуждения.

Проинтегрируем обе части равенства (6.4) по x и по t $(t \leqslant x)$. Получим

$$\int_0^x \varphi(u, \lambda)\, du \int_0^y \cos \sqrt{\lambda}\, v\, dv = h(x, y; \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \varphi(u+v, \lambda)\, du\, dv +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \varphi(u-v, \lambda)\, du\, dv + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y du\, dv \int_0^{u+v} W(u, v, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt.$$

Меняя порядок интегрирования, найдем

$$h(x, y; \lambda) = \int_0^{x+y} Z(x, y, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt, \tag{6.6}$$

где $Z(x, y, t)$ — непрерывная функция по совокупности переменных. Формула (6.6) показывает, что при любых фиксированных x и y $h(x, y; \lambda)$ есть преобразование Фурье непрерывной функции $Z(x, y, t)$, равной нулю вне интервала $0, x+y$. Покажем, что при фиксированных x, y и t интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y; \lambda)\, \varphi(t, \lambda)\, d\rho(\lambda) \tag{6.7}$$

сходится абсолютно и равномерно по t в каждом конечном интервале.

Вначале мы оценим функцию $\varphi(t, \lambda)$. Для $\lambda \geqslant 0$ мы имеем

$$|\varphi(t, \lambda)| \leqslant 1 + \int_0^t \left| K(t, s) \right| dt < a(t), \tag{6.8}$$

где $a(t)$ — ограниченная в каждом конечном интервале функция. Поэтому при $0 \leqslant \lambda < +\infty$ функция $\varphi(t, \lambda)$ ограничена равномерно по t в каждом конечном интервале. Для $\lambda < 0$ мы имеем

$$|\varphi(t, \lambda)| \leqslant \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, t \left(1 + \int_0^t |K(t, s)|\, ds\right) < a(t) \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, t. \tag{6.9}$$

Для оценки интеграла (6.7) разобьем его на сумму двух интегралов: в пределах $(-\infty, 0)$ и в пределах $(0, \infty)$. Рассмотрим вначале интеграл в пределах $(0, \infty)$. Так как функция

$$\psi(y, \lambda) = \int_0^y \cos\sqrt{\lambda}\, v\, dv = \int_0^y \varphi(v, \lambda)\, dv + \int_0^y \varphi(v, \lambda)\, dv \int_v^y K_1(t, v)\, dt$$

есть преобразование Фурье функции

$$\Phi(y, v) = \begin{cases} 1 + \int_v^y K_1(t, v)\, dt, & v \leqslant y, \\ 0, & v > y, \end{cases}$$

а

$$\chi(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(u, \lambda)\, du$$

есть преобразование Фурье функции

$$e_x = \begin{cases} 1, & \text{если } u \leqslant x, \\ 0, & \text{если } u > x, \end{cases}$$

то, в силу неравенства Коши-Буняковского, равенства Парсеваля и неравенства (6.8), имеем (напомним, что $h(x, y; \lambda) = \int_0^x \varphi(u, \lambda) du \int_0^y \cos\sqrt{\lambda}\, v dv$)

$$\int_0^\infty |h(x, y; \lambda)|\, |\varphi(t, \lambda)|\, d\rho(\lambda) \leqslant a(t) \int_0^\infty |h(x, y, \lambda)|\, d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant a(t) \int_{-\infty}^{-\infty} |h|\, d\rho(\lambda) = a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(x, \lambda)\, \psi(y, \lambda)|\, d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant a(t) \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda)} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(y, \lambda)\, d\rho(\lambda)} = a(t) \sqrt{\int_0^y \Phi^2(u, v)\, dv} \cdot \sqrt{x},$$

откуда следует абсолютная и равномерная сходимость интеграла

$$\int_0^\infty h(x, y; \lambda)\, \varphi(t, \lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Теперь рассмотрим интеграл в пределах $(-\infty, 0)$. Из оценки (6.9) следует

$$|h(x, y; \lambda)| \leqslant A(x, y) \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, (x + y),$$

где функция $A(x, y)$ от λ не зависит. Поэтому

$$\int_{-\infty}^0 |h(x, y; \lambda)|\, |\varphi(t, \lambda)|\, d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant A(x, y)\, a(t) \int_{-\infty}^0 \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, (x + y) \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, t . d\rho(\lambda).$$

В силу условий, наложенных на $\rho(\lambda)$, последний интеграл сходится.

Таким образом (так как, в силу (6.6), $h(x,y;\lambda)$ есть преобразование Фурье функции Z), из теоремы п. 2 § 5 следует

$$Z(x,y,t) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x,y;\lambda)\,\varphi(t,\lambda)\,d\rho(\lambda), & t \leqslant x+y, \\ 0, & t > x+y. \end{cases}$$

Интегрируя $Z(x,y,s)$ по s в пределах $(0,t)$, мы получим

$$Z_1(x,y,t) = \int\limits_0^t Z(x,y,s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_0^x \varphi(u,\lambda)\,du\right)\left(\int\limits_0^y \cos\sqrt{\lambda}\,v\,dv\right)\left(\int\limits_0^t \varphi(s,\lambda)\,ds\right)d\rho(\lambda).$$

По предыдущему, для $t > x+y$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} = Z(x,y,t) = 0.$$

Так как функция $Z_1(x,y,t)$ симметрична по переменным x и t, то

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} = 0$$

для $x > t+y$, т. е. для $t < x-y$.

Поэтому, если t находится вне интервала $(x-y,\ x+y)$, то

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right) = 0.$$

Дифференцируя равенство (6.6) по x, мы получим

$$\varphi(x,\lambda)\int\limits_0^t \cos\sqrt{\lambda}\,v\,dv = \int\limits_{x-t}^{x+t} \frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\varphi(s,\lambda)\,ds.$$

Дифференцируя последнее равенство по t, найдем

$$\varphi(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t,\lambda)+\varphi(x-t,\lambda)\right] + \int\limits_{x-t}^{x+t} W(x,t,s)\,\varphi(s,\lambda)\,ds. \quad (6.10)$$

Формула (6.10) позволяет без особого труда получить дифференциальное уравнение для функции $\varphi(x,\lambda)$. Вычтем из обеих частей формулы (6.10) $\varphi(x,\lambda)$ и разделим результат на t^2. Мы получим

$$\varphi(x,\lambda)\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,t-1}{t^2} = \frac{\varphi(x+t,\lambda)-2\varphi(x,\lambda)+\varphi(x-t,\lambda)}{2t^2} + \frac{1}{t^2}\int\limits_{x-t}^{x+t} W(x,t,s)\,\varphi(s,\lambda)\,ds.$$

При $t \to 0$ левая часть этого равенства стремится к $-\frac{\lambda}{2}\varphi(x,\lambda)$, первый член правой части стремится к $\frac{1}{2}\varphi''(x,\lambda)$ (дифференцируемость $\varphi(x,\lambda)$ следует из дифференцируемости K), следовательно, существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int\limits_{x-t}^{x+t} W(x,t,s)\,\varphi(s,\lambda)\,ds.$$

Вычислим этот предел.

Разлагая функцию $\varphi(x, \lambda)$ в ряд Тейлора, мы получим

$$\varphi(s, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + (s - x)\varphi'(x, \lambda) + O(t^2).$$

Поэтому

$$\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds =$$

$$= \varphi(x,\lambda)\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds + \varphi'(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t}(s - x)W(x, t, s)\,ds + O(t^3).$$

Так как для $x - t \leqslant s \leqslant x + t$ функция $W(x, t, s)$ непрерывна, то при $t \to 0$

$$W(x, t, s) = W(x, t, x) + o(1).$$

Поэтому*

$$\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds = \varphi(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds +$$

$$+ \varphi'(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t}(s-x)\left[W(x,t,x) + o(1)\right]ds + o(t^2) =$$

$$= \varphi(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds + o(t^2).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds = \varphi(x, \lambda)\cdot\frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds + o(1).$$

Так как при фиксированном x $\varphi(x, \lambda)$ не может тождественно равняться нулю по λ и в последнем равенстве предел слева существует, то существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds = -\frac{1}{2}q(x).$$

Следовательно, $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\lambda\varphi(x, \lambda) = \varphi''(x, \lambda) - q(x)\varphi(x, \lambda)$$

или

$$\varphi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x))\varphi(x, \lambda) = 0.$$

Из последнего уравнения следует

$$q(x) - \lambda = -\frac{\varphi''(x, \lambda)}{\varphi(x, \lambda)}.$$

Так как $\varphi(x, \lambda)$ при фиксированном x не может тождественно равняться нулю, то $q(x)$ — непрерывная функция. Из формулы (6.1) следует

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_x'(0, \lambda) = K(0, 0) = h.$$

Таким образом, $\rho(\lambda)$ определяет не только дифференциальное уравнение для $\varphi(x, \lambda)$, но и начальное условие.

* Заметим, что $\int_{x-t}^{x+t}(s - x)W(x, t, x)\,ds = 0.$

2. Рассмотрим теперь случай $h=\infty$. Пусть

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x L(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}dt, \tag{6.11}$$

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}=\psi(x,\lambda)-\int_0^x L_1(x,t)\psi(t,\lambda)\,dt. \tag{6.12}$$

Из равенства (6.11) следует для $y<x$

$$\psi(x,\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}}=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x L(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}dt+\int_0^x L(x,t)\left[\int_{|t-y|}^{t+y}\frac{\sin\sqrt{\lambda}u}{\sqrt{\lambda}}du\right]dt.$$

Рассуждая далее так же, как и в предыдущем случае, мы получим

$$\psi(x,\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}}=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\psi(t,\lambda)\,dt+\int_{x-y}^{x+y}W_1(x,y,t)\psi(t,\lambda)\,dt, \tag{6.13}$$

причем функция $W_1(x,y,t)$ непрерывна для всех аргументов и, в частности, $W(x,y,y\pm x)=0$, а $\frac{\partial W_1}{\partial y}$ непрерывна для $x-y\leqslant t\leqslant x+y$. Дифференцируя равенство (6.13) по y, мы получим

$$\psi(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}y=\frac{1}{2}[\psi(x+y,\lambda)+\psi(x-y,\lambda)]+\int_{x-y}^{x+y}\frac{\partial W_1(x,y,t)}{\partial y}\psi(t,\lambda)\,dt.$$

Это уравнение аналогично (6.4) и поэтому имеет место дифференциальное уравнение для ψ:

$$\psi''(x,\lambda)+(\lambda-q(x))\psi(x,\lambda)=0.$$

§ 7. Примеры

1. Предположим, что функция $\rho(\lambda)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\sigma(\lambda)$ для $\lambda\geqslant 0$ и $\rho(\lambda)=0$ для $\lambda<0$, причем функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\rho(\lambda)$ не убывает;

2) $\int_0^\infty \lambda^k|d\sigma(\lambda)|<+\infty,\quad k=0,1;$

3) $\rho(\lambda)$ имеет на некотором конечном интервале бесконечное число точек роста.

В рассматриваемом случае

$$F(x,y)=\int_0^\infty\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}y}{\lambda}d\sigma(\lambda),$$

$$f(x,y)=\int_0^\infty\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}y.d\sigma(\lambda),$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\, x \cos \sqrt{\lambda}\, y . d\sigma(\lambda),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \int_0^\infty \lambda \cos \sqrt{\lambda}\, x \cos \sqrt{\lambda}\, y \, d\sigma(\lambda).$$

В силу условия 2), все эти функции непрерывны. Поэтому все наши результаты применимы и, следовательно, существует дифференциальный оператор второго порядка $L(y) = y'' - q(x) y$ с непрерывной функцией $q(x)$, для которого равенство Парсеваля пишется с данной функцией $\rho(\lambda)$.

Отсюда, в частности, вытекает следующий интересный вывод:

Существует уравнение вида

$$y'' + (\lambda - q(x)) y = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

в котором функция $\rho(\lambda)$ будет на конечном интервале произвольной наперед заданной монотонной ограниченной функцией.

2. В ряде частных случаев мы можем по спектральной функции $\rho(\lambda)$ фактически найти $q(x)$. Разберем один простейший пример. Пусть

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + \alpha \cdot e(\lambda - \lambda_0) \quad \text{для } \lambda > 0,$$
$$\rho(\lambda) = \alpha e(\lambda - \lambda_0) \quad \text{для } \lambda < 0,$$

где $e(\lambda - \lambda_0) = 0$, если $\lambda < \lambda_0$, и $e(\lambda - \lambda_0) = 1$, если $\lambda > \lambda_0$, α — положительное число.

Дифференциальное уравнение, построенное по этому $\rho(\lambda)$, должно иметь непрерывный спектр для $\lambda > 0$ и точку дискретного спектра для $\lambda = \lambda_0$. В этом случае функция $\sigma(\lambda)$ имеет вид

$$\sigma(\lambda) = \alpha e(\lambda - \lambda_0)$$

и, следовательно,

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \sqrt{\lambda}\, x \cdot \cos \sqrt{\lambda}\, y \, d\sigma(\lambda) = \alpha \cos \sqrt{\lambda_0}\, x \cdot \cos \sqrt{\lambda_0}\, y.$$

Интегральное уравнение (II) будет уравнением с вырожденным ядром $f(x, y)$ и примет вид

$$\alpha \cos \sqrt{\lambda_0}\, x \cos \sqrt{\lambda_0}\, y + \alpha \int_0^x K(x, s) \cos \sqrt{\lambda_0}\, s . \cos \sqrt{\lambda_0}\, y \, ds + K(x, y) = 0.$$

Отсюда

$$K(x, y) = \frac{-\alpha \cos \sqrt{\lambda_0}\, x \cos \sqrt{\lambda_0}\, y}{1 + \alpha \int_0^x \cos^2 \sqrt{\lambda_0}\, s \, ds}.$$

Найдем теперь уравнение и граничные условия. В силу формулы (1.8′), имеем

$$h = K(0, 0) = -\alpha.$$

Далее, в силу формулы (1.8),

$$\frac{1}{2} q(x) = \frac{dK(x, x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{-\alpha \cos^2 \sqrt{\lambda_0}\, x}{1 + \alpha \int_0^x \cos^2 \sqrt{\lambda_0}\, s \, ds} \right).$$

Соответствующие собственные функции вычисляются по формуле

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt,$$

т. е.

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x - \frac{\alpha \cos \sqrt{\lambda_0} x}{1 + \alpha \int_0^x \cos^2 \sqrt{\lambda_0}\, s\, ds} \cdot \int_0^x \cos \sqrt{\lambda_0}\, t \cos \sqrt{\lambda}\, t dt.$$

Спектр состоит, как это видно из определения функции $\rho(\lambda)$, из чисел $\lambda \geqslant 0$, отвечающих непрерывному спектру, и точки λ_0 дискретного спектра. Собственая функция $\varphi(x, \lambda_0)$ дискретного спектра имеет в этом случае вид

$$\varphi(x, \lambda_0) = \frac{\cos \sqrt{\lambda_0} x}{1 + \alpha \int_0^x \cos^2 \sqrt{\lambda_0}\, s\, ds}.$$

Если $\lambda_0 < 0$, то вместо $\cos \sqrt{\lambda_0}\, x$ надо писать $\operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, x$.

Аналогично можно найти уравнение и собственные функции для случая

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + \sigma(\lambda) & \text{для } \lambda \geqslant 0, \\ \sigma(\lambda) & \text{для } \lambda < 0, \end{cases}$$

где $\sigma(\lambda)$ — ступенчатая функция с конечным числом скачков. В этом случае интегральное уравнение также становится вырожденным.

В основу работы мы положили сравнение произвольного уравнения с простейшим уравнением $y'' + \lambda y = 0$. Именно по этой причине мы выражали собственные функции через $\cos \sqrt{\lambda}\, t$. Мы можем без труда в качестве «избранного» уравнения выбрать какое-нибудь другое уравнение. В частности, можно написать формулы для собственных функций уравнения, получающегося из данного, если к его спектральной функции $\rho(\lambda)$ добавить ступенчатую функцию с конечным числом скачков.

§ 8. Условие ортогональности разложения в интеграл Фурье

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ есть решение уравнения

$$y'' + [\lambda - q(x)]\, y = 0,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h,$$

и $\rho(\lambda)$ — его спектральная функция. Последнее означает, как мы говорили, что для каждой функции $f(x) \in L_2(0, \infty)$ существует преобразование Фурье

$$E(\lambda) = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^n f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Пусть $\Delta = (\lambda, \lambda + \Delta)$ — произвольный конечный интервал. Положим

$$E_\Delta(x) = \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Спектральная функция $\rho(\lambda)$ называется *ортогональной*, если для любого интервала Δ $E_\Delta(x) \in L_2(0, \infty)$ и для любых двух конечных интервалов Δ и Δ'

$$\int_0^\infty E_\Delta(x)\,E_{\Delta'}(x)\,dx = \int_{\Delta\Delta'} d\rho(\lambda). \tag{8.1}$$

В общем случае дифференциальное уравнение может иметь неортогональные спектральные функции. В настоящем параграфе дается достаточное условие для того, чтобы функция $\rho(\lambda)$, удовлетворяющая условиям предыдущих параграфов, была ортогональной спектральной функцией. Из этого условия, в частности, следует, что $\rho(\lambda)$ заведомо ортогональна, если она сосредоточена на интервале $(c, +\infty)$, $c > -\infty$.

Обозначим через $L_2\{\rho\}$ вещественное гильбертово пространство функций $g(\lambda)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) < +\infty.$$

ЛЕММА. *Для того чтобы спектральная функция $\rho(\lambda)$ была ортогональной, достаточно, чтобы множество функций вида*

$$F_a(\lambda) = \int_0^a f(x) \cos\sqrt{\lambda}\,x\,dx,$$

где a — произвольное положительное число, а $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную, было плотно в $L_2\{\rho\}$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что функции $F_a(\lambda)$ входят в $L_2\{\rho\}$. Существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{0} F_a^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)$$

следует непосредственно из условия 1° § 4. Далее, интегрируя по частям, мы получим

$$|F_a(\lambda)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Следовательно,

$$|F_a(\lambda)|^2 = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Поэтому из результата § 4 следует, что

$$\int_0^\infty |F_a(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda) < +\infty.$$

Таким образом, $F_a(\lambda) \in L_2\{\rho\}$.

Пользуясь формулой

$$\cos \sqrt{\lambda}\, x = \varphi(x, \lambda) - \int_0^x K_1(x, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt,$$

мы получим

$$F_a(\lambda) = \int_0^a f(x) \left[\varphi(x, \lambda) - \int_0^x K_1(x, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt\right] dx =$$

$$= \int_0^a \left[f(x) - \int_x^a K_1(t, x)\, f(t)\, dt\right] \varphi(x, \lambda)\, dx = \int_0^a g(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx,$$

где

$$g(x) = f(x) - \int_x^a K_1(t, x)\, f(t)\, dt. \qquad (8.2)$$

Уравнение (8.2) есть уравнение Вольтерра. Поэтому $g(x)$ можно считать произвольной функцией с непрерывной производной. Таким образом, следует показать, что если множество функций

$$\int_0^a g(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx$$

плотно в $L_2\{\rho\}$, то спектральная функция $\rho(\lambda)$ ортогональна. Обозначим через $F(\lambda)$ произвольную функцию из $L_2\{\rho\}$, и пусть функции

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f_n(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx$$

при $n \to \infty$ сходятся в среднем к $F(\lambda)$. Из равенства Парсеваля следует $(n > m)$

$$\int_0^n |f_n(x) - f_m(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(\lambda) - F_m(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda).$$

Поэтому функции $f_n(x)$ сходятся в среднем квадратичном к некоторому пределу $f(x)$, и $F(\lambda)$ есть преобразование Фурье для $f(x)$, т. е. мы доказали, что произвольная функция $F(\lambda) \in L_2\{\rho\}$ есть преобразование Фурье некоторой функции $f(x)$.

Пусть

$$F_\Delta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \in \Delta, \\ 0, & \text{если } \lambda \overline{\in} \Delta. \end{cases}$$

Функция $F_\Delta(\lambda) \in L_2\{\rho\}$. Поэтому, в силу предыдущего, существует функция $f_\Delta(x) \in L_2(0, \infty)$, преобразованием Фурье которой является $F_\Delta(\lambda)$. Мы покажем, что

$$f_\Delta(x) = \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda). \qquad (8.3)$$

Из последнего равенства и равенства Парсеваля следует, что

$$\int_\Delta^\infty f_\Delta(x)\, f_{\Delta'}(x)\, dx = \int_{\Delta\Delta'} d\rho(\lambda),$$

т. е. ортогональность спектральной функции $\rho(\lambda)$.

Итак, остается доказать равенство (8.3). Обозначим через $h(x)$ $(x \geqslant 0)$ произвольную непрерывную функцию, равную нулю вне конечного интервала, и пусть

$$H(\lambda) = \int_0^\infty h(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx.$$

В силу равенства Парсеваля,

$$\int_0^\infty h(x)\,f_\Delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty H(\lambda)\cdot F_\Delta(\lambda)\,d\rho(\lambda) = \int_\Delta H(\lambda)\,d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_\Delta d\rho(\lambda) \int_0^\infty h(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx = \int_0^\infty h(x) \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Так как $h(x)$ — произвольная функция, то из последнего равенства следует, что почти всюду

$$f_\Delta(x) = \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Последнее равенство, в силу непрерывности правой части, имеет место всюду.

Укажем признак полноты совокупности функций $F_a(\lambda)$ в $L_2\{\rho\}$.

ТЕОРЕМА. *Если существует такое число $\alpha < 2$, что для достаточно больших $x > 0$*

$$\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{|\lambda|}\,x}\,d\rho(\lambda) < e^{x^\alpha}, \tag{8.4}$$

то множество функций $F_a(\lambda)$ плотно в $L_2\{\rho\}$.

Доказательство. Множество функций $F_a(\lambda)$ образует в $L_2\{\rho\}$ линейное подпространство. После замыкания получим замкнутое подпространство $\mathfrak{M}\{\rho\}$. Следует показать, что если выполнено условие (8.4), то $\mathfrak{M}\{\rho\} = L_2\{\rho\}$. Допустим противное. Тогда в $L_2\{\rho\}$ найдется элемент $g(\lambda)$, ортогональный к $\mathfrak{M}\{\rho\}$. В частности, для любой функции

$$F_a(\lambda) = \int_0^a f(t) \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt$$

имеем

$$\int_{-\infty}^\infty g(\lambda)\,F_a(\lambda)\,d\rho(\lambda) = 0. \tag{8.5}$$

Положим при фиксированном $x > 0$ $(f(t) = 0$ для $t > a)$

$$f_x(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\}.$$

Введем функцию

$$F_a(\lambda;\ x) = \int_0^\infty f_x(t) \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt.$$

Легко видеть, что

$$F_a(\lambda;\ x) = \cos\sqrt{\lambda}\, x F_a(\lambda).$$

Поэтому, так как $F_a(\lambda;\ x)$ входит в $\mathfrak{M}\{\rho\}$, то для всех x имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, g(\lambda)\, F_a(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0. \tag{8.6}$$

Для $\lambda < 0$

$$|F_a(\lambda)| \leqslant C\cdot e^{\sqrt{|\lambda|}\, a}. \tag{8.7}$$

Из оценок (8.4) и (8.7) и неравенства Коши-Буняковского следует для достаточно больших x оценка

$$\left|\int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\, x g(\lambda)\, F_a(\lambda)\, d\rho(\lambda)\right| \leqslant C \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\, x e^{\sqrt{|\lambda|}\, a}\, |g(\lambda)|\, d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{0} \operatorname{ch}^2\sqrt{|\lambda|}\, x e^{2\sqrt{|\lambda|}\, a}\, d\rho(\lambda)\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{0} |g(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda)\right)^{1/2} \leqslant C_1 \exp(x^{\alpha}). \tag{8.7'}$$

Имеет место следующая теорема [7]:

Пусть для всех $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\sigma(\lambda) = 0,$$

где этот интеграл сходится абсолютно для любого x. *Если существует* $\alpha < 2$ *такое, что для всех достаточно больших* x

$$\int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, |d\sigma(\lambda)| < e^{x^{\alpha}},$$

то $\sigma(\lambda) \equiv \text{const}$.

Из (8.6), (8.7') и этого результата следует, что для любого конечного интервала Δ

$$\int_{\Delta} g(\lambda)\, F_a(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0. \tag{8.8}$$

Для $\lambda > 0$ множество функций $F_a(\lambda)$ плотно среди всех непрерывных функций. Поэтому из (8.8) следует, что для каждого интервала Δ с положительными концами

$$\int_{\Delta} g(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0. \tag{8.9}$$

Пусть N — произвольное положительное число. Из (8.9) следует:

$$\int_{0}^{N} g^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{0}^{N} g(\lambda)\, d\int_{0}^{\lambda} g(\mu)\, d\rho(\mu) = 0.$$

Полагая $N \to \infty$, мы получим

$$\int_0^\infty g^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0.$$

Далее, из (8.9) и (8.5) следует

$$\int_{-\infty}^0 g(\lambda)\, F_a(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0. \tag{8.10}$$

Из условия 1° § 4 следует, что

$$\int_{-\infty}^0 d\rho(\lambda) < \infty.$$

Поэтому, применяя неравенство Коши-Буняковского, мы получим

$$\int_{-\infty}^0 |g(\lambda)|\, d\rho(\lambda) \leqslant \left(\int_{-\infty}^0 g^2(\lambda)\, d\rho(\lambda)\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^0 d\rho(\lambda)\right)^{1/2} < \infty.$$

Меняя в равенстве (8.10) порядок интегрирования, мы получим

$$\int_0^a f(x)\, dx \int_{-\infty}^0 g(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\rho(\lambda) = 0.$$

В силу произвольности функций $f(x)$, из последнего равенства следует, что

$$\int_{-\infty}^0 g(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\rho(\lambda) = 0.$$

Снова применяя указанный выше результат, мы получим

$$\int_\Delta g(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^0 g^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0,$$

что вместе с полученным ранее равенством дает

$$\int_{-\infty}^\infty g^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0,$$

и теорема доказана.

Замечание I. Если $h = \infty$, то следует положить

$$F_a(\lambda) = \int_0^a f(x) \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}}\, dx.$$

Вместо условия (8.4) следует потребовать, чтобы для всех достаточно больших x выполнялась оценка

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}}\, d\rho(\lambda) < \exp(x^\alpha),$$

где $\alpha < 2$. В остальном доказательство аналогично.

Замечание II. Если $\rho(\lambda) = \text{const}$ для $\lambda < c$, $c > -\infty$, то для достаточно больших x

$$\int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\rho(\lambda) = \int_{c}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\rho(\lambda) \leqslant Ae^{\sqrt{|c|}\,x}.$$

Поэтому оценка (8.4) выполняется и, следовательно, спектральная мера ортогональна.

§ 9. Случай единственной предельной точки спектра на бесконечности

1. До сих пор мы исключали тот случай, когда спектр имеет единственную предельную точку на бесконечности. В эту группу краевых задач входит также классическая задача Штурма-Лиувилля. В настоящем параграфе мы рассмотрим случай дискретного спектра на полупрямой. В следующих двух параграфах будет рассмотрена классическая задача Штурма-Лиувилля. Предварительно введем одно понятие. Пусть E есть некоторое множество действительных чисел. Обозначим через $N(E)$ число чисел множества E, заключенных в интервале $(-N, N)$. Далее, положим

$$\mu = \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{N(E)}{N}.$$

Число μ будем в дальнейшем называть плотностью множества E.

Рассмотрим в конечном интервале $(0, l)$ задачу Штурма-Лиувилля:

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\,y = 0, \tag{9.1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{9.2}$$

$$y'(l) + Hy(l) = 0, \tag{9.3}$$

где h и H — действительные числа. Обозначим через $\lambda_1(l), \lambda_2(l), \ldots$ $\ldots, \lambda_n(l), \ldots$ собственные значения граничной задачи (9.1) — (9.3). Как известно,

$$\sqrt{\lambda_n(l)} = \frac{\pi}{l}\,n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{9.4}$$

Пусть $E(l)$ есть множество чисел $\sqrt{|\lambda_n(l)|}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Из формулы (9.4) следует, что в этом случае

$$\mu = \frac{l}{\pi}.$$

Пусть теперь $q(x)$ непрерывна в каждом конечном интервале. Рассмотрим уравнение (9.1) совместно с граничным условием (9.2) на интервале $(0, \infty)$. Известно, что если $q(x) \geqslant 0$ и монотонно стремится к ∞, то спектр дискретен, положителен и имеет единственную предельную точку на бесконечности. Кроме того, n-я собственная функция имеет n нулей. Обозначим точки спектра последней задачи через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, и пусть E есть множество точек $\sqrt{\lambda_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Покажем, что плотность множества E равна бесконечности.

Рассмотрим граничную задачу (9.1) — (9.3). Так как плотность множества $E(l)$ равна $\frac{l}{\pi}$, то можно указать столь большое число N, что

$$\frac{N[E(l)]}{N} > \frac{l}{2\pi}.$$

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (9.1), удовлетворяющее первому граничному условию (9.2). Очевидно, что число нулей функции $\varphi(x, \lambda)$ в интервале $(0, \infty)$ не меньше, чем число нулей той же функции в интервале $(0, l)$. Поэтому из теоремы Штурма следует, что число собственных значений граничной задачи (9.1) — (9.3) в интервале (O,N) не меньше, чем число собственных значений граничной задачи (9.1) — (9.3) на бесконечном интервале. Поэтому

$$\frac{N(E)}{N} \geqslant \frac{N[E(l)]}{N} > \frac{l}{2\pi}.$$

Так как l выбрано произвольно, то

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{N(E)}{N} = \infty, \tag{9.5}$$

что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° § 4 и есть чисто точечная функция с единственной предельной точкой скачков на бесконечности. Обозначим точки роста функции $\rho(\lambda)$ через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$. Далее, обозначим через E множество точек $\sqrt{|\lambda_n|}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Предположим, что плотность множества E бесконечна. Мы покажем, что при этих условиях обратная задача разрешима.

Единственный пункт, в котором мы использовали наличие предельных точек роста функции $\rho(\lambda)$ на конечном расстоянии, это разрешимость уравнения (II):

$$f(x, y) + \int_0^x f(y, s) K(x, s)\, ds + K(x, y) = 0. \tag{II}$$

Поэтому мы должны показать, что если плотность множества E бесконечна, то уравнение (II) разрешимо. В § 4 мы показали, что уравнение (II) заведомо разрешимо, если из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0, \tag{9.6}$$

где

$$G(\lambda) = \int_0^x g(t) \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt,$$

и $g(t)$ — функция с интегрируемым квадратом, следует, что $G(\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $g(t)$ почти всюду равняется нулю.

Равенство (9.6) может иметь место лишь в том случае, если скачки функции $\rho(\lambda)$ совпадают с нулями $G(\lambda)$. Покажем, что это невозможно.

Обозначим через $\lambda_{1,x}, \lambda_{2,x}, \ldots, \lambda_{n,x}, \ldots$ множество всех действительных нулей функции $G(\lambda)$ и через E_x — множество действительных чисел $\sqrt{|\lambda_{n,x}|}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Далее, обозначим через μ_x плотность множества E_x. Известно [8], что

$$\mu_x \leqslant \frac{x}{\pi}.$$

Так как, по предположению, $\mu=\infty$, то при всяком $x<\infty$ из равенства (9.6) следует, что $G(\lambda)\equiv 0$ и, таким образом, уравнение (II) разрешимо.

Если точки роста функции $\rho(\lambda)$ ограничены снизу, то, в силу результатов предыдущего параграфа, собственные функции ортогональны.

§ 10. Случай конечного интервала

1. Рассмотрим уравнение

$$y''+\{\lambda-q(x)\}y=0 \tag{10.1}$$

на интервале $(0, l)$, причем будем предполагать, что функция $q(x)$ непрерывна в каждом интервале $(0, l')$, где $l'<l<\infty$. Наряду с уравнением (10.1) рассмотрим граничное условие в точке $x=0$:

$$y(0)=1, \quad y'(0)=h. \tag{10.2}$$

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ есть решение уравнения (10.1), удовлетворяющее условиям (10.2). Так же как и в первом параграфе, можно показать, что если функция $K(x, t)$ есть решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}-q(x)K=\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}$$

и удовлетворяет условиям

$$K(x, x)=h+\int_0^x q(t)\,dt \quad (x<l), \quad \left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

то

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,x+\int_0^x K(x, t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt \quad (x<l). \tag{10.3}$$

Обращая последнее уравнение, мы получим

$$\cos\sqrt{\lambda}\,x=\varphi(x, \lambda)-\int_0^x K_1(x, t)\varphi(t, \lambda)\,dt \quad (x<l).$$

Пусть $\rho(\lambda)$ есть спектральная функция уравнения (10.1), т. е., какова бы ни была функция $f(x)\subset L_2(0, l)$, существует преобразование Фурье

$$E(\lambda)=\underset{l'\to l}{\text{l. i. m.}}\int_0^{l'} f(x)\varphi(x, \lambda)\,d\lambda$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^l f^2(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Если $\rho(\lambda)$ есть ортогональная спектральная функция, то множество функций вида

$$\int_0^{l'} f^2(x)\,\varphi(x,\ \lambda)\,dx \qquad (l' < l),$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, плотно в $L_2\{\rho\}$. Положим

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}, & \lambda \geqslant 0, \\ \rho(\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} \tag{10.4}$$

$$F(x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x \cdot \sin\sqrt{\lambda}\,y}{\lambda}\,d\sigma(\lambda) \qquad (x,\ y < l). \tag{10.5}$$

Точно так же, как и в § 2 и 3, можно доказать, что существуют непрерывные производные $(x,\ y < l)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,\ y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

и имеют место интегральные уравнения:

$$f(x,\ y) = K_1(x,\ y) - \int_0^y K_1(x,\ t)\,K_1(y,\ t)\,dt \qquad (y \leqslant x,\ x < l), \tag{I}$$

$$f(x,\ y) + \int_0^x f(y,\ t)\,K(x,\ t)\,dt + K(x,\ y) = 0 \qquad (y \leqslant x,\ x < l). \tag{II}$$

2. Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть $\rho(\lambda)$ есть монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1°. *Для каждого $x < 2l$ существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}\sqrt{|\lambda|}\,x\,d\rho(\lambda).$$

2°. *Функция*

$$a(x) = \int_1^{\infty} \frac{\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)$$

имеет непрерывную четвертую производную, если $0 \leqslant x < 2l$. В этом равенстве $\sigma(\lambda)$ определена согласно (10.4).

Из условия 2° следует, что функция $F(x,\ y)$, определенная по равенству (10.5), имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,\ y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Далее, точно так же, как в § 4, доказывается, что если $\rho(\lambda)$ имеет бесчисленные множества точек роста в каком-либо конечном интервале, то уравнение (II) разрешимо для $x < l$. Уравнение (II) разрешимо также в случае, который был рассмотрен в предыдущем параграфе. Повторяя рассуждения § 5, 6 и 7, можно доказать равенство Парсеваля и восстановить уравнение.

Таким образом, условия 1° и 2° достаточны для того, чтобы функция $\rho(\lambda)$ была спектральной функцией уравнения (1), заданного в интервале $(0, l)$.

Выясним теперь, при каком дополнительном условии функция $\rho(\lambda)$ является ортогональной спектральной функцией. Точно так же, как в § 8, можно показать, что для того чтобы функция $\rho(\lambda)$ являлась ортогональной спектральной функцией, достаточно, чтобы (кроме условий 1° и 2°) множество функций

$$F_{l'}(\lambda) = \int_0^{l'} f(x) \cos \sqrt{\lambda}\, x\, dx \quad (l' < l),$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, было плотно в $L_2\{\rho\}$. Последнее обстоятельство имеет место в том случае, когда из ортогональности функции $g(\lambda) \subset L_2\{\rho\}$ ко всем функциям $F_{l'}(\lambda)$, т. е. из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) F_{l'}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0$$

следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0.$$

Обозначим через N произвольное положительное число. Меняя порядок интегрирования, мы получим

$$\int_{-\infty}^{N} g(\lambda) F_{l'}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^{l'} f(x) \int_{-\infty}^{N} g(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}\, x\, d\rho(\lambda). \tag{10.6}$$

Предположим, что при $N \to \infty$ функции

$$\int_{-\infty}^{N} g(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}\, x\, d\rho(\lambda)$$

сходятся в среднем квадратичном по интервалу $(0, l)$ к некоторой функции* $G(x)$. Переходя в равенстве (10.6) к пределу, мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) F_{l'}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^{l'} f(x) G(x)\, dx = 0.$$

Так как $f(x)$ — произвольная функция, то из последнего равенства следует, что $G(x)$ почти всюду в интервале $(0, l)$ равняется нулю. Таким образом, нами получена следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть* $g(\lambda)$ *есть произвольная функция, принадлежащая* $L_2\{\rho\}$. *Если из того обстоятельства, что при* $N \to \infty$ *функции*

$$\int_{-\infty}^{N} g(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}\, x\, d\rho(\lambda)$$

* Для ортогональных спектральных функций $\rho(\lambda)$ это всегда имеет место.

сходятся к нулю в среднем квадратичном на интервале $(0, l)$, *следует, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0,$$

то $\rho(\lambda)$ *есть ортогональная спектральная функция.*

Замечание. Случай $h = \infty$ изучается аналогично.

§ 11. Классическая задача Штурма-Лиувилля

1. Результаты предыдущих параграфов позволяют сравнительно легко охарактеризовать спектральные функции, соответствующие классической задаче Штурма-Лиувилля. Пусть функция $q(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $(0, l)$. Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \tag{11.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h, \tag{11.2}$$

где h — произвольное действительное число. Пусть H — другое действительное число. Рассмотрим во втором конце интервала, т. е. в точке $x = l$, второе граничное условие:

$$(y' + Hy)_{x=l} = 0. \tag{11.3}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — собственные значения граничной задачи (11.1) — (11.3). Как известно, спектр рассматриваемой задачи ограничен снизу. Пусть λ_0 есть наименьшее собственное значение. Уравнение (11.1) можно записать в виде

$$y'' + \{(\lambda - \lambda_0) - (q(x) - \lambda_0)\} y = 0.$$

Полагая $\lambda - \lambda_0 = \mu$, мы получим граничную задачу с неотрицательным спектром. Поэтому без нарушения общности рассуждений можно в дальнейшем предполагать, что спектр неотрицателен. Собственные функции $\varphi(x, \lambda_n)$, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны, т. е.

$$\int_0^l \varphi(x, \lambda_n)\, \varphi(x, \lambda_m)\, dx = 0 \quad (n \neq m).$$

Далее, положим

$$\rho_n = \int_0^l \varphi^2(x, \lambda_n)\, dx$$

(напоминаем, что собственные функции выбраны так, чтобы выполнялись условия (11.2)). Для каждой функции $f(x) \subset L_2(0, l)$ имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_0^l f^2(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \left\{ \int_0^l f(x)\, \varphi(x, \lambda_n)\, dx \right\}^2 .$$

Если $H \neq \infty$, то для собственных значений λ_n справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l} n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{11.4}$$

Для собственных функций справедлива асимптотическая формула

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos n \frac{\pi}{l} x + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\rho_n = \frac{l}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{11.5}$$

В рассматриваемом случае функции

$$K(x, t), \quad K_1(x, t), \quad f(x, t), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad (t \leqslant x)$$

непрерывны вплоть до точки $x = l$. Поэтому интегральные уравнения (I) и (II) имеют место вплоть до точек $y = l$ и $x = l$.

2. Перейдем теперь к решению обратной задачи. Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots$ — различные неотрицательные числа, удовлетворяющие асимптотической формуле (11.4), и пусть в точках $\sqrt{\lambda_n}$ заданы положительные скачки ρ_n, удовлетворяющие асимптотической формуле (11.5). Докажем следующие леммы:

ЛЕММА I. *Система функций* $\cos\sqrt{\lambda_n}\, x$ *полна на интервале* $(0, l)$ *в пространстве* L_2.

Доказательство. Заменив числа λ_n на $\mu_n = \frac{l^2}{\pi^2}\lambda_n$, мы сведем интервал $(0, l)$ к интервалу $(0, \pi)$. Обозначим $\sqrt{\mu_n}$ через τ_n. Далее, воспользуемся следующей теоремой Левинсона * [(9), стр. 6]:

Обозначим через $\Lambda(u)$ число чисел τ_n, которые $\leqslant u$. Если

$$\int_1^v \frac{\Lambda(u)}{u}\, du > v - \frac{1}{8}\ln v - c, \tag{11.6}$$

где c — константа, то из равенств

$$\int_0^\pi \cos\sqrt{\lambda_n}\, x \cdot f(x)\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots, \quad f(x) \in L_2)$$

следует, что $f(x) = 0$ почти всюду, т. е. система $\cos\sqrt{\mu_n}\, x$ полна в L_2.

В нашем случае $\tau_n = \sqrt{\mu_n} = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Поэтому для достаточно больших u $\Lambda(u) = [u] + 1$ и, значит, $\frac{\Lambda(u)}{u} \geqslant 1$. Поэтому неравенство (11.6) выполняется. Заменяя x на $\frac{\pi}{l} x$, мы убедимся, что система $\cos\sqrt{\lambda_n}\, x$ полна в $L_2(0, l)$.

ЛЕММА II. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, x$ *сходится в среднем квадратичном на интервале* $(0, l)$ *к нулю, то для всех* n *имеем* $c_n = 0$.

---

* Левинсон рассматривает интервал $(-\pi, \pi)$ и функции $e^{i\tau_n x}$, $-\infty < \tau_n < +\infty$. Полагая $\tau_{-n} = -\tau_n$ и функцию $f(x)$ — четной, мы получим приведенный результат.

Доказательство. При доказательстве предыдущей леммы мы уже отмечали, что можно ограничиться интервалом $(0, \pi)$. Определим линейный оператор A формулой

$$A \cos nx = \cos \sqrt{\lambda_n}\, x.$$

Покажем, что оператор A представляется в виде $A = E + P$, где P — вполне непрерывный оператор. В самом деле, выберем в качестве базиса функции $\cos nx$. Пусть оператору A соответствует при этом матрица a_{mn}. Следовательно, по определению,

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \sqrt{\lambda_n}\, x \cos mx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\cos nx + \frac{\alpha_n(x)}{n} \right) \cos mx\, dx = \delta_{mn} + \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \alpha_n(x) \cos mx\, dx = \delta_{mn} + p_{mn}.$$

Далее, имеем, в силу обычного равенства Парсеваля,

$$\sum_{mn} p_{mn}^2 = \sum_n \frac{1}{n^2} \alpha_n^2(x) < +\infty.$$

Следовательно, оператор P с матрицей p_{mn} вполне непрерывен.

В силу леммы I, оператор A переводит все пространство $L_2(0, \pi)$ во все пространство $L_2(0, \pi)$. Поэтому, в силу теоремы Фредгольма, существует ограниченный обратный оператор $B = A^{-1}$, причем $B = E + Q$, где Q — вполне непрерывный оператор. Следовательно,

$$B \cos \sqrt{\lambda_n}\, x = \cos nx.$$

Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty c_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, x$ сходится к нулю в среднем квадратичном. Применив оператор B, мы получим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty c_n \cos nx$ сходится к нулю в среднем квадратичном, и значит, в силу ортогональности функций $\cos nx$, $c_n = 0$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, что и требовалось доказать.

Основываясь на леммах I и II, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть положительные числа* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *подчиняются асимптотической формуле* (11.4), *а положительные числа* $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots$ *подчиняются асимптотической формуле* (11.5). *Пусть*

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \frac{1}{\rho_n}.$$

Если функция $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет условию* 2° *предыдущего параграфа, то существует функция* $K(x, t)$, *имеющая для* $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant l$ *непрерывные частные производные первого и второго порядков, причем функции*

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos \sqrt{\lambda_n}\, x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t\, dt \tag{11.7}$$

суть решения уравнения

$$y'' + (\lambda_n - q(x)\,y) = 0, \tag{11.8}$$

где

$$q(x) = \frac{1}{2}\frac{dK(x, x)}{dx}, \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Функции $\varphi(x, \lambda_n)$ *образуют на интервале* $(0, l)$ *полную ортогональную систему.*

Доказательство. Вначале покажем, что линейное интегральное уравнение (II) разрешимо для $x \leqslant l$. На основании результата § 4 достаточно показать, что из равенства

$$\int_0^\infty G^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) = 0, \tag{11.9}$$

где $G(\lambda) = \int_0^x g(t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$, следует, что $g(t) = 0$ почти всюду. В силу определения функции $\rho(\lambda)$, равенство (11.9) возможно лишь тогда, когда для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$G(\lambda_n) = \int_0^x g(t)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\,dt = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

В силу леммы I, последнее равенство возможно лишь в том случае, если $g(t) = 0$ почти всюду. Поэтому уравнение (II) разрешимо для всех x вплоть до $x = l$.

Повторяя рассуждения § 5 и 6, мы докажем полноту системы функций (11.7) и получим для них дифференциальное уравнение (11.8).

Покажем, что функции $\varphi(x, \lambda_n)$ ортогональны. На основании теоремы, доказанной в предыдущем параграфе, для ортогональности функций $\varphi(x, \lambda_n)$ достаточно, чтобы из сходимости к нулю ряда $\sum_0^\infty \frac{1}{\rho_n} a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,x$ следовало, что для всех n $a_n = 0$. Но это есть содержание леммы II. Таким образом, теорема полностью доказана.

3. Покажем теперь, как восстановить граничное условие на втором конце $x = l$. Из формулы (11.7) следует

$$\varphi(0, \lambda_n) = 1, \quad \varphi_x'(0, \lambda_n) = K(0, 0) = h. \tag{11.10}$$

Далее, имеем

$$\varphi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x))\,\varphi(x, \lambda_n) = 0,$$
$$\varphi''(x, \lambda_m) + (\lambda_m - q(x))\,\varphi(x, \lambda_m) = 0.$$

Умножим первое уравнение на $\varphi(x, \lambda_m)$, а второе на $\varphi(x, \lambda_n)$ и вычтем одно из другого. Мы получим тождество

$$\varphi''(x, \lambda_n)\,\varphi(x, \lambda_m) - \varphi''(x, \lambda_m)\,\varphi(x, \lambda_n) = (\lambda_m - \lambda_n)\,\varphi(x, \lambda_n)\,\varphi(x, \lambda_m).$$

Замечая, что правая часть этого тождества есть

$$[\varphi'(x, \lambda_n)\,\varphi(x, \lambda_m) - \varphi'(x, \lambda_m)\,\varphi(x, \lambda_n)]',$$

мы получим, интегрируя в пределах $(0, l)$, в силу ортогональности и условий (11.10), что $\varphi'(l, \lambda_n)\varphi(l, \lambda_m) - \varphi'(l, \lambda_m)\varphi(l, \lambda_n) = 0$.

Из последнего равенства следует

$$\frac{\varphi'(l, \lambda_n)}{\varphi(l, \lambda_n)} = \frac{\varphi'(l, \lambda_m)}{\varphi(l, \lambda_m)}.$$

Таким образом, отношение $\dfrac{\varphi'(l, \lambda_n)}{\varphi(l, \lambda_n)}$ остается постоянным, что и дает второе граничное условие.

4. Если при выводе интегральных уравнений (см. § 3) функцию

$$f_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \leqslant x \\ 0 & \text{для } t > x \end{cases}$$

разлагать не в интеграл Фурье, а в ряд Фурье по $\cos n\frac{\pi}{l}x$, то для функции $F(x, y)$ получается формула

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\rho_n}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\cdot\sin\sqrt{\lambda_m}\,y}{\lambda_n} - \frac{2l}{\pi^2}\frac{\sin n\frac{\pi}{l}x\cdot\sin n\frac{\pi}{l}y}{n^2}\right] + \\ + \frac{1}{\rho_0}\frac{\sin\sqrt{\lambda_0}\,x\,\sin\sqrt{\lambda_0}\,y}{\lambda_0} - \frac{xy}{l}.$$

Поэтому условие 2° предыдущего параграфа можно сформулировать так:

Функция

$$a(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\rho_n}\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}x}{\rho_n} - \frac{2l}{\pi^2}\frac{\cos n\frac{\pi}{l}x}{n}\right]$$

имеет непрерывную четвертую производную для $0 \leqslant x \leqslant 2l$ (в точке $x = 2l$ имеются в виду производные слева, а в точке $x = 0$ — справа).

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если*

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l}n + \frac{b_1}{n} + \frac{b_3}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \tag{11.11}$$

$$\rho_n = \frac{2}{l} + \frac{a_1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \tag{11.12}$$

где a_1, b_1, b_3 *— постоянные числа, то существует функция* $q(x)$ *с данными* λ_n *и* ρ_n.

Доказательство. Достаточно показать, в силу теоремы 1, что функция $a(x)$ имеет непрерывную четвертую производную для $0 \leqslant x \leqslant 2l$.

Если асимптотические формулы (11.11) и (11.12) подставить в выражение для $a(x)$, то, с одной стороны, выделятся ряды, которые можно четырежды дифференцировать, так как продифференцированный четырежды ряд сходится равномерно. С другой стороны, мы выделим ряды, которые получаются формальным интегрированием ряда $\sum\dfrac{\sin n\frac{\pi}{l}x}{n\frac{\pi}{l}}$. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{l}x}{n\frac{\pi}{l}} = \frac{l-x}{2} \quad (0 < x < 2l),$$

то для $0 \leqslant x \leqslant 2l$ формальным производным этого ряда соответствуют непрерывные функции и, следовательно, теорема доказана.

Замечание 1. Если h или $H = \infty$, то для λ_n имеет место другая асимптотика:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если же h и $H = \infty$, то $\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l}(n+1) + O\left(\frac{1}{n}\right)$. В обоих случаях ρ_n подчиняется асимптотике: $\rho_n = \frac{1}{n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

При выводе интегральных уравнений следует функцию $f_x(t)$ разлагать в ряд по $\sum \frac{\sin n \frac{\pi}{l} x}{n \frac{\pi}{l}}$. При этом

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\rho_n}\frac{(1-\cos\sqrt{\lambda_n}\,x)(1-\cos\sqrt{\lambda_n}\,y)}{\lambda_n^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{l}{2}\left(1 - \cos n\frac{\pi}{l}x\right)\left(1 - \cos n\frac{\pi}{l}x\right)\right].$$

Замечание 2. Дифференцируемость $q(x)$ связана с числом членов асимптотического разложения для ρ_n и λ_n. Например, для бесконечной дифференцируемости $q(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для ρ_n и λ_n имели место классические бесконечные асимптотические разложения.

Поступило
11.XII.1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Амбарцумян В. А., Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Zschr. f. Physik, 53 (1929), 690—695.

[2] Марченко В. А., Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка, Доклады Ак. Наук СССР, т. 72, № 3 (1950), 457—460.

[3] Крейн М. Г., Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля, Доклады Ак. Наук СССР, т. 76, № 1 (1951), 21—24.

[3a] Крейн М. Г., Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот, Доклады Ак. Наук СССР, т. 76, № 3 (1951), 315—318.

[4] Левитан Б. М., Применение операторов обобщенного сдвига к дифференциальным уравнениям второго порядка, Успехи матем. наук, т. IV (29), вып. 1 (1949), 3—112.

[5] Повзнер А. Я., О дифференциальных уравнениях типа Штурма-Лиувилля на полуоси, Матем. сб., т. 23 (65) : 1 (1948), 3—52.

[6] Borg G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math., 78, Nr. 2 (1945), 1—96.

[7] Левитан Б. М., Об одной теореме единственности, Доклады Ак. Наук СССР, т. 76, № 4 (1951), 485—488.

[8] Titchmarsh E., The zeros of certain integrals functions, Proc. London Math. Soc. v. 25 (1926), 283—302.

[9] Levinson N., Gap and density theorems, Amer. Math. Soc., vol. 26 (1940).

[10] Чудов Л. А., Обратная задача Штурма-Лиувилля, Матем. сб., т. 25 (67): 3 (1949), 451—456.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 361—383

Ф. И. КАРПЕЛЕВИЧ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОРНЯХ МАТРИЦ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе находится область распределения характеристических корней матриц n-го порядка с неотрицательными элементами и фиксированным максимумом модуля характеристических корней.

§ 1

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_n$ всех матриц n-го порядка с неотрицательными элементами таких, что максимальный модуль их характеристических корней равен ρ, и обозначим через M_n^ρ множество характеристических корней всех таких матриц. Множество M_n^ρ при обычной геометрической интерпретации комплексных чисел изображается некоторой фигурой на плоскости. Нашей задачей является определение фигуры M_n^ρ. Эта задача была поставлена А. Н. Колмогоровым в 1938 г. в связи с теорией цепей Маркова и в 1946 г. была частично решена Н. А. Дмитриевым и Е. Б. Дынкиным ([1]), которые вычислили часть фигуры M_n^ρ, заключенную внутри некоторого угла и, кроме того, полностью определили M_n^ρ для $n \leqslant 5$.

В предлагаемой работе задача А. Н. Колмогорова решена полностью.

Очевидно, что фигура M_n^ρ получается из фигуры M_n^1 посредством гомотетии из точки O с коэффициентом ρ, поэтому достаточно найти фигуры M_n^1 (мы будем обозначать их в дальнейшем через M_n, опуская верхний индекс).

Выпуклый n-угольник Q мы назовем *циклическим*, если существуют комплексное число λ и целое число $p \leqslant n$ такие, что Q совпадает с выпуклой оболочкой системы точек

$$\lambda^m e^{2\pi i \frac{q}{p}} \quad (m = 0, 1, \ldots; \ \ q = 0, 1, \ldots p-1).$$

Основными результатами предлагаемой работы являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА А. *Фигура M_n является теоретико-множественным объединением всех циклических k-угольников для $k \leqslant n$.*

Теорема А была сформулирована в качестве гипотезы в работе ([1]). При этом, однако, под циклическими многоугольниками понимались только многоугольники, являющиеся выпуклой оболочкой точек $1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n, \ldots$

Несмотря на то, что нами найдены явные уравнения кривых, задающих границу фигуры M_n (см. теорему В), вопрос о том, верна ли теорема А при этом, более узком понимании термина «циклический многоугольник», остается открытым.

ТЕОРЕМА В. *Фигура* M_n *симметрична относительно действительной оси, заключена в круге* $|z| \leqslant 1$ *и имеет с окружностью* $|z| = 1$ *общие точки* $e^{2\pi i \frac{a}{b}}$ $(0 \leqslant a < b \leqslant n)$. *Граница* M_n *состоит из этих точек и соединяющих их в круговом порядке криволинейных дуг. Для* $n > 3$ *каждая из этих дуг задается одним из следующих параметрических уравнений:*

$$\text{I.} \qquad \lambda^q (\lambda^p - t)^r = (1 - t)^r,$$
$$\text{II.} \qquad (\lambda^b - t)^d = (1 - t)^d \lambda^q,$$

где параметр t *изменяется в пределах* $0 \leqslant t \leqslant 1$, b, d, p, q, r — *натуральные числа, которые определяются следующим образом:*

Пусть концы некоторой дуги, взятые против часовой стрелки, суть $e^{2\pi i \frac{a'}{b'}}$ *и* $e^{2\pi i \frac{a''}{b''}}$. *Возможны два случая:*

$$\text{a)} \qquad b'' \left[\frac{n}{b''}\right] \geqslant b' \left[\frac{n}{b'}\right],$$
$$\text{b)} \qquad b'' \left[\frac{n}{b''}\right] \leqslant b' \left[\frac{n}{b'}\right].$$

Если для некоторой дуги имеет место а), то для комплексно-сопряженной дуги имеет место случай b) и обратно. Поэтому, в силу симметрии M_n, *достаточно определить дуги, удовлетворяющие условию а).*

Пусть $r_1 = b''$, $r_2 = a''$, $r_3, \ldots, r_m$ — *последовательность остатков, получающихся при нахождении наибольшего общего делителя чисел* b'' *и* a'' *посредством алгоритма Евклида. Если* $\left[\frac{n}{b''}\right] = 1$ *и для некоторого целого* s $r_{2s} = 1$, *то дуга, соединяющая точки* $e^{2\pi i \frac{a'}{b'}}$ *и* $e^{2\pi i \frac{a''}{b''}}$, *задается уравнением* I, *где* $r = r_{2s-1}$, *а числа* p *и* q *определяются из соотношений*

$$a'' p \equiv 1 \bmod b'' \qquad (0 < p < b''),$$
$$a'' q \equiv -r \bmod b'' \qquad (0 \leqslant q < b'').$$

В противном случае дуга, соединяющая точки $e^{2\pi i \frac{a'}{b'}}$ *и* $e^{2\pi i \frac{a''}{b''}}$ *задается уравнением* II, *причем* $d = \left[\frac{n}{b''}\right]$, $b = b''$, *а* q *определяется из соотношения*

$$a'' q \equiv -1 \bmod b'' \qquad (0 < q < b'').$$

Для примера приведем уравнения границы фигуры M_7. В силу симметрии M_n, достаточно привести уравнения для части границы, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

$\frac{a'}{b'}$	$\frac{a''}{b''}$	Уравнения, границ, соединяющих точки $e^{2\pi i \frac{a'}{b'}}$ и $e^{2\pi i \frac{a''}{b''}}$	Тип уравнения
0	$^1/_7$	$(\lambda - t)^7 = (1 - t)^7$	I
$^1/_7$	$^1/_6$	$\lambda^7 - t = (1 - t)\lambda$	II
$^1/_6$	$^1/_5$	$\lambda^6 - t = (1 - t)\lambda$	II
$^1/_5$	$^1/_4$	$\lambda^5 - t = (1 - t)\lambda$	II
$^1/_4$	$^2/_7$	$\lambda^7 - t = (1 - t)\lambda^3$	II
$^2/_7$	$^1/_3$	$\lambda(\lambda^3 - t)^3 = (1 - t)^3$	I
$^1/_3$	$^2/_5$	$(\lambda^3 - t)^2 = (1 - t)^2\lambda$	II
$^2/_5$	$^3/_7$	$\lambda^7 - t = (1 - t)\lambda^2$	II
$^3/_7$	$^1/_2$	$\lambda(\lambda^2 - t)^3 = (1 - t)^3$	I

§ 2

Согласно теореме А. Н. Колмогорова [см. ([1]), дополнение], фигура M_n совпадает с множеством характеристических корней всех стохастических матриц n-го порядка, т. е. таких матриц (a_{ij}), что $a_{ij} \geqslant 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(i = 1, \ldots n)$.

Используя эту теорему, Н. Дмитриев и Е. Дынкин показали, что $\lambda \in M_n$ тогда и только тогда, когда на комплексной плоскости существует выпуклый k-угольник Q $(k \leqslant n)$, не состоящий из одного нуля, такой, что $\lambda Q \subset Q$. Отсюда следует, что фигура M_n звездчата, т. е. вместе с числом λ к M_n принадлежит весь радиус, соединяющий λ с точкой O. Кроме того, легко видеть, что M_n замкнута, поэтому границу M_n составляют числа λ такие, что $\lambda \in M_n$, но $\rho\lambda \bar{\in} M_n$ при любом $\rho > 1$. Такие числа λ будем называть, следуя ([1]), экстремальными. Мы будем опираться на следующий основной результат работы ([1]):

ТЕОРЕМА Дмитриева-Дынкина. *Пусть экстремальное число* $\lambda \in M_n - M_{n-1}$ * *и пусть* $2\pi \frac{k-1}{n} \leqslant \arg \lambda \leqslant 2\pi \frac{k}{n}$ $(0 < k < n)$. *Если выпуклый многоугольник Q содержит λQ и если $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — вершины Q, занумерованные по порядку при обходе контура Q против часовой стрелки, то*

$$\lambda x_s = \alpha_s x_{s+k-1} + \beta_s x_{s+k},$$
$$\alpha_s \geqslant 0, \quad \beta_s \geqslant 0, \quad \alpha_s + \beta_s = 1$$

(индексы приводятся по модулю n). При этом невозможно, чтобы одновременно некоторое $\alpha_i = 0$ и некоторое $\beta_j = 0$. Мы будем всегда предполагать, что все $\beta_j > 0$. Если для какого-нибудь экстремального числа λ и какого-нибудь многоугольника Q все $\beta_j > 0$, а некоторое $\alpha_i = 0$, то для экстремального числа $\bar{\lambda}$ и многоугольника $\bar{Q}$ некоторое $\beta_j = 0$, а все $\alpha_i > 0$. Поэтому условие $\beta_j > 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ выделяет из границы фигуры $M_n - M_{n-1}$ часть T_n такую, что вся граница фигуры $M_n - M_{n-1}$ является теоретико-множественной суммой множеств T_n и $\bar{T}_n$.

* Очевидно включение $M_{n-1} \subset M_n$.

§ 3

Фиксируем экстремальное число $\lambda \in T_n$ такое, что $2\pi \frac{k-1}{n} \leqslant \arg \lambda \leqslant \leqslant 2\pi \frac{k}{n}$ $(0 < k < n)$ и будем рассматривать, не оговаривая этого каждый раз особо, только выпуклые n-угольники Q такие, что $\lambda Q \subset Q$.

ЛЕММА 1. *Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — вершины многоугольника Q, взятые в циклическом порядке при обходе его контура против часовой стрелки, и пусть $\lambda x_s = x_{s+k}$. Многоугольник Q' с вершинами $x_0, x_1, \ldots, x_{s+k-2}, \lambda x_{s-1}, x_{s+k}, x_{s+k+1}, \ldots, x_{n-1}$ при умножении на λ переходит в свою часть.*

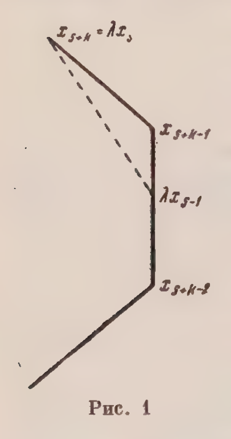


Рис. 1

Действительно, легко видеть (см. рис. 1), что $\lambda Q \subset Q' \subset Q$. Отсюда $\lambda Q' \subset \lambda Q \subset Q'$. Согласно теореме Дмитриева-Дынкина, вершины многоугольника Q при умножении на λ переходят на контур Q. Некоторые из этих вершин попадают при этом в вершины Q, а другие попадают внутрь сторон. Нашей первой задачей будет изучить относительное расположение этих двух типов вершин.

Мы схематизируем и упростим стоящую перед нами задачу, введя в рассмотрение следующую игру. Доска образована n полями, расположенными по кругу. На некоторых из этих полей стоят фишки. За один ход можно передвинуть любую фишку через $k-1$ поле на k-е в направлении против часовой стрелки, если только поле, находящееся непосредственно перед фишкой, не занято. Если в результате некоторого хода фишка попадает на поле, занятое другой фишкой, то фишка, занимавшая это поле, снимается с доски. Рассмотрим произвольный многоугольник Q такой, что $\lambda Q \subset Q$, и сопоставим в циклическом порядке вершины Q и поля нашей доски. Расставим по фишке на поля, отвечающие вершинам многоугольника Q, которые при умножении на λ не переходят в вершины Q (т. е. переходят внутрь сторон). Конфигурации, построенные таким образом для всевозможных многоугольников Q, назовем *допустимыми*. Из леммы 1 вытекает, что конфигурации, получаемые из допустимой конфигурации по правилам нашей игры, снова являются допустимыми. Наша ближайшая цель — выбрать из всех допустимых конфигураций по возможности наиболее простую.

Для решения этой задачи нам понадобится одна лемма из теории чисел. Условимся обозначать остаток от деления на n числа m через $R_n(m)$. Фиксируем некоторое целое число k, удовлетворяющее условию $0 < k \leqslant n$, и рассмотрим последовательность

$$\text{(A)} \quad a_0 = 0, a_1, \ldots, a_m, \ldots,$$

где $a_m = R_n(mk)$.

Рассмотрим, кроме того, последовательность

$$\text{(R)} \quad r_1 = n, \ r_2 = k, r_3, \ldots, r_s \geqslant 0,$$

образованную остатками, получающимися при нахождении наибольшего делителя $d = D(n, k)$ чисел n и k посредством алгоритма Евклида.

Положим также $r_0 = n + k$, $r_{-1} = 2n + k$. Последовательности (A) и (R) будут неоднократно нами использованы, и мы сохраним на протяжении всей статьи введенные обозначения для их элементов.

Назовем a_m минимальным членом последовательности (A), если $0 < a_m < a_t$ для $t = 1, 2, \ldots, m-1$.

Назовем a_m максимальным членом последовательности (A), если $a_m > a_t$ для $t = 0, 1, \ldots, m-1$.

Минимальных и максимальных чисел конечное число. Занумеруем их через $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$ в том порядке, в каком они следуют в последовательности (A).

ЛЕММА 2.

1. *Если* μ_i — *минимальный член последовательности* (A) *и для некоторого* p $r_{2p} \leqslant \mu_i < r_{2p-2}$, *то* $\mu_i = vr_{2p-1} + r_{2p}$, *где* v — *целое неотрицательное число.*

1*. *Если* μ_i — *максимальный член последовательности* (A) *и для некоторого* p $r_{2p+1} \leqslant n - \mu_i < r_{2p-1}$, *то* $n - \mu_i = vr_{2p} + r_{2p+1}$, *где* v — *целое неотрицательное число.*

2. *Если* μ_i — *минимальный член последовательности* (A) *и для некоторого* p $r_{2p} \leqslant \mu_i < r_{2p-2}$, *то*

$$\text{a)} \quad \max_{0 \leqslant j < i} \mu_j = n - r_{2p-1},$$
$$\text{b)} \quad \min_{0 < j < i} \mu_j = \mu_i + r_{2p-1}.$$

2*. *Если* μ_i — *максимальный член последовательности* (A) *и для некоторого* p $r_{2p+1} \leqslant n - \mu_i < r_{2p-1}$, *то*

$$\text{a)} \quad \min_{0 < j \leqslant i} \mu_j = r_{2p},$$
$$\text{b)} \quad \max_{0 \leqslant j < i} \mu_j = \mu_i - r_{2p}.$$

Мы будем доказывать лемму 2 по индукции. Для $i \leqslant 2$ она легко проверяется непосредственно. Пусть теперь $i \geqslant 2$ и пусть лемма 2 верна для всех μ_j при $0 \leqslant j \leqslant i$; докажем ее для μ_{i+1}. Могут представиться два случая:

(A) μ_i — минимальный член,

(B) μ_i — максимальный член.

Случай (A). Очевидно, что для некоторого p

$$r_{2p} \leqslant \mu_i < r_{2p-2}.$$

Мы разобьем случай (A) на два подслучая:

$$(\mathrm{A}_1) \qquad r_{2p} < \mu_i < r_{2p-2},$$
$$(\mathrm{A}_2) \qquad r_{2p} = \mu_i.$$

(A_1). Пусть $\mu_i = a_q$. Выберем из последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_{q-1}$ наибольший член $\nu_1 = a_m$. Из предположения индукции 2a) следует, что $a_m = \nu_1 = n - r_{2p-1}$. Из последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ выберем наибольший член ν_2. Из предположения индукции 2*b) следует, что $\nu_2 = n - r_{2p-1} - r_{2p-2}$. Из предположения индукции 1 следует, что $\mu_i = vr_{2p-1} + r_{2p}$ и так как $r_{2p} < \mu_i$, то $v \geqslant 1$.

Рассмотрим последовательность $\mu_i = a_q, a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots, a_{q+m}$. Очевидно, что

$$a_q = R_n(a_q + a_0),\ a_{q+1} = R_n(a_q + a_1), \ldots, a_{m+q} = R_n(a_q + a_m).$$

Так как $0 < a_t \leqslant \nu_2$ при $0 < t < m$, то

$$\mu_i = a_q < a_q + a_t \leqslant \mu_i + n - r_{2p-1} - r_{2p-2} < n - r_{2p-1} = \\ = \nu_1 < n \quad (t=1, \ldots, m-1).$$

Поэтому

$$\mu_i < R_n(a_q + a_t) = a_q + a_t < \nu_1.$$

Это показывает, что среди членов $a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots, a_{q+m-1}$ не будет ни минимальных, ни максимальных членов последовательности (A).

$$a_q + a_m = \mu_i + \nu_1 = vr_{2p-1} + r_{2p} + n - r_{2p-1} = (v-1)r_{2p-1} + r_{2p} + n;$$

так как $v \geqslant 1$, то $(v-1)\ r_{2p-1} + r_{2p} \geqslant r_{2p} \geqslant 0$ и поэтому

$$a_{q+m} = R_n(a_q + a_m) = (v-1)r_{2p-1} + r_{2p} < vr_{2p-1} + r_{2p} = \mu_i.$$

Этим доказано, что

$$a_{q+m} = (v-1)r_{2p-1} + r_{2p} = \mu_i - r_{2p-1} = \mu_{i+1}$$

является минимальным членом последовательности (A), после чего уже нетрудно полностью проверить, что все пункты леммы 2 выполнены для μ_{i+1}.

(A_2). Положим $\mu_i = a_q$. Выберем, как и в случае (A_1), $\nu_1 = a_m$ и ν_2. Точно так же среди членов $a_{q+1}, \ldots, a_{q+m-1}$ не найдется ни максимальных, ни минимальных членов последовательности (A).

$$a_{q+m} = R_n(a_q + a_m) = R_n(\mu_i + \nu_1) = R_n(r_{2p} + n - r_{2p-1}) = n - r_{2p-1} + r_{2p}$$

пусть $r_{2p-1} = ur_{2p} + r_{2p+1}$ (из определения минимального члена $0 < a_q = \mu_i = r_{2p}$, поэтому деление возможно). Тогда

$$\nu_1 = n - r_{2p-1} < a_{q+m} = n - r_{2p-1} + r_{2p} = n - (u-1)r_{2p} - r_{2p+1}.$$

Так как $i \geqslant 2$, то $q \geqslant 2$ и поэтому $\nu_1 = a_m \geqslant a_1$, следовательно, $m \geqslant 1$ и $a_{q+m} \neq a_q$. Тем самым доказано, что

$$a_{q+m} = n - (u-1)r_{2p} - r_{2p+1} = \mu_{i+1}$$

— максимальный член последовательности (A), после чего проверка леммы 2 не представляет трудности.

Случай (B) разбирается аналогично.

Следствие 1. a) *Для всякого* $m \geqslant 1$ r_{2m} *является минимальным членом последовательности* (A), *если только* $r_{2m} \neq 0$;

b) *для всякого* $m \geqslant 1$ $n - r_{2m-1}$ *является максимальным членом последовательности* (A).

Для доказательства заметим, что все a_i делятся на d и поэтому $d \leqslant a_i \leqslant n - d$, если только $a_i \neq 0$. Стало быть, d является минимальным, а $n - d$ — максимальным членом последовательности (A).

Далее, применяя последовательно пункты 2a) и 2*a) леммы 2, нетрудно убедиться в справедливости следствия 1.

Перейдем теперь к изучению наших конфигураций. Разобьем фишки произвольной конфигурации на группы, отнеся две фишки A и B к одной группе в том и только в том случае, если существует последовательность фишек $A_1, \ldots, A_m$ такая, что пары фишек (A, A_1), (A_i, A_{i+1}) для $i = 1, \ldots, m-1$ и (A_m, B) расположены на соседних полях.

Обозначим через $\varphi(\Gamma)$ число фишек в конфигурации Γ и через $\psi(\Gamma)$ — число групп в ней. Если группа не занимает всей доски, то поле, расположенное непосредственно перед группой, свободно, поэтому крайнюю фишку этой группы можно одним ходом передвинуть на k полей вперед, после этого можно передвинуть вторую фишку группы и т. д.; в результате серии таких ходов вся группа передвинется на k полей вперед. Таким образом, мы можем формулировать лемму 3.

ЛЕММА 3. *Если на доске есть свободные поля, то можно серией ходов передвинуть любую группу фишек как целое на k полей вперед, не передвигая при этом фишек из других групп.*

ТЕОРЕМА I. *Всякую конфигурацию Γ можно перевести серией ходов в конфигурацию Γ_0 такую, что либо $\psi(\Gamma_0) = 1$ и $n - \varphi(\Gamma_0)$ — максимальный член последовательности* (A), *либо $\varphi(\Gamma_0) < d$.*

Доказательство. Рассмотрим множество конфигураций, получающихся из конфигурации Γ конечным числом ходов, и выделим те из них, у которых наименьшее число групп; из этих конфигураций выберем конфигурацию Γ_0, в которой минимальное число фишек.

a) Докажем, что либо $\psi(\Gamma_0) = 1$, либо $\varphi(\Gamma_0) < d$.

Рассмотрим какую-нибудь группу фишек G и выделим на доске d расположенных рядом полей так, чтобы первая фишка группы G стояла на первом из отмеченных полей. Пусть $\psi(\Gamma_0) > 1$. Тогда существует группа G_1, отличная от G. По лемме 3, ее можно передвинуть на k полей вперед; в силу выбора конфигурации Γ_0, две группы при этом не могут слиться и поэтому передвинутую группу G_1 можно передвинуть еще на k полей вперед и т. д. Будем двигать группу G_1 до тех пор, пока последняя из фишек группы G_1 не попадет на одно из отмеченных полей. Все остальные фишки группы G_1 будут предшествовать этой последней фишке и в то же время будут следовать за группой G, поэтому они также попадут на отмеченные поля. Точно так же можно на этих полях расположить другие группы, поэтому $\varphi(\Gamma_0) < d$.

b) Докажем теперь, что если $\varphi(\Gamma_0) \geqslant d$, то $n - \varphi(\Gamma_0)$ — максимальный член последовательности (A).

Пусть $\varphi(\Gamma_0) \geqslant d$; тогда, в силу a), $\psi(\Gamma_0) = 1$. Наше утверждение выполняется при $\varphi(\Gamma_0) = n$. Рассмотрим случай, когда $\varphi(\Gamma_0) < n$. Занумеруем поля нашей доски по порядку против часовой стрелки так, чтобы те из них, которые заняты фишками, получили номера $n - \varphi + 1$, $n - \varphi + 2, \ldots, n - 1, 0$, где $\varphi = \varphi(\Gamma_0)$. При этой нумерации поле 1 свободно, поэтому фишку, стоящую на поле 0, можно передвинуть на поле a_1, затем на поле a_2 и т. д. Будем передвигать эту фишку до тех пор, пока это возможно. Покажем, что при этой серии ходов фишка побывает на одном из полей $n - \varphi, \ldots, n - 1$. Действительно, фишка может остановиться только на одном из этих полей. С другой стороны, если бы она ходила неограниченное число раз, то она побывала бы на всех

полях с номерами, делящимися на d; но так как полей $n-\varphi, \ldots, n-1$ не меньше чем d, то хотя бы у одного из них номер делится на d. Заметим, однако, что при обходе фишка не может попасть ни на одно из полей $n-\varphi+1, \ldots, n-1$, так как в этом случае число фишек уменьшилось бы, а число групп осталось равным единице. Поэтому фишка остановится на поле $n-\varphi$, не побывав при этом ни на одном из полей $n-\varphi+1, \ldots, n-1$. Но это и значит, что $n-\varphi$ — максимальный член последовательности (A).

ТЕОРЕМА II. *Если $\lambda^n \neq 1$, то существует многоугольник Q_0 такой, что $\lambda Q_0 \subset Q_0$ и*

a) *все вершины Q_0, которые при умножении на λ не переходят в вершины Q_0, расположены подряд;*

b) *если φ — число таких вершин, то $\varphi \geqslant d$ и $n-\varphi$ — максимальный член последовательности* (A).

Доказательство. В силу леммы 1, конфигурация, получаемая из допустимой одним ходом, снова является допустимой, поэтому, по теореме I, существует допустимая конфигурация Γ_0 такая, что либо

a) $\psi(\Gamma_0) = 1$,

b) $n-\varphi(\Gamma_0)$ — минимальный член последовательности (A), либо $\varphi(\Gamma_0) < d$.

Пусть конфигурации Γ_0 соответствует многоугольник Q_0. Покажем, что если $\varphi(\Gamma_0) < d$, то $\lambda^n = 1$. В самом деле, пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — вершины многоугольника Q_0, занумерованные по порядку при обходе его контура против часовой стрелки. Припишем вершине x_i индекс j, где $i \equiv j \bmod d \; (0 \leqslant j < d)$. Так как вершин, не переходящих при умножении на λ снова в вершины, меньше, чем d, то должен найтись такой индекс j, что все вершины с этим индексом при умножении на λ снова переходят в вершины. Рассмотрим какую-нибудь вершину x, отвечающую индексу j. Так как умножение на λ соответствует увеличению номера вершины на k, то умножение на λ не меняет индекса вершины. Поэтому все точки $x, \lambda x, \ldots, \lambda^n x$ являются вершинами с индексами j; при этом очевидно, что $\lambda^n x = x$, поэтому $\lambda^n = 1$. Мы в дальнейшем будем предполагать, что $\lambda^n \neq 1$.

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — вершины многоугольника Q_0, занумерованные по порядку против часовой стрелки. Пусть вершины $x_{n-k+1}, \ldots x_{n-k+\varphi}$ при умножении на λ не переходят в вершины Q_0.

Положим

$$\xi_i = \lambda x_{n-k+i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

(индексы приводятся по модулю n).

По теореме Дмитриева-Дынкина,

$$\xi_i = \alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_i, \quad \alpha_i + \beta_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Очевидно, что для любой вершины x многоугольника Q_0 найдется, и притом единственное, натуральное число c такое, что $\lambda^c x = \xi_i$, $0 < i \leqslant \varphi$. В частности, это относится к вершинам $x_0, \ldots, x_\varphi$. Нашей ближайшей задачей будет найти, каким образом вершины $x_0, \ldots, x_\varphi$ при умножении

на степени λ переходят в точки $\xi_1, \ldots, \xi_\varphi$. При этом нам придется рассмотреть отдельно два случая: $\varphi > d$ и $\varphi = d$.

ТЕОРЕМА III. *Пусть* $n - \nu$ — *максимальный член последовательности* (A), $\nu \geqslant \varphi > d$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \lambda^p x_i &= \xi_{i+r_{2m}}, & i &= 0, 1, \ldots, \nu - r_{2m}, \\ \lambda^{p+q} x_i &= \xi_{i+r_{2m}-\nu}, & i &= \nu - r_{2m} + 1, \ldots, \nu, \end{aligned} \tag{2}$$

где числа m, p *и* q *однозначно определяются из условий*

$$0 < r_{2m} < \nu \leqslant r_{2m-1}, \quad kp \equiv r_{2m} \bmod n, \quad 0 \leqslant p < \frac{n}{d},$$

$$kq \equiv -\nu \bmod n, \quad 0 \leqslant q < \frac{n}{d}.$$

Покажем сначала, что для некоторого m

$$(a) \quad r_{2m} < \nu \leqslant r_{2m-1}.$$

Из леммы 2 для некоторого m

$$r_{2m+1} \leqslant \nu = v r_{2m} + r_{2m+1} < r_{2m-1}.$$

Если $v \neq 0$ и $r_{2m+1} > 0$, то $r_{2m} < \nu$ и (a) доказано; если $v \neq 0$, но $r_{2m+1} = 0$, то $r_{2m} = d < \varphi \leqslant \nu$, что доказывает (a), наконец, если $v = 0$, то $\nu = r_{2m+1} \geqslant \varphi > d$, следовательно, $r_{2m+2} > 0$ и поэтому

$$\nu = r_{2m+1} = u r_{2m+2} + r_{2m+3};$$

отсюда $r_{2(m+1)} < \nu = r_{2(m+1)-1}$ и (a) выполняется, если заменить m на $m+1$. Из (a) следует, что $r_{2m-1} \geqslant \nu > d$, значит, $r_{2m} > 0$.

Умножению на λ соответствует увеличение номера вершины на k. Так как вершины многоугольника Q_0, которые при умножении на λ не переходят в вершины, находятся все среди вершин $x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-k+\nu}$, и так как вершина, переходящая при умножении на λ в точку $\xi_{i+r_{2m}}$, есть $x_{n-k+i+r_{2m}}$, то для того чтобы $\lambda^p x_i = \xi_{i+r_{2m}}$, достаточно, чтобы в последовательности

$$R_n(i + a_0), \; R_n(i + a_1), \ldots, R_n(i + a_l), \ldots$$

появился член $n - k + i + r_{2m}$, причем не позже, чем любое из чисел $n - k + 1, \ldots, n - k + \nu$. Очевидно, что это будет выполняться тогда и только тогда, когда в последовательности

$$R_n(a_1 + i), \; R_n(a_2 + i), \ldots, R_n(a_l + i), \ldots$$

появится, и не позже, чем любое из чисел $1, \ldots, \nu$, член $R_n(r_{2m} + i)$.

В силу следствия 1 леммы 2, r_{2m} является минимальным членом последовательности (A), поэтому если $a_p = r_{2m}$, то, по лемме 2, п. 2 a),

$$a_j \leqslant n - r_{2m-1} \quad (j = 0, \ldots, p-1).$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} a_j + i \leqslant n - r_{2m-1} + \nu - r_{2m} \leqslant n - r_{2m} < n \text{ при } 0 \leqslant j < p, \\ i \leqslant \nu - r_{2m}. \end{gathered} \tag{3}$$

Из леммы 2, п. 2 b) следует, что

$$a_j \geqslant r_{2m} + r_{2m-1} \quad (j = 1, \ldots, p-1),$$

откуда

$$a_j + i \geqslant r_{2m} + r_{2m-1} + i > \nu \quad \text{при} \quad 0 < j < p, \quad i > -r_{2m}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует

$$\nu < a_j + i < n,$$

$$i = -r_{2m} + 1, \ldots, 0, \ldots, \nu - r_{2m}, \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

Значит

$$\nu < R_n(a_j + i),$$

$$i = n - r_{2m} + 1, \ldots, 0, \ldots, \nu - r_{2m}, \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

Это показывает, что в каждой последовательности

$$R_n(a_1 + i), R_n(a_2 + i), \ldots, R_n(a_p + i)$$
$$(i = n - r_{2m} + 1, \ldots, 0, \ldots, \nu - r_{2m})$$

член $R_n(r_{2m} + i) = R_n(a_p + i)$ встретится, причем не позже, чем любое из чисел $1, \ldots, \nu$. Поэтому

$$\lambda^p x_i = \xi_{i+r_{2m}} \quad (i = n - r_{2m} + 1, \ldots, 0, \ldots, \nu - r_{2m}). \tag{2a}$$

Покажем теперь, что для некоторого $q \geqslant 0$

$$\lambda^q x_i = x_{n-\nu+i} \quad (i = \nu - r_{2m} + 1, \nu - r_{2m} + 2, \ldots, \nu). \tag{2b}$$

Равенствами (2a) и (2b) теорема III будет полностью доказана.

Как и прежде, для того чтобы выполнялись равенства (2b), достаточно, чтобы в последовательности $R_n(a_1 + i), \ldots, R_n(a_t + i), \ldots$ встретился член $R_n(n + i - \nu)$, причем не позже, чем любое из чисел $1, 2, \ldots, \nu$. По условию, $n - \nu$ — максимальный член последовательности (A), поэтому для некоторого $q \geqslant 0$ $a_q = n - \nu$ и, следовательно, $R_n(a_q + i) = R_n(n - \nu + i)$. Покажем, что среди чисел

$$R_n(a_1 + i), R_n(a_2 + i), \ldots, R_n(a_{q-1} + i) \quad (i = \nu - r_{2m} + 1, \ldots, \nu)$$

нет ни одного из чисел $1, 2, \ldots, \nu$. Из леммы 2, пп. 2*a) и 2*b) следует, что

$$r_{2m} \leqslant a_j \leqslant n - (r_{2m} + \nu), \quad j = 1, \ldots, q-1.$$

Поэтому

$$a_j + i \leqslant n - r_{2m} < n \text{ и } a_j + i \geqslant r_{2m} + \nu - r_{2m} + 1 > \nu$$
$$(i = \nu - r_{2m} + 1, \ldots, \nu; \ j = 1, \ldots, q-1),$$

чем все и доказано.

Так как a_p — минимальный член последовательности (A), то p — наименьшее положительное число такое, что $kp \equiv r_{2m} \bmod n$. Заметим, однако, что последовательность (A) — периодическая с периодом $\frac{n}{d}$. Поэтому наименьшее положительное решение p сравнения $kp \equiv r_{2m} \bmod n$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant p < \frac{n}{d}$ и определяется этим неравенством однозначно. Аналогично, имеем $kq \equiv -\nu \bmod n$, $0 \leqslant q < \frac{n}{d}$.

Следствие I. По теореме II, при $\varphi > d$ $n-\varphi$ — максимальный член последовательности (A), поэтому мы можем в равенствах (2) положить $\nu = \varphi$, после чего получим

$$\begin{aligned} \lambda^p x_i &= \xi_{i+r_{2m}}, & i &= 0, 1, \ldots, \varphi - r_{2m}, \\ \lambda^{p+q} x_i &= \xi_{i+r_{2m}-\varphi}, & i &= \varphi - r_{2m} + 1, \ldots, \varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

где $0 < r_{2m} < \varphi \leqslant r_{2m-1}$, $kp \equiv r_{2m} \mod n \left(0 \leqslant p < \frac{n}{d}\right)$, $kq \equiv -\varphi \mod n \left(0 \leqslant q < \frac{n}{d}\right)$.

ТЕОРЕМА IV. *Пусть* $\varphi = d$. *Тогда*

$$\lambda^l x_i = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{6}$$

где $l = \frac{n}{d}$.

Доказательство. Так же как в теореме III, равенства (6) будут выполняться в том случае, если в последовательности $R_n(a_1+i), \ldots, R_n(a_t+i), \ldots$ встретится число i, причем не позже, чем любое из чисел $1, 2, \ldots, d$.

Пусть $\frac{n}{d} = l$. Тогда $a_l = 0$ и $a_j > 0$ при $0 < j < l$. Так как любое a_j должно делиться на d, то $d \leqslant a_j \leqslant n-d$ при $a_j \neq 0$; поэтому $d \leqslant a_j \leqslant n-d$ $(0 < j < l)$. Значит,

$$a_j + i \geqslant d + 1 \text{ и } a_j + 1 \leqslant n$$
$$(i = 1, \ldots, d;\ j = 1, \ldots, l-1).$$

Отсюда следует, что среди чисел $R_n(a_1+i)$, $R_n(a_2+i), \ldots, R_n(a_{l-1}+i)$ $(i = 1, \ldots, d)$ не будет ни одного из чисел $1, 2, \ldots, d$. Но $R_n(a_l+i) = R_n(i) = i$, что и доказывает теорему.

Так как вершины многоугольника Q_0, не переходящие при умножении на λ снова в вершины, исчерпываются вершинами $x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-k+\varphi}$, то единственными вершинами многоугольника Q_0, которые при делении на λ не переходят снова в вершины, будут вершины $x_1, \ldots, x_\varphi$. Поэтому все вершины многоугольника Q_0 имеют вид $\lambda^t x_i$ $(i = 1, \ldots, \varphi)$ и при этом для любого t $\lambda^t x_i \neq x_j$, если $i \neq j$ и $1 \leqslant i \leqslant \varphi$, $1 \leqslant j \leqslant \varphi$. Из (5) видно, что при $\varphi > d$ достаточно придавать t значения $(0, \ldots, p-1)$ при $1 \leqslant i \leqslant \varphi - r_{2m}$ и $(0, 1, \ldots, p+q-1)$ при $\varphi - r_{2m} < i \leqslant \varphi$. Таким образом, в случае $\varphi > d$ все вершины многоугольника Q_0 исчерпываются вершинами

$$\lambda^t x_i \quad \begin{matrix} t = 0, \ldots, p-1, \\ i = 1, \ldots, \varphi - r_{2m}, \end{matrix} \qquad \lambda^t x_i \quad \begin{matrix} t = 0, 1, \ldots, p+q-1, \\ i = \varphi - r_{2m} + 1, \ldots, \varphi. \end{matrix} \tag{7}$$

Аналогично из (6) вытекает, что в случае $\varphi = d$ все вершины многоугольника Q_0 исчерпываются вершинами

$$\lambda^t x_i \quad \begin{matrix} t = 0, 1, \ldots, l-1, \\ i = 1, \ldots, d. \end{matrix} \tag{8}$$

Вершины вида $\lambda^t x_i$ мы будем называть вершинами, порожденными вершиной x_i. Из (7) и (8) следует, что всякая вершина многоугольника Q_0 порождается ровно одной из вершин $x_1, \ldots, x_\varphi$.

§ 4

ТЕОРЕМА V. *Если для многоугольника* Q_0 $\varphi > d$ *и* $0 < r_{2m} < \varphi \leqslant r_{2m-1}$, *то при* $n > 3$ $r_{2m} = 1$.

Допустим, что $r_{2m} > 1$. Нашей задачей будет при этих условиях так проварьировать многоугольник Q_0, чтобы проварьированный многоугольник при умножении на λ переходил в свою часть и при этом хотя бы одна из его вершин переходила внутрь многоугольника Q_0. Этим самым мы придем к противоречию с теоремой Дмитриева-Дынкина.

Рассмотрим ломаную Y с вершинами

$$y_i = \frac{x_i}{\lambda^{p+q}} \quad (i = 0, \ldots, r_{2m}) \text{ и } y_i = \frac{x_i}{\lambda^p} \quad (i = r_{2m} + 1, \ldots, \varphi). \tag{9}$$

Обозначим через δ_i интервал (x_{i-1}, x_i) и через Δ_i — интервал (y_{i-1}, y_i). Равенства (9) дают

$$\begin{aligned} \lambda^{p+q}\Delta_i &= \delta_i \quad (i = 1, \ldots, r_{2m}), \\ \lambda^p\Delta_i &= \delta_i \quad (i = r_{2m} + 2, \ldots, \varphi). \end{aligned} \tag{10}$$

Из равенств (1) и (5) следует:

$$\begin{aligned} \lambda^p x_i &= \xi_{i+r_{2m}} \in \delta_{i+r_{2m}} \qquad (i = 0, 1, \ldots, \varphi - r_{2m}), \\ \lambda^{p+q} x_i &= \xi_{i+r_{2m}-\varphi} \in \delta_{i+r_{2m}-\varphi} \quad (i = \varphi - r_{2m} + 1, \ldots \varphi), \end{aligned}$$

откуда, в силу (10),

$$\begin{aligned} x_i &\in \frac{\delta_{i+r_{2m}}}{\lambda^p} = \Delta_{i+r_{2m}} \qquad (i = 2, \ldots, \varphi - r_{2m}), \\ x_i &\in \frac{\delta_{i+r_{2m}-\varphi}}{\lambda^{p+q}} = \Delta_{i+r_{2m}-\varphi} \quad (i = \varphi - r_{2m} + 1, \ldots, \varphi). \end{aligned} \tag{11}$$

Равенства (11) показывают, что вершины $x_2, \ldots x_p$ лежат внутри сторон ломаной Y.

Дальнейшее доказательство распадается на два случая:

1) $2r_{2m} \leqslant \varphi + 1$ и

2) $2r_{2m} > \varphi + 1$.

1) В этом случае будут варьироваться вершины $x_1, \ldots, x_{r_{2m}}$. На прямой x_0, x_1 возьмем точку x_1' и спроектируем ее через точку ξ_2 на сторону ломаной Y, проходящую через вершину x_2 (см. рис. 2); полученную точку x_2' спроектируем через точку ξ_3 на сторону ломаной Y, проходящую через вершину x_3, и т. д. до тех пор, пока не будет получена точка $x'_{r_{2m}}$ (см. рис. 3). Точку $x'_{r_{2m}}$ соединим прямой с точкой $x_{r_{2m}+1}$.

Заметим, что так как, по предположению, $r_{2m} > 1$, то $x'_{r_{2m}}$ не совпадает с x_1'.

Рассмотрим многоугольник Q, получаемый из многоугольника Q_0 следующим образом: вершины вида $\lambda^t x_i$ $(i = 1, \ldots, r_{2m})$ заменяются на вершины вида $\lambda^t x_i'$. Остальные вершины остаются без изменений. Очевидно,

что многоугольник Q вполне определяется, как только выбрана точка x_1'. Покажем, что точку x_1' можно выбрать так, что $\lambda Q \subset Q$ и одна из вершин многоугольника Q при умножении на λ сойдет с контура многоугольника Q.

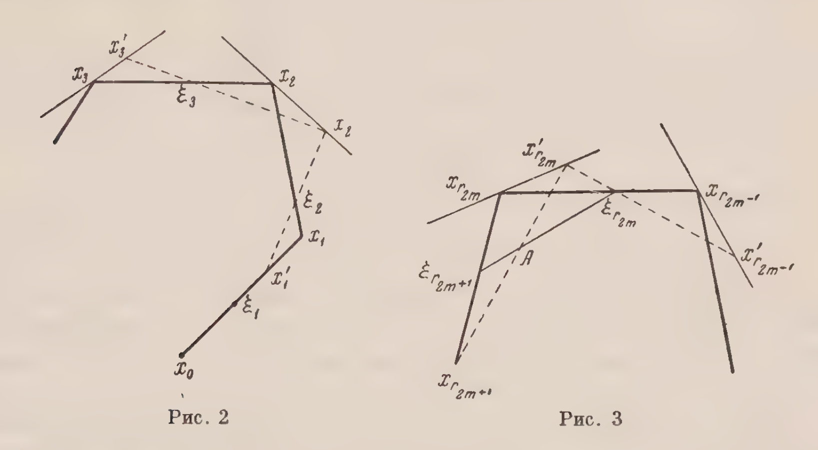


Рис. 2 Рис. 3

В самом деле, выясним, как расположен многоугольник λQ. Все вершины многоугольника Q делятся на две группы:

1) вершины, являющиеся одновременно вершинами многоугольника Q_0, и

2) вершины, порожденные вершинами $x_1', \ldots, x'_{r_{2m}}$. Поэтому если заменить в (7) $x_1, \ldots, x_{r_{2m}}$ на $x_1', \ldots, x'_{r_{2m}}$, то полученными вершинами будут исчерпываться все вершины многоугольника Q. Отсюда видно, что вершины многоугольника Q при умножении на λ переходят снова в вершины многоугольника Q, за исключением вершин

$$\lambda^{p-1}x_i' \quad (i=1, \ldots, r_{2m}), \quad \lambda^{p-1}x_i \quad (i=r_{2m}+1, \ldots, \varphi-r_{2m}),$$
$$\lambda^{p+q-1}x_i \quad (i=\varphi-r_{2m}+1, \ldots, \varphi)$$

в случае, если $2r_{2m}<\varphi+1$, и вершин

$$\lambda^{p-1}x'_i \quad (i=1, \ldots, r_{2m}-1), \quad \lambda^{p+q-1}x'_{r_{2m}}, \quad \lambda^{p+q-1}x_i \quad (i=r_{2m}+1, \ldots, \varphi)$$

в случае, если $2r_{2m}=\varphi+1$.

Значит, для того, чтобы $\lambda Q \subset Q$, необходимо и достаточно, чтобы многоугольник Q содержал точки

$$\lambda^{p}x_i' \quad (i=1, \ldots, r_{2m}), \quad \lambda^{p}x_i \quad (i=r_{2m}+1, \ldots, \varphi-r_{2m}),$$
$$\lambda^{p+q}x_i \quad (i=\varphi-r_{2m}+1, \ldots, \varphi)$$

в случае, если $2r_{2m}<\varphi+1$, и точки

$$\lambda^{p}x_i' \quad (i=1, \ldots, r_{2m}-1), \quad \lambda^{p+q}x'_{r_{2m}}, \quad \lambda^{p+q}x_i \quad (i=r_{2m}+1, \ldots, \varphi)$$

в случае, если $2r_{2m}=\varphi+1$.

Если точка x_1' взята достаточно близко к точке x_1, так, чтобы точка ξ_1 оказалась внутри многоугольника Q, то, очевидно, Q будет содержать все ξ_i $(i=1, \ldots, \varphi)$ и, в силу равенств (5), все вершины группы 1) будут при умножении на λ переходить на контур многоугольника Q.

Пусть $2r_{2m} < \varphi + 1$. В этом случае из (11) имеем

$$x_i \in \Delta_{i+r_{2m}} \quad (i=2, 3, \ldots, r_{2m}).$$

Если точка x_1' взята близко к точке x_1, то, очевидно,

$$x_i' \in \Delta_{i+r_{2m}} \quad (i=2, \ldots, r_{2m}).$$

Учитывая (10), получим

$$\lambda^p x_i' \in \delta_{i+r_{2m}}.$$

Нетрудно видеть, однако, что вершины x_i $(i=r_{2m}+1, \ldots, 2r_{2m})$, являющиеся концами $\delta_{i+r_{2m}}$ $(i=2, \ldots, r_{2m})$, суть вершины многоугольника Q, находящиеся в первой группе. Поэтому при $2r_{2m} < \varphi + 1$ точки $\lambda^p x_i'$ $(i=2, \ldots, r_{2m})$ находятся на контуре Q.

Пусть $2r_{2m} = \varphi + 1$. Так же как и в предыдущем случае, точки $\lambda^p x_i'$ $(i=2, \ldots, r_{2m}-1)$ находятся внутри интервалов $\delta_{i+r_{2m}}$ и, следовательно, на контуре Q.

Из равенств (11) следует, что

$$x_{r_{2m}} = x_{\varphi+1-r_{2m}} \in \Delta_1.$$

Если точка x_1' близка к точке x_1, то

$$x'_{r_{2m}} \in \Delta_1$$

и, в силу (10),

$$\lambda^{p+q} x'_{r_{2m}} \in \delta_1,$$

т. е. точка $\lambda^{p+q} x'_{r_{2m}}$ находится внутри стороны $[x_0, x_1]$. Если точка x' близка к точке x_1, то точка $\lambda^{p+q} x'_{r_{2m}}$ близка к точке $\lambda^{p+q} x_{r_{2m}} = \xi_1$ и, стало быть, находится на контуре Q.

Таким образом, и в случае $2r_{2m} < \varphi + 1$, и в случае $2r_{2m} = \varphi + 1$ для того чтобы $\lambda Q \subset Q$, необходимо и достаточно, чтобы точка x_1' была достаточно близка к точке x_1 и чтобы при этом многоугольник Q содержал точку $\lambda^p x_1'$.

Введем на прямых x_0, x_1 и $\xi_{r_{2m}}$, $\xi_{r_{2m}+1}$ координаты, отнеся точкам x_1 и $\xi_{r_{2m}+1}$ координату O, а точкам x_0 и $\xi_{r_{2m}}$ координату 1.

Пусть A — точка пересечения прямой $x'_{r_{2m}} x_{r_{2m}+1}$ с прямой $\xi_{r_{2m}} \xi_{r_{2m}+1}$, (см. рис. 3); пусть, далее, x — координата точки x_1' на прямой $x_0 x_1$ и $u(x)$ — координата точки A на прямой $\xi_{r_{2m}} \xi_{r_{2m}+1}$. Так как $\lambda^p x_0 = \xi_{r_{2m}}$ и $\lambda^p x_1 = \xi_{r_{2m}+1}$ (теорема III), то произвольная точка на прямой $x_0 x_1$ переходит при умножении на λ^p в точку на прямой $\xi_{r_{2m}} \xi_{r_{2m}+1}$ с той же координатой. Поэтому для того чтобы точка $\lambda^p x_1'$ была внутри многоугольника Q, необходимо и достаточно, чтобы $x > u(x)$.

Если к тому же x достаточно мало, т. е. точка x_1' близка к точке x_1, то $\lambda Q \subset Q$.

Так как точка A была получена из точки x_1' рядом проектирований, то, очевидно,

$$u(x) = \frac{\tilde{a}x + \tilde{b}}{\tilde{c}x + \tilde{d}};$$

если точка x_1' находится в точке x_1, то многоугольник Q совпадает с многоугольником Q_0, а точка A — с точкой $\xi_{r_{2m}+1}$, т. е. $u(0) = 0$ и, значит,

$$u(x) = \frac{\tilde{a}x}{\tilde{c}x + \tilde{d}}.$$

Очевидно, что $\tilde{d} \neq 0$; деля на $\tilde{d}$ числитель и знаменатель, имеем

$$u(x) = \frac{ax}{cx+1} = ax(1 - cx + \cdots).$$

Отсюда

$$x - u(x) = x(1-a) + cx^2 + \cdots.$$

Если $a \neq 1$, то существуют числа x, как угодно близкие к 0, такие, что $x - u > 0$. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $a = 1$ и $x - u = cx^2 + \cdots$.

Заметим, что $0 < u(1) < 1$, как это видно из чертежа (см. рис. 4). Исключение возможно лишь при $n = 3$ (см. рис. 5).* Отсюда вытекает, что $c > 0$ и, значит, при достаточно малом x $x - u = cx^2 + \cdots > 0$.

2) $2r_{2m} > \varphi + 1$. В этом случае вариируются вершины $x_{\varphi-1}, \ldots, x_{r_{2m}-1}$. Вариация аналогична вариации в случае 1; ее вид показан на рис. 6. Разбор этого случая аналогичен разбору случая 1.

ТЕОРЕМА VI. *Если для многоугольника Q_0 $\varphi > d$, то $d = 1$ и λ удовлетворяет соотношению*

$$\lambda^q(\lambda^p - \alpha)^r = \beta^r \quad \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0 \quad \alpha + \beta = 1, \tag{12}$$

где $r = r_{2m-1}$, $kp \equiv 1 \bmod n\ (0 \leqslant p < n)$, $kq \equiv -r \bmod n\ (0 \leqslant q < n)$, причем m определяется из условия $r_{2m} = d = 1$.

Доказательство. Для некоторого m (см. следствие 1 теоремы III) имеет место неравенство $0 < r_{2m} < \varphi \leqslant r_{2m-1}$. По теореме V, $r_{2m} = 1$ и, следовательно, $d = r_{2m} = 1$. В силу следствия 1 леммы 2, $n - r_{2m-1}$ является максимальным членом последовательности (A), поэтому мы можем в равенствах (2) положить $\nu = r_{2m-1}$, после чего получим

$$\begin{gathered}\lambda^p x_i = \xi_{i+1} = \alpha_{i+1}x_i + \beta_{i+1}x_{i+1} \\ \lambda^{p+q}x_r = \xi_1 = \alpha_1 x_0 + \beta_1 x_1, \\ (\alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad \alpha_i + \beta_i = 1,\ i = 0, 1, \ldots, r-1),\end{gathered} \tag{13}$$

где $kp \equiv 1 \bmod n\ (0 \leqslant p < n)$, $kq \equiv -r \bmod n\ (0 \leqslant q < n)$. Покажем, что в равенствах (13) $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = \alpha$. Рассмотрим многоугольник Q,

* В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда $n > 3$. Фигуры M_n при $n \leqslant 3$ найдены в работе ([1]).

полученный из многоугольника Q_0 следующим образом: вершины вида $\lambda^t x_i$ заменяются на вершины $\lambda^t [x_i + \varepsilon (x_i - x_{i-1})] (1 \leqslant i \leqslant r-1)$; остальные вершины остаются без изменения. Если $\alpha_{i+1} \neq \alpha_i$, то можно выбрать ε так, чтобы $\lambda Q \subset Q$ и одна из вершин λQ попадает внутрь Q. Доказательство этого аналогично доказательству теоремы IV в ([1]).

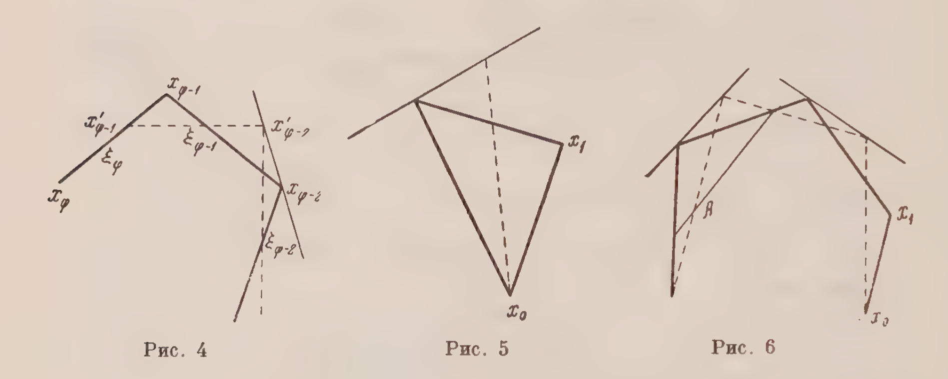


Рис. 4 Рис. 5 Рис. 6

Таким образом, имеем $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = \alpha$ и, стало быть, $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = \beta$. Поэтому равенство (13) переписывается в виде

$$\lambda^p x_i = \alpha x_i + \beta x_{i+1},$$
$$\lambda^{p+q} x_r = \alpha x_0 + \beta x_1,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, r-1; \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1).$$

Исключая из этих равенств $x_0, x_1, \ldots, x_r$, получим (12). Многоугольнику Q_0 отвечает некоторая стохастическая матрица n-го порядка [см. ([1])]. Уравнение (12) является характеристическим уравнением этой матрицы. Поэтому уравнение (12) должно быть n-й степени. Таким образом, мы получаем

$$q + pr = n. \tag{14}$$

ТЕОРЕМА VII. *Если для многоугольника Q_0 $\varphi = d$, то λ удовлетворяет соотношению*

$$(\lambda^l - \beta)^d = \lambda^q \alpha^d, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1, \tag{15}$$

где $l = \frac{n}{d}, \quad kq \equiv -d \bmod n, \quad 0 \leqslant q < \frac{n}{d}$.

Доказательство. Каждая вершина многоугольника Q_0 порождается одной из вершин $x_1, \ldots, x_d$. Так как умножение на λ соответствует увеличению номера вершины на k, то нетрудно видеть, что вершина, порождающая вершину x_0, есть x_d. Поэтому существует q такое, что $\lambda^q x_d = x_0$ и, значит, $kq + d \equiv 0 \bmod n$. При этом очевидно, что q — наименьшее положительное число, удовлетворяющее сравнению $kq \equiv -d \bmod n$. Поэтому $0 \leqslant q < \frac{n}{d}$.

Покажем, что в равенствах (6) § 3 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_d = \alpha$. Доказательство этого аналогично доказательству теоремы VI. Таким образом, имеем

$$\lambda^l x_i = \alpha x_{i-1} + \beta x_i \quad (i = 1, \ldots, d), \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1,$$
$$\lambda^q x_d = x_0;$$

исключая отсюда $x_0, x_1, \ldots, x_d$, получим (15).

§ 5

ТЕОРЕМА VIII. *Если для любого m $r_{2m} \neq 1$, то*

$$2\pi \frac{k-s}{n-q} < \arg \lambda < 2\pi \frac{k}{n}, \tag{16}$$

где s и q однозначно определяются из соотношения

$$sn - qk = d, \quad 0 \leqslant q < l = \frac{n}{d}, \qquad 0 \leqslant s < \frac{k}{d}.$$

Доказательство. Из теорем V и VII следует, что существует многоугольник Q_0 с вершинами $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, занумерованными по порядку против часовой стрелки, такой, что

$$x_{i-1} = \frac{\lambda^l - \beta}{\alpha} x_i \quad (i = 1, \ldots, d), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1,$$
$$\lambda^q x_d = x_0. \tag{17}$$

Пусть $\delta_i = (x_i, x_{i-1})$, $i = 1, \ldots, d$. Очевидно, что для любого t $\lambda^t x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $0 < i \leqslant d$, $0 < j \leqslant d$, поэтому для любого t

$$\lambda^t \delta_i \neq \delta_j \quad (i \neq j).$$

Из (17) следует:

$$\delta_i = \delta_d \left(\frac{\lambda^l - \beta}{\alpha} \right)^{d-i}. \tag{18}$$

Равенство (18) показывает, что углы, под которыми видны из начала интервалы δ_i, равны между собой. Из (8) видно, что точки

$$\lambda^t x_i \quad \begin{matrix} t = 0, 1, \ldots, l-1 \\ i = 1, \ldots, d \end{matrix}$$

суть вершины многоугольника Q_0. Значит интервалы

$$\lambda^t \delta_1 \quad (t = 0, 1, \ldots, l-q-1),$$
$$\lambda^t \delta_i \quad \begin{matrix} t = 0, 1, \ldots, l-1 \\ i = 2, \ldots, d \end{matrix}$$

являются сторонами многоугольника Q_0. Стало быть, если α — угол, под

которым виден из начала один из интервалов δ_i, то

$$(l-q)\,\alpha + l\,(d-1)\,\alpha < 2\pi,$$

откуда

$$\alpha < \frac{2\pi}{n-q}. \tag{19}$$

Из (17) следует, что $\lambda^l x_1 \in \delta_1$, поэтому, как это видно из рис. 7,

$$2\pi\left(1-\frac{1}{n-q}\right) < 2\pi - \alpha < \arg\lambda^l < 2\pi. \tag{20}$$

С другой стороны,

$$\frac{k}{n} - \frac{k-s}{n-q} = \frac{1}{l\,(n-q)} \quad \text{и} \quad \left(e^{2\pi i \frac{k}{n}}\right)^l = 1,$$

поэтому

$$\left(e^{2\pi i \frac{k-s}{n-q}}\right)^l = e^{2\pi i \frac{n-q-1}{n-q}}. \tag{21}$$

Из (20) и (21) без труда следует (16).

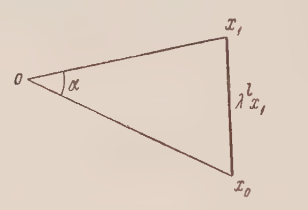


Рис. 7

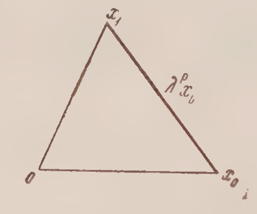


Рис. 8

ТЕОРЕМА IX. *Если для некоторого* m $r_{2m} = 1$, *то*

$$2\pi\frac{s}{p} < \arg\lambda < 2\pi\frac{k}{n}, \tag{22}$$

где s *и* p *однозначно определяются из соотношения*

$$kp - sn = 1, \qquad 0 \leqslant p < n, \qquad 0 \leqslant s < k.$$

Доказательство. Из теоремы V следует, что существует многоугольник Q_0 с вершинами $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, занумерованными по порядку против часовой стрелки, такой, что

$$\lambda^p x_0 = \alpha x_0 + \beta x_1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Это означает, что точка $\lambda^p x_0$ находится внутри стороны $[x_0, x_1]$. Отсюда следует (см. рис. 8), что

$$0 < \arg\lambda^p < \pi. \tag{23}$$

Но $\frac{k}{n} - \frac{s}{p} = \frac{1}{np}$ и $\left(e^{2\pi i \frac{s}{p}}\right)^p = 1$, поэтому

$$\left(e^{2\pi i \frac{k}{n}}\right)^p = e^{2\pi i \frac{n-p+1}{n}}.$$

Учитывая (14), имеем $\frac{n-p+1}{n} > \frac{1}{2}$, что вместе с (23) доказывает (22).

ТЕОРЕМА X. *Всякое $\lambda \in T_n$ принадлежит циклическому n-угольнику.*

Доказательство. В § 4 было показано, что λ удовлетворяет одному из соотношений (12) и (15). Пусть, например, λ удовлетворяет соотношению (12). Обозначим через δ наибольший общий делитель чисел q и r и пусть $q = q'\delta$, $r = r'\delta$. Положив в (12) $\mu^{r'} = \lambda$ и извлекая из обеих частей корень r-й степени, получим

$$\mu^{q'}(\mu^{pr'} - \alpha) = \beta\gamma; \qquad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \qquad \alpha + \beta = 1, \tag{24}$$

где $\gamma^{r} = 1$.

Покажем, что μ можно выбрать так, чтобы $\gamma^{\delta} = 1$.

В самом деле, положив в (24) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, имеем

$$\gamma = \mu^{q'+pr'}.$$

Из определения r' и q' и в силу (14),

$$q' + pr' = \frac{n}{\delta},$$

поэтому

$$\gamma = \mu^{\frac{n}{\delta}}.$$

С другой стороны, положив в (12) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, получим $\lambda^n = 1$ и, в силу (22), $\lambda = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$. Стало быть,

$$\mu = \lambda^{\frac{1}{r'}} = e^{2\pi i \frac{k+un}{r'n}}$$

и, следовательно,

$$\gamma = e^{2\pi i \frac{k+un}{r'\delta}}.$$

Нетрудно видеть, что r' и n — взаимно простые числа, поэтому существует u такое, что $k + un \equiv 0 \bmod r'$, а тогда $\gamma^{\delta} = 1$. Выбирая в (24) μ так, чтобы $\gamma^{\delta} = 1$, получим

$$\mu^{\frac{n}{\delta}} = \beta\gamma + \alpha\mu^{q'}, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \qquad \alpha + \beta = 1, \quad \gamma^{\delta} = 1. \tag{25}$$

Из (25) следует, что точка $\mu^{\frac{n}{\delta}} e^{2\pi i \frac{\nu}{\delta}}$ содержится в выпуклой оболочке точек

$$\mu^m e^{2\pi i \frac{\xi}{\delta}} \qquad \left(m = 0,\ 1, \ldots,\ \frac{n}{\delta} - 1; \quad \xi = 0,\ 1, \ldots,\ \delta - 1\right)$$

и, значит, μ, а следовательно, и $\lambda = \mu^{r'}$ принадлежат циклическому n-угольнику.

Теперь мы в состоянии доказать теорему А. Действительно, из теоремы X следует, что любое $\mu \in M_n$ принадлежит некоторому циклическому m-угольнику, причем $m \leqslant n$. С другой стороны, очевидно, что произведение двух точек циклического многоугольника есть снова точка этого многоугольника, что и доказывает теорему А.

Переходим к доказательству теоремы В. Формулировка теоремы В дана в § 1. Мы будем доказывать ее по индукции. Теорема В верна для $n=4$ [см. (1)]. Пусть теорема В верна для любой фигуры M_m, $4 \leqslant m < n$.

a) Введем некоторые определения и обозначения.

Мы будем понимать под углом $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ совокупность комплексных чисел λ таких, что $2\pi\varphi_1 < \arg\lambda < 2\pi\varphi_2$.

Под углом $\overline{\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle}$ мы будем понимать угол, комплексно-сопряженный углу $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$.

Из теорем VIII и IX следует

$$\left\langle \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right\rangle \cap T_n \subset \left\langle \frac{f(k, n)}{\varphi(k, n)}, \frac{k}{n} \right\rangle, \tag{26}$$

где $\varphi(k, n)$ и $f(k, n)$ определяются условиями

$$k\varphi(k, n) - nf(k, n) = d, \quad 0 < k - f(k, n) < \frac{k}{d},$$
$$0 < n - \varphi(k, n) < \frac{n}{d}, \quad 0 < k < n.$$

Дроби $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ $\left(\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}, \ 0 \leqslant a_i < b_i \leqslant n, \ i=1, 2\right)$ мы назовем соседними, если не существует дроби $\frac{a}{b}$ $(0 \leqslant a < b \leqslant n)$ такой, что $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a}{b} < \frac{a_2}{b_2}$. Если $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ — две дроби, соседние с дробью $\frac{k}{n}$, и если $\frac{a_1}{b_1} < \frac{k}{n} < \frac{a_2}{b_2}$, то из теории ряда Форрея следует

$$\left.\begin{aligned} & b_i k - a_i n = (-1)^{i+1} d, \\ & 2k - a_1 - a_2 = \frac{k}{d}, \quad 2n - b_1 - b_2 = \frac{n}{d}, \\ & 0 < k - a_i < \frac{k}{d}, \ 0 < n - b_i < \frac{n}{d}, \ i = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Из (27) заключаем, что $a_1 = f(k, n)$ и $b_1 = \varphi(k, n)$, и, значит, дроби $\frac{f(k, n)}{\varphi(k, n)}$ и $\frac{k}{n}$ — соседние.

b) Имеет место

$$\overline{\left\langle \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right\rangle} \cap T_n \subset \overline{\left\langle \frac{k-1}{n}, \frac{a}{b} \right\rangle},$$

где дроби $\frac{k-1}{n}$ и $\frac{a}{b}$ соседние, $0 < k < n$.

В самом деле, из a) следует, что

$$\overline{\left\langle \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right\rangle} \cap T_n = \left\langle \frac{n-k}{n}, \frac{n-k+1}{n} \right\rangle \cap T_n \subset \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{n-k+1}{n} \right\rangle,$$

где $a_1 = f(n-k+1, n)$, $b_1 = \varphi(n-k+1, n)$.

Поэтому

$$\left\langle \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right\rangle \cap T_n = \overline{\overline{\left\langle \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right\rangle} \cap T_n} \subset \overline{\left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{n-k+1}{n} \right\rangle} = \left\langle \frac{k-1}{n}, \frac{b_1 - a_1}{b_1} \right\rangle.$$

Так как дроби $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{n-k+1}{n}$ соседние, то, как легко видеть, дроби $\frac{k-1}{n}$ и $\frac{b_1-a_1}{b_1}$ также соседние.

c) Пусть Γ_n — граница фигуры M_n. Тогда

$$\left\langle \frac{f(k,n)}{\varphi(k,n)},\ \frac{k}{n} \right\rangle \cap \Gamma_n \subset T_n, \quad 0 < k < n.$$

Возможны два случая:

1) $d=1$. Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ — дроби, соседние с дробью $\frac{k}{n}$. Пусть для определенности $\frac{a_1}{b_1} < \frac{k}{n} < \frac{a_2}{b_2}$. В случае $d=1$ (27) перепишется в виде

$$\left.\begin{aligned} b_i k - a_i n &= (-1)^{i+1}, \\ a_1 + a_2 = k, &\quad b_1 + b_2 = n, \\ 0 < a_i < k, \quad 0 < b_i &< n, \quad i = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Пусть $n = q_1 b_1 + r_1 = q_2 b_2 + r_2$ $(0 < r_i < b_i,\ i = 1,\ 2)$. (Из (28) видно, что если $b_2 \neq 1$, то ни b_1, ни b_2 не могут быть делителями n. Случай, когда $b_2 = 1$, мы рассмотрим впоследствии особо.) Мы имеем

$$\left[\frac{n-1}{b_i}\right] = q_i, \quad i = 1, 2.$$

Предположим сначала, что $b_2 < \frac{1}{2} n$, а $b_1 = n - b_2 > \frac{1}{2} n$. Тогда $q_1 = 1$, а $q_2 > 1$, но $q_2 b_2 - b_1 = q_2 b_2 - n + b_2 = b_2 - r_2 > 0$ и, значит,

$$\left[\frac{n-1}{b_1}\right] b_1 = b_1 < \left[\frac{n-1}{b_2}\right] b_2 = q_2 b_2.$$

Применяя теорему B для фигуры M_{n-1}, получим, что $\mu \in \Gamma_{n-1} \cap \left\langle \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2} \right\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$(\mu^{b_2} - t)^{q_2} = (1-t)^{q_2} \mu^s, \tag{29}$$

где $0 < t < 1$, $a_2 s \equiv -1 \mod b_2$.

Вычисляя по теореме В часть границы фигуры $M_{b_2 q_2}$, расположенную в углу $\left\langle \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2} \right\rangle$, получим, что она также задается уравнением (29). Поэтому

$$\Gamma_{b_2 q_2} \cap \left\langle \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2} \right\rangle = \Gamma_{n-1} \cap \left\langle \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2} \right\rangle.$$

Разбирая аналогично случай $b_1 < \frac{1}{2} n$, а $b_2 = n - b_1 > \frac{1}{2} n$, получим, что всегда

$$\Gamma_{n-1} \cap \left\langle \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2} \right\rangle = \Gamma_m \cap \left\langle \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2} \right\rangle, \tag{30}$$

где $m = \left[\frac{n-1}{b}\right] b$, $b = \min(b_1,\ b_2)$.

Из (28) следует, что если $b_2 = 1$, то $k = n - 1$. Применяя теорему B к этому случаю, получим, что $\mu \in \Gamma_{n-1} \cap \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$(\mu - t)^{n-1} = (1 - t)^{n-1}, \quad 0 < t < 1. \tag{31}$$

2) $d > 1$. Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ — дробь, соседняя с дробью $\frac{k}{n}$ $\left(\frac{a_1}{b_1} < \frac{k}{n}\right)$. Из (27) имеем

$$2b_1 > 2n - \frac{2n}{d} = n + n - \frac{2n}{d},$$

а так как $d > 1$, то $n - \frac{2n}{d} \geqslant 0$ и, значит, $2b_1 > n$. Поэтому $\left[\frac{n-1}{b_1}\right] = 1$. Но, очевидно, $\left[\frac{n-1}{\frac{n}{d}}\right] = d - 1$; отсюда и из (27) следует

$$\left[\frac{n-1}{b_1}\right] b_1 = b_1 > \left[\frac{n-1}{\frac{n}{d}}\right] \frac{n}{d} = n - \frac{n}{d}. \tag{32}$$

Из (32), так же как и в случае (1), нетрудно убедиться, что

$$\Gamma_{n-1} \cap \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{k}{n} \right\rangle = \Gamma_{b_1} \cap \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{k}{n} \right\rangle. \tag{33}$$

Из (30), (31), (33) имеем

$$\Gamma_{n-1} \cap \left\langle \frac{f(k, n)}{\varphi(k, n)}, \frac{k}{n} \right\rangle = \Gamma_{\psi(k, n)} \cap \left\langle \frac{f(k, n)}{\varphi(k, n)}, \frac{k}{n} \right\rangle,$$

где

$$\psi(k, n) = \begin{cases} \left[\frac{n-1}{b}\right] b, \ b = \min(b_1, b_2), & \text{если } d = 1 \text{ и } k \neq n - 1, \\ n - 1, & \text{если } d = 1 \text{ и } k = n - 1, \\ b_1, & \text{если } d > 1, \end{cases}$$

b_1 и b_2 удовлетворяют условию (27).

Методами, аналогичными развитым в работе ([1]) (см. § 2), можно доказать, что если $\mu \in \left\langle \frac{f(k, n)}{\varphi(k, n)}, \frac{k}{n} \right\rangle \cap \Gamma_{\psi(k, n)}$, то существует выпуклый n-угольник Q такой, что

1) $\mu Q \subset Q$,

2) ни одна из вершин многоугольника μQ не находится на контуре Q.

Это показывает, что μ не является экстремальным числом для фигуры M_n. Поэтому, если $\lambda \in \Gamma_n \cap \left\langle \frac{f(k, n)}{\varphi(k, n)}, \frac{k}{n} \right\rangle$, то $\lambda \bar{\in} \Gamma_{n-1}$.

Но граница фигуры $M_n - M_{n-1}$ является теоретико-множественной суммой множеств T_n и $\bar{T}_n$, поэтому $\lambda \in T_n \cup \bar{T}_n$. Однако из b) следует, что λ не может принадлежать множеству $\bar{T}_n$, а значит, $\lambda \in T_n$, что и доказывает c).

d) Пункты a) и c) дают полное представление о виде множества T_n. *Множество T_n распадается на z кривых, расположенных в круге $|z| \leqslant 1$ и углах $\left\langle \frac{f(k, n)}{\varphi(k, n)}, \frac{k}{n} \right\rangle$, $k = 1, \ldots, n - 1$. Концы этих дуг, взятые против часовой стрелки, суть $e^{2\pi i \frac{f(k, n)}{\varphi(k, n)}}$ и $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$.*

e) Теперь мы можем приступить к непосредственному доказательству теоремы В. Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ — две соседние дроби $\left(\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}\right)$, и Г — граница фигуры M_n, расположенная в углу $\left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right\rangle$. Возможны два случая:

1) Ни b_1, ни b_2, не являются делителями n.

Из d) следует, что Г не пересекается ни с T_n, ни с $\overline{T}_n$. Поэтому $\Gamma \subset M_{n-1}$ и, значит, удовлетворяет теореме В как часть границы фигуры M_{n-1}. Покажем, что Г будет удовлетворять теореме В и как часть границы фигуры M_n. Для этого достаточно проверить, что $\left[\frac{n-1}{b_i}\right] = \left[\frac{n}{b_i}\right]$, $i = 1, 2$. Но в нашем случае эти равенства очевидны.

2) Хотя бы одно из чисел b_1, b_2 является делителем n.

Нетрудно видеть, что случай $n = q_2 b_2$ соответствует случаю a) теоремы В, а случай $n = q_1 b_1$ — случаю b). Мы ограничимся поэтому случаем $n = q_2 b_2$.

Из c) следует, что $\Gamma \subset T_n$, а значит, любое $\lambda \in \Gamma$ удовлетворяет одному из уравнений (12), (15). Нетрудно видеть, однако, что уравнение (12) соответствует уравнению I теоремы В, а уравнение (15) — уравнению II, и, значит, Г удовлетворяет теореме В*.

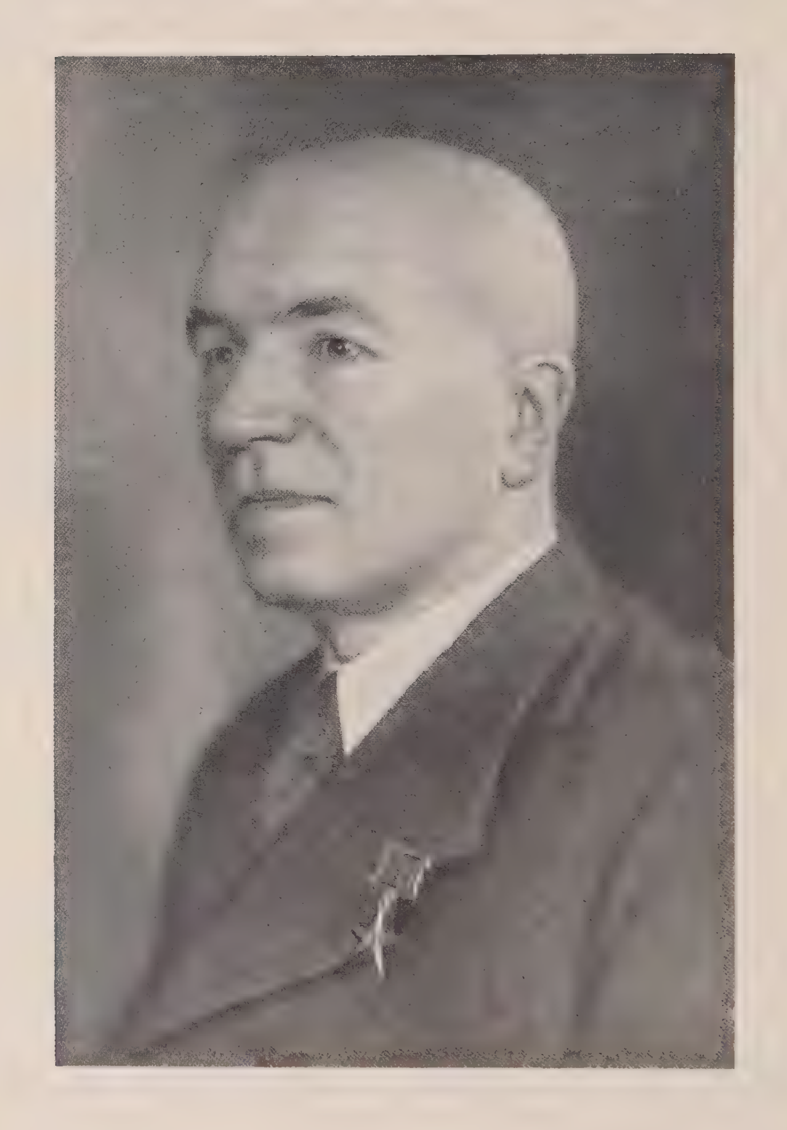
Поступило
19. V. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дмитриев Н. и Дынкин Е., Характеристические корни стохастических матриц, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 10 (1946), 167—184.

---

* Приношу благодарность Е. Б. Дынкину, который оказывал мне непрерывную помощь в моей работе.



П. Виноградовъ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 385—394

Б. Н. ДЕЛОНЕ

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ ИВАНА МАТВЕЕВИЧА ВИНОГРАДОВА

В сентябре этого года исполняется шестьдесят лет со дня рождения одного из крупнейших современных математиков, академика Ивана Матвеевича Виноградова.

Иван Матвеевич родился 14 сентября 1891 года в селе Милолюб Псковской губернии. В 1914 году окончил Петербургский университет и был оставлен для подготовки к профессорскому званию. С 1918 года состоял профессором Пермского государственного университета, а затем Петроградского политехнического института. В 1925 году был назначен профессором Ленинградского университета.

В 1929 году И. М. Виноградов был избран академиком.

С 1932 года состоит директором Математического института имени В. А. Стеклова Академии Наук СССР.

Русская наука, благодаря работам Эйлера и исследованиям Чебышева о простых числах, не раз за два последних столетия занимала первенствующее положение в теории чисел. Работы И. М. Виноградова снова выдвинули нашу науку в области теории чисел на первое место в отношении глубины и тонкости методов и важности результатов.

И. М. Виноградов ввел в область теории чисел новые методы, которые можно назвать элементарными в том смысле, что в них лишь минимально используются средства анализа. Центр тяжести опять переносится в теорию чисел, которая приобретает здесь гибкость и общность аналитических теорий, не утрачивая своей арифметической сущности. Уже первые работы И. М. Виноградова о наименьшем невычете и об асимптотическом подсчете целых точек в областях показали несравненную силу и остроту его математической мысли.

В тридцатых годах окончательно оформился новый общий метод И. М. Виноградова, занимающий основное положение в современной аналитической теории чисел. Этот метод состоит в сведéнии аддитивных задач, а также ряда других задач теории чисел к изучению конечных тригонометрических сумм (чаще всего кратных) и к отысканию фундаментальных свойств этих тригонометрических сумм.

Важное значение в теории чисел имеет задача о представлении натурального числа N в виде суммы слагаемых вида $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$ (например, в виде суммы кубов или суммы простых чисел и т. п.), где n_j — некоторые специальные заданные натуральные числа.

Вместо употреблявшихся со времен Эйлера степенных рядов И. М. Виноградов для решения подобных задач ввел в рассмотрение конечные тригонометрические суммы вида:

$$S(\alpha) = \sum e^{2\pi i \cdot n_j \alpha},$$

в которых достаточно распространить суммирование на все $n_j < N$. Дело в том, что число представлений числа N в виде суммы m слагаемых рассматриваемого вида, т. е. в форме

$$N = n_{j_1} + n_{j_2} + \cdots + n_{j_m},$$

как в этом можно убедиться, равно интегралу:

$$\int_0^1 (S(\alpha))^m \cdot e^{-2\pi i \cdot \alpha \cdot N}\, d\alpha. \qquad (1)$$

Этим способом аддитивная задача оказывается сведенной на изучение конечных тригонометрических сумм.

Несколько сложнее сводятся на изучение таких сумм задачи теории диофантовых приближений. Нагляднее всего это можно показать на примере асимптотической геометрии чисел. Пусть, например, надо найти асимптотическое выражение для числа целых точек внутри некоторой криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$, где f — непрерывная и гладкая, и где разность пределов $b - a$, а также и ординаты, большие. Очевидно, что

$$Q = \sum_{a<x<b} [f(x)] = \sum_{a<x<b} f(x) - \sum_{a<x<b} \{f(x)\},$$

где [ ] — значок целой части, а { } — значок «дробной» части.

Вычисление первой суммы относится к теории конечных разностей; вся арифметическая трудность задачи заключается во второй сумме.

Основная идея состоит в разложении $\{y\}$ в ряд Фурье:

$$\{y\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{2\pi i m y},$$

откуда получается

$$\sum_{a<x<b} \{f(x)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \cdot S_m,$$

где

$$S_m = \sum_{a<x<b} e^{2\pi i \cdot m \cdot f(x)},$$

и задача сведена к исследованию конечных тригонометрических сумм S_m.

После сведе́ния задачи к вопросу об оценке конечных тригонометрических сумм И. М. Виноградов опирается на некоторый общий фундаментальный принцип в оценке кратных тригонометрических сумм, который мы поясним на частном примере.

Пусть (u) — некоторая система натуральных чисел, число которых очень велико и равно U. Составим сумму:

$$S(\alpha) = \sum_{(u)} e^{2\pi i \cdot \alpha \cdot u}.$$

Мы сразу замечаем, что для всех $\alpha \in [0,1]$ будет $|S(\alpha)| \leqslant S(0) = U$ (это тривиальная оценка). Однако легко заметить, что для «большинства» значений α на сегменте [0,1] (в смысле меры Лебега) $|S(\alpha)|$ значительно

меньше U. В самом деле, как легко видеть, $\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha = U$, и, стало быть, «вообще говоря», порядок роста $|S(\alpha)|$ не выше $\sqrt{U}$. Пусть теперь мы имеем дело с двойной суммой $T(\alpha) = \sum_{u, v} e^{2\pi i \cdot \alpha \cdot u \cdot v}$, где u и v независимо друг от друга пробегают системы натуральных чисел в количествах U и V. Мы можем тогда написать: $T(\alpha) = \sum_v S(\alpha v)$, где попрежнему $S(\alpha) = \sum_u e^{2\pi i \alpha u}$. Мы видим, что если точки $\{\alpha v\}$ «достаточно разбросаны» по единичному сегменту [0,1], то есть основание думать, что большей частью они попадут в «большинство» описанных выше точек, для которых $|S(\alpha v)|$ будет малой, а именно порядка $\sqrt{U}$, и, значит, можно ожидать, что $T(\alpha)$ мало по сравнению с тривиальной оценкой $T(0) = U \cdot V$.

И. М. Виноградов показал, что это действительно так и будет.

Описанное замечательное соображение является одним из основных в методе И. М. Виноградова. Это свойство двойных и вообще кратных сумм оказалось ключом ко многим труднейшим вопросам теории чисел.

При помощи этих соображений И. М. Виноградов решил в 1937 году знаменитую проблему Гольдбаха, а именно он доказал следующую теорему:

Число $I(N)$ представлений нечетного числа N в виде $p_1 + p_2 + p_3 = N$ (p_i — простые) выражается формулой

$$I(N) = \frac{N^2}{2 \ln^3 N} \cdot S(N) (1 + o(1)),$$

где $S(N)$ — числовая функция $> 0{,}6$ для всех нечетных чисел N.

Полагая

$$S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \cdot \alpha \cdot p},$$

имеем, согласно формуле (1),

$$I(N) = \int_0^1 (S(\alpha))^3 e^{-2\pi i \cdot \alpha \cdot N} d\alpha.$$

Используя соображение, истоки которого исходят еще от Вороного, И. М. Виноградов разбивает числа $\alpha \in [0,1]$ на два класса $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{m}$, зависящие только от N. При этом класс $\mathfrak{M}$ содержит, грубо говоря, числа α, хорошо приближаемые дробями $\frac{a}{q}$, где знаменатели q малы по отношению к N, а класс $\mathfrak{m}$ — остальные числа. Мы имеем тогда:

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N),$$

где $I_1(N) = \int_{\mathfrak{M}}$ и $I_2(N) = \int_{\mathfrak{m}}$. На основании теории распределения простых чисел в прогрессиях, удается подсчитать интеграл

$$I_1(N) = \int_{\mathfrak{M}} (S(\alpha))^3 \cdot e^{-2\pi \cdot \alpha \cdot N} d\alpha.$$

Мы не будем пояснять, как это делается, ибо этот расчет стоит в стороне от существа метода И. М. Виноградова. Оказалось, что

$$I_1(N) = \frac{N^2}{2\ln^3 N} S(N)(1 + o(1)).$$

Основная трудность состоит в оценке второго интеграла:

$$I_2(N) = \int_{\mathfrak{m}} (S(\alpha))^3 \cdot e^{-2\pi i \cdot \alpha \cdot N} \, d\alpha.$$

Эта оценка сводится к оценке $S(\alpha)$ на $\alpha \in \mathfrak{m}$ следующим образом:

$$|I_2(N)| \leqslant \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2 \, d\alpha \leqslant \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \cdot \int_0^1 |S(\alpha)|^2 \, d\alpha =$$

$$= \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \cdot S(0),$$

где, в силу теоремы о числе простых чисел, не превосходящих данного предела, $S(0) \sim \frac{N}{\ln N}$. Отсюда ясно, что для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| = O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right). \qquad (2)$$

В этом все дело.

Покажем теперь, как оценка $S(\alpha)$ при $\alpha \in \mathfrak{m}$ была сведена И. М. Виноградовым к оценке двойной суммы типа $T(\alpha)$. Это поистине замечательное соображение состоит в следующем. И. М. Виноградов употребляет принцип, близкий к принципу решета Эратосфена, и весьма остроумно получает этим способом тождество:

$$S(\alpha) = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \cdot \alpha \cdot p} = \sum_{(d_0)} S_{d_0} - \sum_{(d_1)} S_{d_1} + O(\sqrt{N}),$$

где $S_d = \sum_{m \leqslant \frac{N}{d}} e^{2\pi i \cdot \alpha \cdot d \cdot m}$, d_0 пробегает все натуральные числа, свободные от квадратов с четным числом простых делителей, каждый из которых $\leqslant \sqrt{N}$, а d_1 — подобные же числа с нечетным числом простых делителей. Каждая сумма исследуется отдельно. Покажем, как это делается для $\sum_{(d_0)} S_{d_0}$.

Если d_0 не очень велико сравнительно с $\sqrt{N}$, то соответствующая S_{d_0} оценивается как геометрическая прогрессия, и все такие оценки собираются по всем таким d_0. Остальные суммы S_{d_0} с большими d_0 собираются в одну сумму $\sum_{(d_0,\, m)} e^{2\pi i \cdot \alpha \cdot d_0 \cdot m}$. При этом принимается в расчет, что d_0 состоит из двух больших множителей u и v, ибо не имеет простых делителей $> \sqrt{N}$. Поэтому оставшаяся сумма принимает вид кратной суммы $\sum_{u,\, v,\, m} e^{2\pi i \cdot \alpha \cdot u \cdot v \cdot m}$. Правда, ее множители u, v, m нельзя считать совсем независимыми (так как имеет место условие $u \cdot v \cdot m \leqslant N$), но все же они

«почти независимы», и эта сумма ведет себя так же, как кратные суммы $T(\alpha)$, и оценивается совершенно по тому же принципу. Получается оценка (2), что и завершает решение проблемы Гольдбаха.

Тот же метод применения оценки двойных сумм лежит в основе известного решения задачи Варинга, данного И. М. Виноградовым в 1934 г., где доказывается, что $G(n) = O(n \ln n)$, точнее, что $G(n) < n(3 \ln n + 11)$.

Здесь $G(n)$ — наименьшее из чисел G, для которых уравнение

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_G^n = N$$

разрешимо для всех «бóльших» N при натуральных x_i. Этот результат является пока наилучшим и заведомо почти не может быть дальше улучшен.

Изложенное решение проблемы Варинга не дает, однако, возможности получить асимптотическую формулу для числа решений уравнения (3).

Такую асимптотическую формулу И. М. Виноградов указал для значений $G = O(n^2 \ln n)$. Для решения этого вопроса И. М. Виноградов применил свойства кратных тригонометрических сумм, позволившие ему получить принципиально новые оценки сумм, простейшим примером которых является сумма $\sum\limits_{x^n \leqslant N} e^{2\pi i \cdot \alpha \cdot x^n}$. Для получения оценки И. М. Виноградов возводит сумму в некоторую степень и эту степень рядом замечательных приемов приводит к кратной сумме. Получаемые при этом результаты представляют собою чрезвычайно большой сдвиг в теории таких сумм и доводят их оценки почти до естественного предела.

Новый метод, созданный И. М. Виноградовым, оказал большое влияние на самые различные разделы теории чисел. Оказалось возможным получить ряд новых, более сильных, чем все прежние, теорем в теории диофантовых приближений, в теории распределения простых чисел, теории ζ-функции Римана и т. д. В последнее время метод И. М. Виноградова находит все большие применения не только в теории чисел, но и в других областях математики, например в теории вероятностей.

И. М. Виноградов создал в Советском Союзе большую школу математиков, творчески прилагающих его методы к разным вопросам. Методы И. М. Виноградова оказали большое влияние на развитие всей мировой аналитической теории чисел. Многие крупные математики в Советском Союзе и за его пределами являются последователями И. М. Виноградова.

Почти 20 лет И. М. Виноградов является руководителем Математического института Академии Наук — основного центра советской математики, — оказывая плодотворное влияние на развитие советской математики в целом.

Благодаря важности и глубине своих работ И. М. Виноградов признан учеными всего мира одним из первых математиков современности и избран в число членов почти всех основных академий мира.

За работы по теории чисел И. М. Виноградову в 1941 году была присуждена Сталинская премия 1-й степени. В 1944 году Иван Матвеевич был награжден орденом Ленина, а в 1945 году ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

И. М. Виноградов — один из тех немногих ученых в истории математики, которым удавалось, благодаря глубочайшему проникновению в существо вопросов, вскрыть новые трудно познаваемые закономерности.

СПИСОК ТРУДОВ И. М. ВИНОГРАДОВА

1917

1. Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций (*Известия Ак. Наук*, *6 серия*, т. 11, стр. 1347—1378).

1918

2. О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя (*Сообщения Харьк. матем. об-ва*, т. 16, стр. 10—38).
3. Об одном асимптотическом равенстве теории квадратичных форм (*Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском университете*, т. 1, стр. 18—28).
4. Sur la distribution des résidus et des non-résidus des puissances (*Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском университете*, т. 1, стр. 94—98).

1919

5. О распределении квадратичных вычетов и невычетов (*Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском университете* т. 2, стр. 1—16).

1921

6. Об асимптотических равенствах в теории чисел [*Известия Ак. Наук*, 6 *серия*, т. 15, стр. 158—160 (Приложение к протоколу XVI заседания Отд. физ.-матем. наук АН 23 ноября 1921 г.)].

1924

7. Об одной общей теореме Варинга (*Матем. сборник*, т. 31, стр. 490—507).

1925

8. Элементарное доказательство одной общей теоремы аналитической теории чисел (*Известия Ак. Наук СССР*, 6 *серия*, т. 19, стр. 785—796).
9. Элементарное доказательство одного общего предложения из аналитической теории чисел (*Известия Ленингр. политехн. ин-та*, т. 29, стр. 3—12).

1926

10. О границе наименьшего невычета n-й степени (*Известия Ак. Наук СССР*, 6 *серия*, т. 20, стр. 47—58).
11. О дробных частях целого многочлена (*Известия Ак. Наук СССР*, 6 *серия*, т. 20, стр. 585—600).
12. О распределении индексов (*Доклады Ак. Наук СССР* (А), № 4, стр. 73—76).
13. К вопросу о распределении дробных долей значений функций одного переменного (*Журн. Ленинградского физ.-матем. об-ва*, т. 1, стр. 56—65).
14. On a general theorem concerning the distribution of residues and non-residues of powers (*Bull. Amer. math. Soc.*, v. 32, p. 596).

1927

15. On the bound of the least non-residue of n-th powers (*Trans. Amer. math. Soc.*, v. 29, p. 218—226).
16. Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена (*Известия Ак. Наук СССР*, 6 *серия*, т. 21, 567—578).
17. О распределении дробных долей значений функций двух переменных (*Известия Ленинградского политехн. ин-та*, т. 30, стр. 31—52).
18. Démonstration élémentaire d'un théorème de Gauss (*Журн. Ленинградского физ.-матем. об-ва*, т. 1, стр. 187—193).
19. On a general theorem concerning the distribution of the residues and non-residues of powers (*Trans. Amer. math. Soc.*, v. 29, p. 209—217).

1928

20. О теореме Варинга (*Известия Ак. Наук СССР, серия физ.-матем.*, № 4—5, стр. 393—400).
21. О представлении числа целым многочленом от нескольких переменных (*Известия Ак. Наук СССР, серия физ.-матем.*, № 4—5, стр. 401—414).

1929

22. Об одном классе совокупных диофантовых уравнений (*Известия Ак. Наук СССР, серия физ.-матем.*, № 4, стр. 355—375).

1930

23. О наименьшем первообразном корне (*Доклады Ак. Наук СССР*, № 1, стр. 7—11).

1932

24. Элементы высшей математики. Вып. 1. Аналитическая геометрия (Л., КУБУЧ, 248 стр., литограф.).
25. О числе целых точек внутри круга (*Известия Ак. Наук СССР, серия физ.-матем.*, № 3, стр. 313—336).

1933

26. Элементы высшей математики. Вып. 2. Дифференциальное исчисление (Л., КУБУЧ, 176 стр., литограф.).
27. О проблемах аналитической теории чисел (*«Труды ноябрьской юбилейной сессии, посвященной пятнадцатилетней годовщине Великой Октябрьской соц. революции»*, Л., изд. АН СССР, стр. 27—37).
28. Об одной тригонометрической сумме и ее приложениях в теории чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, № 5, стр. 195—404).
29. О некоторых тригонометрических суммах и их приложениях (*Доклады Ак. Наук СССР*, № 6, стр. 249—255).
30. Применение конечных тригонометрических сумм к вопросу о распределении дробных долей целого многочлена (*Труды физ.-матем. института им. В. А. Стеклова*, т. 4, стр. 5—8).

1934

31. О верхней границе $g(n)$ в проблеме Варинга (*Известия Ак. Наук СССР, серия физ.-матем.*, № 10, стр. 1455—1469).
32. Новые приложения тригонометрических сумм (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 1, стр. 10—14).
33. Новые асимптотические выражения (*Доклады Ак. Наук СССР*. т. 1 стр. 49—51).
34. Тригонометрические суммы, зависящие от составного модуля (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 1, стр 225—229).
35. Новые теоремы о распределении квадратичных вычетов (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 1, стр. 289—290).
36. Новые теоремы о распределении первообразных корней (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 1, стр. 366—369).
37. Новое решение проблемы Варинга (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 2, стр. 337—341).
38. О некоторых новых проблемах теории чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 3, стр. 1—6).
39. Некоторые теоремы аналитической теории чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 4, стр. 185—187).
40. Новая оценка $g(n)$ в проблеме Варинга (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 5, стр.249—253).
41. Некоторые теоремы о распределении индексов и первообразных корней (*Труды физ.-матем. института им. В. А. Стеклова*, т. 5, стр. 87—93).

1935

42. О приближениях посредством рациональных дробей, имеющих знаменателем точную степень (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 2, стр. 1—5).
43. О некоторых рациональных приближениях (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 3, стр. 3—6).
44. О дробных частях многочленов и других функций (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 3, стр. 99—100).
45. Новые оценки суммы Вейля (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 3, стр. 195—198).
46. Приближение к нулю посредством чисел некоторой общей формы (*Матем. сборник*, т. 42, стр. 149—156).
47. О суммах Вейля (*Матем. сборник*, т. 42, стр. 521—530).
48. Асимптотическая формула для числа представлений в теореме Варинга (*Матем. сборник*, т. 42, стр. 531—534).
49. Sur les sommes de M. H. Weyl (*Comptes rendus*, t. 201, p. 514—516).
50. Новый вариант вывода теоремы Варинга (*Труды Матем. института им. В. А. Стеклова*, т. 9, стр. 5—15).
51. Число целых точек в шаре (*Труды Матем. института им. В. А. Стеклова*, т. 9, стр. 17—38).
52. Une nouvelle variante de la démonstration du théorème de Waring (*Comptes rendus*, t. 200, p. 182—184).
53. On Waring's problem (*Ann. of Math.*, v. 36, p. 395—405).

1936

54. Основы теории чисел (М.—Л., ОНТИ, ГТТИ, 96 стр.).
55. Новое улучшение оценок тригонометрических сумм (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 1, стр. 195—196).
56. Новые результаты в вопросе о распределении дробных частей многочлена (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 2, стр. 355—357).
57. О числе дробных частей многочлена, лежащих в данном интервале (*Матем. сборник*, т. 1 (43), стр. 3—8).
58. Новый метод решения некоторых общих вопросов теории чисел (*Матем. сборник*, т. 1 (43), стр. 9—20).
59. Приближения посредством дробных частей многочлена (*Матем. сборник*, т. 1(43), стр. 21—27).
60. Об асимптотической формуле в проблеме Варинга (*Матем. сборник*, т. 1(43), стр. 169—174).
61. Новый метод оценки тригонометрических сумм (*Матем. сборник*, т. 1(43), стр. 175—188).
62. Дополнение к работе «О числе дробных частей многочлена, лежащих в данном интервале» (*Матем. сборник*, т. 1 (43), стр. 405—408).
63. Sur les nouveaux résultats de la théorie analytique des nombres (*Comptes rendus*, t. 202, p. 179—180).
64. Sur quelques inégalités nouvelles de la théorie des nombres (*Comptes rendus*, t. 202, p. 1361—1362).
65. Approximation with help of certain functions (*Ann. of Math.*, v. 37, p. 101—106).
66. On fractional parts of certain functions (*Ann of math.*, v. 37, p. 448—455).

1937

67. Новый метод в аналитической теории чисел (*Труды Матем. института им. В. А. Стеклова*, т. 10, стр. 1—122).
68. Распределение дробных частей значений многочлена при условии, что аргумент пробегает простые числа арифметической прогрессии (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 1, стр. 505—514).
69. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 15, стр. 291—294).

70. Некоторые новые проблемы теории простых чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 16, стр. 139—142).
71. Новые оценки тригонометрических сумм, содержащих простые числа (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 17, стр. 165—166).
72. Новая оценка одной суммы, содержащей простые числа (*Матем. сборник*, т. 2(44), стр. 783—792).
73. Некоторые теоремы, относящиеся к теории простых чисел (*Матем. сборник*, т. 2(44), стр. 179—196).

1938

74. Основы теории чисел. Изд. 2, перераб. (М. — Л., ОНТИ, 88 стр.).
75. Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел (*Труды Тбилисск. матем. института*, т. 3, стр. 1—33).
76. Einige allgemeine Primzahlsätze (*Труды Тбилисск. матем. института*, т. 3, стр. 35—67).
77. Новая оценка одной тригонометричесиой суммы, содержащей простые числа (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 2, стр. 3—14).
78. Улучшение оценки одной тригонометрической суммы, содержащей простые числа (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 2, стр. 15—24).
79. Оценка некоторых сумм, содержащих простые числа (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 2, стр. 399—416).
80. Оценки тригонометрических сумм (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 2, стр. 505—524).
81. Некоторые новые оценки, относящиеся к аналитической теории чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 19, стр. 339—340).
82. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю (*Матем. сборник*, т. 3(45), стр. 311—320).
83. Некоторые общие леммы и их применение к оценке тригонометрических сумм (*Матем. сборник*, т. 3(45), стр. 435—472).
84. Две теоремы из аналитической теории чисел (*Труды Тбилисск. матем. института*, т. 5, стр. 153—180).
85. Сергей Львович Соболев (*Вестник Академии Наук СССР*, № 11—12, стр. 35—37).

1939

86. Элементарные оценки одной тригонометрической суммы с простыми числами (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 3, стр. 371—398).
87. Первое совещание по просмотру научно-исследовательской работы кафедры математики и теоретической механики высших учебных заведений [*Известия Ак. Наук СССР*, ОТН, № 1, стр. 128—130 (Совместно с С. Л. Соболевым и В. К. Туркиным)].
88. Новое усовершенствование метода оценки тригонометрических сумм с простыми числами (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 22, стр. 59—60).
89. Простейшие тригонометрические суммы с простыми числами (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 23, стр. 615—617).

1940

90. Основы теории чисел. Изд. 3, перераб. (М — Л., ГТТИ, 112 стр.).
91. Распределение по данному модулю простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 4, стр. 27—36).
92. Некоторые общие свойства распределения простых чисел (*Матем. сборник*, т. 7(49), стр. 365—372).

1941

93. Две теоремы, относящиеся к теории распределения простых чисел (*Доклады Ак. Нсук СССР*, т. 30, стр. 285—286).
94. Некоторое общее свойство распределения произведений простых чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 30, стр. 675—676).

1942

95. Улучшение оценок тригонометрических сумм (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 6, стр. 33—40).
96. Об оценках тригонометрических сумм (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 34, стр. 199—200).
97. Уточнение некоторых теорем теории простых чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 37, стр. 135—137).
98. Русская математика (*Славяне*, № 5- 6, стр. 74—75).

1943

99. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 7, стр. 17—34).

1944

100. Основы теории чисел. Изд. 4, перераб. и доп. (М.— Л., Гостехиздат, 142 стр.).
101. Общие теоремы об оценках тригонометрических сумм (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 43, стр. 51—52).

1945

102. Работы П. Л. Чебышева по теории чисел [*Научное наследие П. Л. Чебышева.* Вып. 1. Математика., М. — Л., изд. АН СССР, стр. 69—87 (Совместно с Б. Н. Делоне)].
103. Аналитическая теория чисел (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 9, стр. 159—168. То же в «*Сборнике, посвященном Юбилейной сессии Академии Наук СССР*, т. 2, М. — Л., стр. 34—40).

1946

104. Некоторый общий закон распределения дробных частей значений многочлена, когда аргумент пробегает простые числа (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 51 стр. 489—490).

1947

105. Некоторый общий закон теории простых чисел (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 55, стр. 475—476).
106. Метод тригонометрических сумм в теории чисел (*Труды Матем. института им. В. А. Стеклова*, т. 2?, стр. 1—141).

1948

107. Об оценке тригонометрических сумм с простыми числами (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 12, стр. 225—248).
108. О распределении произведений простых чисел и значений функции Мебиуса (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 12, стр. 341—350).
109. Аддитивные проблемы теории простых чисел (В кн. «*Юбилейный сборник, посвященный 30-летию Великой Октябрьской соц. революции*», М. — Л., изд. АН СССР, т. 1, стр. 65—79).

1949

110. Советская математика [*Сборник «Иосифу Виссарионовичу Сталину — Академия Наук СССР»*, изд. АН СССР, М., стр. 356—367 (Совместно с Н. И. Мусхелишвили)].
111. Улучшение остаточного члена одной асимптотической формулы (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 13, стр. 97—110).

1950

112. Софья Ковалевская. К 100-летию со дня рождения («*Октябрь*», № 1, стр. 129—137).
113. Новое усовершенствование метода оценки двойных сумм (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 73, стр. 635—638).
114. Верхняя граница модуля тригонометрической суммы (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 14, стр. 199—214).

1951

115. Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 15, стр. 109—130).
116. Арифметический метод в применении к вопросам распределения чисел с заданным свойством индекса (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 15, стр. 297—308).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 395–400

С. Н. МЕРГЕЛЯН

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЕ, СВЯЗАННОМ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

В настоящей заметке рассматривается вопрос об интегрируемости по площади круга модуля производной функции, аналитической и ограниченной в круге.

1. ТЕОРЕМА. *Существует аналитическая в круге* $|z|<1$ *функция* $f(z)$, *ограниченная единицей, для которой*

$$\iint_{|z|<1} |f'(z)|\, dS = \infty.$$

Замечание 1. Существование ограниченной функции с расходящимся интегралом от модуля производной свидетельствует о наличии римановых поверхностей, весьма сильно «разветвленных» вблизи окружности $|z|=1$, чему, собственно, и обязана расходимость интеграла

$$\iint_{|z|<1} |f'(z)|\, dS. \tag{1}$$

Замечание 2. Если $\pi_n(z)$ означает полином, сообщающий максимальное значение интегралу (1) в классе всевозможных полиномов степени $\leqslant n$, ограниченных в круге $|z|\leqslant 1$ единицей, и

$$M_n = \iint_{|z|<1} |\pi_n'(z)|\, dS,$$

то $M_n \to \infty$ при $n \to \infty$, так что экстремальный полином отличен от $e^{i\theta} z^n$.

В самом деле, если для всех n $M_n < M < \infty$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ есть ряд Маклорена произвольной аналитической функции $f(z)$, ограниченной единицей в круге $|z|<1$, то для любого $\rho<1$ и $\varepsilon>0$ при достаточно большом $N=N(\rho, \varepsilon)$ будем иметь:

$$\max_{|z|\leqslant\rho} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \right| < \varepsilon,$$

$$\max_{|z|\leqslant\rho} \left| f'(z) - \sum_{k=0}^{N} k a_k z^{k-1} \right| < \varepsilon,$$

откуда получаем

$$\iint\limits_{|z|<\rho} |f'(z)|\, dS \leqslant \iint\limits_{|z|<\rho} \left| \sum_{k=0}^{N} k a_k z^{k-1} \right| dS + \pi\rho^2 \varepsilon < M(1+\varepsilon) + \pi\varepsilon,$$

что противоречит, в силу произвольности $\rho < 1$, утверждению теоремы.

Доказательство теоремы. Введем вспомогательную функцию $\varphi(z)$ следующим образом.

Если $z = re^{i\theta}$, $r < 1$, то целое число $k = k(r)$ найдем из неравенства

$$e^{-\frac{1}{3^{2k-2}}} < r \leqslant e^{-\frac{1}{3^{2k}}} = \lambda_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

и положим

$$\varphi(z) = \cos(3^{2k-1} - 1)\,\theta, \quad e^{-1} < r < 1,$$
$$\varphi(z) = 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant e^{-1}.$$

Функция $\varphi(z)$ определена в круге $|z| < 1$ и ограничена единицей. Обозначим

$$K(r, \alpha) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n r^n \cos n\alpha.$$

Имеем

$$\int\limits_0^{\lambda_N}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) \frac{\partial K(r, \theta - \alpha)}{\partial\theta}\, dS =$$

$$= -2\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n r^n \int\limits_0^{2\pi} \sin n(\theta - \alpha)\cos(3^{2k-1} - 1)\,\theta d\theta \right\} r\, dr =$$

$$= -2\pi \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} (3^{2k-1} - 1)\, r^{3^{2k-1}} \sin(3^{2k-1} - 1)\,\alpha\, dr =$$

$$= -2\pi\left(e^{-\frac{1}{3}} - e^{-3}\right) \sum_{k=1}^{N} \sin(3^{2k-1} - 1)\,\alpha + O(1). \tag{2}$$

В силу теоремы Банаха о лакунарных коэффициентах ([1]), если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 < \infty$ и целые числа $n_1, n_2, \ldots$ таковы, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1, \quad k > k_0,$$

то найдется непрерывная периодическая функция $\psi(\theta)$ с периодом 2π, для которой

$$\int\limits_0^{2\pi} \psi(\theta)\cos n_k\theta\, d\theta = \alpha_k, \quad \int\limits_0^{2\pi} \psi(\theta)\sin n_k\theta\, d\theta = \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

На основании этой теоремы, найдем непрерывную функцию $\psi(\theta)$, соответствующую значениям $n_k = 3^{2k-1} - 1$, $\alpha_k = 0$, $\beta_k = \frac{1}{k}$.

Имеем, согласно (2),

$$\left| \int_0^{\lambda_N} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha)\, \varphi(re^{i\theta}) \frac{\partial K(r, \theta - \alpha)}{\partial \theta} r\, dr\, d\alpha\, d\theta \right| = 2\pi \left(e^{-\frac{1}{3}} - e^{-3} \right) \ln N + O(1).$$

Через $u(z)$ обозначим функцию, гармоническую в $|z| < 1$ и непрерывную в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, принимающую в точке $e^{i\alpha}$ единичной окружности непрерывные значения $\psi(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Представляя гармоническую функцию $u(z)$ интегралом Пуассона по граничным значениям $\psi(\alpha)$ и дифференцируя по α под знаком интеграла, получаем

$$\left| \int_0^{\lambda_N} \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) \frac{\partial u}{\partial \theta} dS \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{\lambda_N} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha)\, \varphi(re^{i\theta}) \frac{\partial K}{\partial \theta} r\, dr\, d\alpha\, d\theta \right| > \frac{1}{2} \ln N,$$

$$\frac{1}{2} \ln N < \left| \int_0^{\lambda_N} \int_0^{2\pi} \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} dS \right| \leqslant \int_0^{\lambda_N} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right| dS,$$

т. е.

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right| r\, dr\, d\theta = \infty.$$

Если $v(z)$ означает гармоническую в $|z| < 1$ функцию, сопряженную к $u(z)$ $(v(0) = 0)$, то функция

$$f(z) = e^{u(z) + iv(z)}$$

обладает нужным свойством, так как, с одной стороны, в единичном круге $|f(z)| < e$, а с другой стороны,

$$\iint_{|z|<1} |f'(z)|\, dS = \iint_{|z|<1} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right| e^{u(z)} dS \geqslant e^{-1} \iint_{|z|<1} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right| dS = \infty.$$

Наличие функции $f(z)$ и доказывает теорему.

2. Заметим, что доказанное предложение эквивалентно следующему факту.

Существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$, для которой

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right| < 1, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

однако поверхность $z = f(x, y)$ $(x^2 + y^2 < 1)$, будучи расположенной в некотором шаре конечного радиуса, имеет бесконечную площадь.

3. Простые подсчеты показывают, что сходимость интеграла

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\alpha)\,\varphi(re^{i\theta})\,\frac{\partial K}{\partial\theta}\,r\,dr\,d\alpha\,d\theta$$

имеет место в том и только том случае, когда сходится интеграл

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\alpha)\,\varphi(re^{i\theta})\,\frac{(1-r)(\alpha-\theta)}{[(1-r)^2+(\alpha-\theta)^2]^2}\,dr\,d\alpha\,d\theta. \tag{3}$$

В связи с этим рассмотрим в сущности совершенно не отличающийся от (3) интеграл

$$I(\varphi,\psi)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varphi(x, y)\,\psi(z)\,\frac{x(y-z)}{[x^2+(y-z)^2]^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где φ и ψ — измеримые ограниченные функции.

Из приведенного выше доказательства можно заключить, что существуют ограниченные, измеримые функции φ, ψ, для которых $I(\varphi,\psi)=\infty$. Введем обозначения:

$$\varphi_1(x, y)=\operatorname{sign}\int_0^1 \psi(z)\,\frac{x(y-z)}{[x^2+(y-z)^2]^2}\,dz,$$

$$\psi_1(z)=\operatorname{sign}\int_0^1\int_0^1 \varphi_1(x, y)\,\frac{x(y-z)}{[x^2+(y-z)^2]^2}\,dx\,dy.$$

Имеем, очевидно, при условии $|\varphi|\leqslant 1$, $|\psi|\leqslant 1$

$$I(\varphi,\psi)\leqslant I(\varphi_1,\psi)\leqslant I(\varphi_1,\psi_1),$$

так что $I(\varphi_1,\psi_1)=\infty$.

Функция $\psi_1(z)$ определяет линейное измеримое множество M_1 тех точек, где $\psi_1=1$, функция $\varphi_1(x, y)$ — плоское измеримое множество M_2, на котором $\varphi_1=1$.

Таким образом, доказанная теорема эквивалентна тому, что в трехмерном пространстве существует множество M, являющееся топологическим произведением измеримого линейного и измеримого плоского множеств: $M=M_1\times M_2$, на котором интеграл

$$\iiint_M \frac{x(y-z)}{[x^2+(y-z)^2]^2}\,dx\,dy\,dz \tag{4}$$

(в смысле главного значения) расходится.

Легко видеть, что сходимость интеграла (4), если она имеет место, обусловлена интерференцией положительных и отрицательных значений подинтегрального выражения, что, в свою очередь, связано с наличием определенной локальной симметрии плоского множества M_2 и линейного множества M_1.

Обратимся в связи с этим к классическому результату [2] Н. Н. Лузина, относящемуся к сходимости почти всюду и интегрируемости с квадратом выражения

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\, dh \tag{5}$$

для всякой функции из L_2.

В случае, когда $f(x)$ — характеристическая функция измеримого множества, интегрируемость (5), как замечает Н. Н. Лузин, является количественным выражением того обстоятельства, что почти всякая точка измеримого линейного множества является точкой локальной, приближенной симметрии.

Наряду с тем, что почти всякая точка измеримого линейного множества E есть точка плотности E, это свойство является основным и, пожалуй, единственным глубоким фактом, который установлен в отношении всех без исключения измеримых множеств, причем далеко не все следствия из него в применении, например, к рядам Фурье уже выявлены.

В связи с этим возникает естественный вопрос об исследовании плоских и вообще многомерных измеримых множеств в отношении локальной, приближенной симметрии их расположения около своих точек.

При этом необходимо отыскать такую функцию — ядро, которая позволила бы дать количественное выражение свойства локальной симметрии через сходимость соответствующего интеграла; именно такое количественное выражение и может позволить извлечь следствия из свойства симметрии, если оно наблюдается у плоских множеств.

В этом отношении естественно проверить, может ли функция

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x(y-z)}{[x^2+(y-z)^2]^2}$$

служить ядром для интегрального выражения свойства симметрии.

Предшествующие рассуждения показывают, что для подобной цели функция $\Phi(x, y, z)$ не подходит.

Не останавливаясь в этой заметке на исследовании свойства приближенной симметрии множеств в пространстве многих переменных, заметим, что можно указать целый ряд функций $\Phi(x, y-z)$, ограниченных при $|y-z|>\varepsilon>0$, не интегрируемых абсолютно в кубе $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, $|z|\leqslant 1$ и таких, что главное значение интеграла

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varphi(x, y)\,\psi(z)\,\Phi(x, y-z)\,dx\,dy\,dz$$

существует для любых ограниченных измеримых функций φ, ψ.

4. Пусть $P(z)$ — полином степени n, l_r — лемниската, $|P(z)|=r$, $\lambda(r)$ — длина l_r.

К числу результатов количественного характера, выявляющих свойства лемнискат, относится следующий.

Существуют полиномы, для которых, несмотря на то что семейство лемнискат $\{l_r\}$, $0 < r \leqslant 1$, расположено в единичном круге, длины $\lambda(r)$ могут расти так, что интеграл

$$\int_0^1 \lambda(r)\, dr$$

будет превосходить любое наперед заданное число. Это непосредственно следует из замечания 2 к доказанной теореме.

Сектор математики и механики
Ак. Наук Армянской ССР

Поступило
30. 1. 1951

ЛИТЕРАТУРА

1 Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939.
2 Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, Москва, 1915.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 401–420

В. С. ВИДЕНСКИЙ

ОБ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНА *

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Рассматриваются многочлены $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющие на отрезке $[-1, +1]$ неравенству $|P_n(x)| \leqslant \sqrt{H(x)}$, где $H(x)$ — положительный на $[-1, +1]$ многочлен. В статье даются достижимые оценки производных $P_n^{(k)}(x)$.

Этот же вопрос решается на полуоси $[0, \infty]$.

§ 1. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, который удовлетворяет неравенству

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{H(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

где $H(x)$ — положительный на $[-1, +1]$ многочлен степени m. Если $n \geqslant \frac{m}{2}$, то многочлен $H(x)$ может быть представлен в следующем виде:

$$H(x) = M_n^2(x) + (1 - x^2) N_{n-1}^2(x),$$

где $M_n(x)$ и $N_{n-1}(x)$ — многочлены степени n и $n-1$, все нули которых лежат на $[-1, +1]$ и взаимно разделены.

С. Н. Бернштейн [1] показал, что

$$|P_n'(x)| \leqslant \left| \{M_n(x) + i\sqrt{1-x^2}\, N_{n-1}(x)\}' \right|, \quad -1 < x < 1, \tag{2}$$

причем равенство достигается только для многочлена $P_n(x) = \gamma M_n(x)$, где $|\gamma| = 1$. Этот результат является обобщением известной теоремы С. Н. Бернштейна [2], [3]:

Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству

$$|P_n(x)| \leqslant 1 = \sqrt{T_n^2(x) + S_n^2(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

где

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad S_n(x) = \sin n \arccos x = \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}\, T_n'(x),$$

то

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} = |\{T_n(x) + iS_n(x)\}'|, \quad -1 < x < 1. \tag{4}$$

---

* Выражаю глубокую благодарность С. Н. Бернштейну за внимательное отношение к моей работе.

А. Шеффер и Р. Даффин ([4]) распространили неравенство (4) на случай производных любого порядка, а именно, они показали, что

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant |\{T_n(x) + iS_n(x)\}^k|, \quad -1 < x < 1 \quad (k = 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Неравенство (5) является элементарным следствием того, что функция

$$\Phi^{(k)}(x) = \cos\alpha T_n^{(k)}(x) + \sin\alpha S_n^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

не имеет двойных нулей* на $[-1, +1]$ при любом действительном α, если $P_n(x)$ удовлетворяет (3). Этот последний факт, благодаря тому что при $k = 1$ неравенство (5) уже установлено, в свою очередь легко вытекает из того, что $T_n(x)$ и $S_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \tag{6}$$

откуда следует, что нули функций $T_n^{(k)}(x)$ и $S_n^{(k)}(x)$ взаимно разделены.

Мы покажем [см. также ([5])], что и в общем случае, когда многочлен $P_n(x)$ удовлетворяет (1), функция

$$F^{(k)}(x) = \cos\alpha M_n^{(k)}(x) + \sin\alpha\{\sqrt{1 - x^2}\, N_{n-1}(x)\}^{(k)} - P_n^{(k)}(x)$$

не имеет двойных нулей на $[-1, +1]$ и, следовательно, имеют место неравенства:

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant |\{M_n(x) + i\sqrt{1 - x^2} N_{n-1}(x)\}^{(k)}|, \quad -1 < x < 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Но так как, вообще говоря, функции $M_n(x)$ и $\sqrt{1 - x^2}\, N_{n-1}(x)$ не являются решениями одного и того же дифференциального уравнения типа (6), то для установления интересующих нас фактов относительно взаимного расположения нулей $M_n^{(k)}(x)$ и $\{\sqrt{1 - x^2} N_{n-1}(x)\}^{(k)}$ здесь избран совершенно иной путь, в основе которого лежит весьма общая теорема 3, обобщающая теорему В. А. Маркова ([6]) о многочленах, нули которых взаимно разделены. Развитый таким образом метод позволил, исходя из другого представления положительного на данном отрезке многочлена (см. § 2), получить новые неравенства ([7]), аналогичные неравенствам (7), а также соответствующую теорему для случая полуоси $[0, \infty]$.

§ 2. ТЕОРЕМА 1. *Всякий положительный на отрезке* $[-1, +1]$ *многочлен* $H(x)$ *степени* m *может быть однозначно представлен в каждой из двух следующих форм:*

$$H(x) = M_s^2(x) + (1 - x^2) N_{s-1}^2(x) \tag{8}$$

при любом заданном целом $s \geqslant \frac{m}{2}$ *и*

$$H(x) = (1 + x) K_s^2(x) + (1 - x) L_s^2(x) \tag{9}$$

---

* В этом рассуждении многочлен $P_n(x)$ предполагается действительным; распространение результатов на случай, когда многочлен $P_n(x)$ имеет комплексные коэффициенты, не составляет труда (см. § 4).

при любом заданном целом $s \geqslant \frac{m-1}{2}$, *где* $M_s(x)$ *и* $N_{s-1}(x)$ — *действительные многочлены степени* s *и* $s-1$, *все нули которых лежат на* $[-1, +1]$ *и взаимно разделены,* $M_s(1) > 0$, $N_{s-1}(1) > 0$; $K_s(x)$ *и* $L_s(x)$ — *действительные многочлены степени* s, *причем все нули функций* $\sqrt{1+x}\,K_s(x)$ *и* $\sqrt{1-x}\,L_s(x)$ *лежат на* $[-1, +1]$ *и взаимно разделены,* $K_s(1) > 0$, $L_s(1) > 0$.

Пусть дано целое $s \geqslant \frac{m}{2}$. Рассмотрим такую задачу: *среди функций*

$$\Phi(x) = \frac{x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_0}{\sqrt{H(x)}}$$

найти функцию, наименее уклоняющуюся от нуля на отрезке $[-1, +1]$.

Вследствие основной теоремы Чебышева, функция $\Phi_0(x)$, наименее уклоняющаяся от нуля, должна иметь $s+1$ точек, в которых достигается максимальное отклонение с последовательно противоположными знаками. Обозначим эти точки через

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{s-1} < x_s = 1.$$

Пусть, далее,

$$\Phi_0(x) = \frac{M_s(x)}{\sqrt{H(x)}} \text{ и } L = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\Phi_0(x)|.$$

Очевидно, что

$$F(x) = L^2 H(x) - M_s^2(x) \geqslant 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

причем равенство достигается только в точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, s)$. В каждой внутренней точке x_i многочлен $F(x)$ имеет двойной нуль *, поэтому

$$L^2 H(x) - M_s^2(x) = c^2(1-x^2)(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{s-1})^2,$$

что и доказывает первую часть теоремы. Для доказательства второй части рассматривается аналогичная задача о наименьшем уклонении для функций вида

$$\sqrt{1-x}\,\frac{x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_0}{\sqrt{H(x)}}.$$

Единственность представления в каждой из указанных форм вытекает из того, что в обоих случаях существует только одна функция, наименее уклоняющаяся от нуля.

Положим

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{M_s(x)}{\sqrt{H(x)}}, & \sin\varphi &= \frac{\sqrt{1-x^2}\,N_{s-1}(x)}{\sqrt{H(x)}}; \\ \cos\psi &= \frac{\sqrt{1+x}\,K_s(x)}{\sqrt{H(x)}}, & \sin\psi &= \frac{\sqrt{1-x}\,L_s(x)}{\sqrt{H(x)}}. \end{aligned} \tag{10}$$

---

* Именно поэтому $x_0 = -1$, $x_s = +1$; если хотя бы одна из этих точек не совпадала с концом отрезка, то многочлен $F(x)$ степени $2s$ должен был бы иметь $\geqslant 2s+1$ нулей.

ЛЕММА 1. *При изменении x от -1 до $+1$ аргументы φ и ψ монотонно убывают*: φ *от* $s\pi$ *до* 0, ψ *от* $\left(s+\frac{1}{2}\right)\pi$ *до* 0.

Из формул (10) имеем

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}N_{s-1}(x)}{M_s(x)},\quad \psi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x}\,L_s(x)}{\sqrt{1+x}\,K_s(x)}. \tag{11}$$

Дифференцируя (11), получаем

$$\varphi'=\frac{M_s^2(x)\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}N_{s-1}(x)}{M_s(x)}\right\}'}{H(x)},\quad \psi'=\frac{(1+x)K_s^2(x)\left\{\frac{\sqrt{1-x}\,L_s(x)}{\sqrt{1+x}\,K_s(x)}\right\}'}{H(x)}. \tag{12}$$

Покажем, что при $-1<x<1$ $\varphi'<0$ и $\psi'<0$. Пусть $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s$ — нули $M_s(x)$ и $\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_s$ — нули $K_s(x)$. Тогда, по формуле Лагранжа, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\sqrt{1-x^2}N_{s-1}(x)}{M_s(x)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{N_{s-1}(\alpha_i)}{M_s'(\alpha_i)}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\alpha_i},\\ \frac{\sqrt{1-x}L_s(x)}{\sqrt{1+x}\,K_s(x)}=\frac{\sqrt{1-x^2}L_s(x)}{G(x)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{L_s(\beta_i)}{G'(\beta_i)}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\beta_i},\end{gathered} \tag{13}$$

где $G(x)=(1+x)K_s(x)$, $\beta_0=-1$. Так как нули $M_s(x)$ и $N_{s-1}(x)$ (соответственно $G(x)$ и $L_s(x)$) взаимно разделены и так как $M_s(1)>0$, $N_{s-1}(1)>0$, то $\frac{N_{s-1}(\alpha_i)}{M_s'(\alpha_i)}>0$ $\left(\text{соответственно } \frac{L_s(\beta_i)}{G(\beta_i)}>0\right)$.

Таким образом,

$$M_s^2(x)\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}N_{s-1}(x)}{M_s(x)}\right\}'=$$

$$=-\sum_{i=1}^{s}\frac{N_{s-1}(\alpha_i)}{M_s'(\alpha_i)}\frac{(1-\alpha_i x)M_s^2(x)}{(x-\alpha_i)^2\sqrt{1-x^2}}<0,\quad -1<x<1,$$

$$(1+x)K_s^2(x)\left\{\frac{\sqrt{1-x}L_s(x)}{\sqrt{1+x}K_s(x)}\right\}'=$$

$$=-\sum_{i=0}^{s}\frac{L_s(\beta_i)}{G'(\beta_i)}\frac{(1-\beta_i x)(1+x)K_s^2(x)}{(x-\beta_i)^2\sqrt{1-x^2}}<0,\quad -1<x<1.$$

В точке $x=1$ $\cos\varphi=1$, следовательно, можно положить $\varphi(1)=0$; при изменении x от $+1$ до -1 φ монотонно возрастает, причем $\cos\varphi=\pm1$ с последовательно противоположными знаками в $s+1$ точках $-1<x_1<\cdots<x_{s-1}<1$, откуда $\varphi(-1)=s\pi$; рассуждая точно так же, получим

$$\psi(-1)=\left(s+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

Если известно представление $H(x)$ при некотором фиксированном s, то при $n > s$ оно определяется формулами:

$$\begin{gathered} M_n(x) + i\sqrt{1-x^2}N_{n-1}(x) = \\ = [T_{n-s}(x) + iS_{n-s}(x)][M_s(x) + i\sqrt{1-x^2}N_{s-1}(x)], \\ \sqrt{1+x}K_n(x) + i\sqrt{1-x}L_n(x) = \\ = [T_{n-s}(x) + iS_{n-s}(x)][\sqrt{1+x}K_s(x) + i\sqrt{1-x}L_s(x)]. \end{gathered} \tag{14}$$

Что все нули $M_n(x)$ и $N_{n-1}(x)$ лежат на $[-1, +1]$ и взаимно разделены, следует из того, что аргумент

$$\varphi_n = \arccos\frac{M_n(x)}{\sqrt{H(x)}} = \arccos\frac{N_s(x)}{\sqrt{H(x)}} + \arccos T_{n-s}(x)$$

изменяется от 0 до $n\pi$, когда x изменяется от $+1$ до -1. Точно так же аргумент

$$\psi_n = \arccos\frac{\sqrt{1+x}\,K_n(x)}{\sqrt{H(x)}}$$

изменяется от 0 до $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ и, следовательно, все нули $\sqrt{1+x}K_n(x)$ и $\sqrt{1-x}L_n(x)$ лежат на $[-1, +1]$ и взаимно разделены.

Перейдем к рассмотрению многочленов, положительных на $[0, \infty]$.

ТЕОРЕМА 2. *Всякий положительный на полуоси $[0, \infty]$ многочлен $G(x)$ степени m может быть однозначно представлен в форме*

$$G(x) = A^2(x) + xB^2(x), \tag{15}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены с положительными старшими коэффициентами степени n и $n-1$ соответственно, если $m = 2n$, и оба — степени n, если $m = 2n+1$, причем все нули функций $A(x)$ и $\sqrt{x}B(x)$ лежат на $[0, \infty]$ и взаимно разделены.

Так как $G(x) > 0$ на $[0, \infty]$, то

$$\left.\begin{gathered} G(x) = \prod_{\mu=1}^{s}(a_\mu^2 + xb_\mu^2)\prod_{\nu=1}^{t}(x^2 + p_\nu x + q_\nu), \\ s + 2t = m, \quad a_\mu > 0, \quad b_\mu > 0, \quad p_\nu^2 - 4q_\nu < 0, \\ 1 \leqslant \mu \leqslant s, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant t. \end{gathered}\right\} \tag{16}$$

С другой стороны, справедливо тождество

$$x^2 + px + q = [x - \sqrt{q}]^2 + x\left[\sqrt{2\sqrt{q} + p}\right]^2. \tag{17}$$

Поэтому многочлен $G(x)$ может быть представлен в форме (15), где $A(x)$ и $B(x)$ определяются из соотношения

$$A(x) + i\sqrt{x}B(x) = \prod_{\mu=1}^{s}(a_\mu - ib_\mu\sqrt{x})\prod_{\nu=1}^{t}\left[(x - \sqrt{q_\nu}) + i\sqrt{x}\sqrt{2\sqrt{q_\nu} + p_\nu}\,\right]. \tag{18}$$

Чтобы установить расположение нулей $A(x)$ и $\sqrt{x}B(x)$, посмотрим, как изменяется аргумент $A(x)+i\sqrt{x}B(x)$ при изменении x от 0 до ∞. Так как

$$\varphi_\mu=\operatorname{arctg}\frac{-b_\mu\sqrt{x}}{a_\mu}\text{ и }\psi_\nu=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}\sqrt{2\sqrt{q_\nu}+p_\nu}}{x-\sqrt{q_\nu}}$$

монотонно убывают на $[0,\infty]$, причем φ_μ изменяется от 0 до $-\frac{\pi}{2}$, а ψ_ν — от 0 до $-\pi$, то

$$\Phi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}B(x)}{A(x)}=\sum_{\mu=1}^{s}\varphi_\mu+\sum_{\nu=1}^{t}\psi_\nu$$

монотонно убывает на $[0,\infty]$ и изменяется от 0 до $-\left(\frac{s}{2}+t\right)\pi=-m\frac{\pi}{2}$. Следовательно, все нули

$$A(x)=\sqrt{G(x)}\cos\Phi\text{ и }\sqrt{x}B(x)=\sqrt{G(x)}\sin\Phi$$

лежат на положительной полуоси и взаимно разделены.

Единственность такого представления $G(x)$ следует из того, что замена хотя бы одного множителя в правой части (18) на его сопряженный уменьшила бы интервал изменения Φ, а тогда на $[0,\infty]$ не могли бы лежать все нули $A(x)$ и $B(x)$.

Теорема 1 хорошо известна, однако в ее формулировке обычно отсутствует требование о разделении нулей $M_s(x)$ и $N_{s-1}(x)$ (соответственно $\sqrt{1+x}K_s(x)$ и $\sqrt{1-x}L_s(x)$), очень важное для нас в дальнейшем*. Приведенное здесь доказательство, указывающее на связь этого вопроса с полиномами, наименее уклоняющимися от нуля, основано на идее, принадлежащей в сущности П. Л. Чебышеву ([9]).

§ 3. ТЕОРЕМА 3. *Пусть на отрезке $[a,b]$ даны две непрерывные вместе со своими первыми производными функции $\rho(x)$ и $f(x)$, которые обладают следующими свойствами:*

1) *любая линейная комбинация*

$$\mu_1\rho(x)+\mu_2 f(x)\quad(\mu_1^2+\mu_2^2\neq 0)$$

(μ_1, μ_2 — действительные) имеет $\leqslant n$ нулей на $[a,b]$;

2) *каждая из производных $\rho'(x)$ и $f'(x)$ имеет $\leqslant n-1$ нулей на $[a,b]$.*

Если $\rho(x)$ имеет на $[a,b]$ n различных нулей $\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_n$ и $f(x)$ имеет на $[a,b]$ n различных нулей $a_1>a_2>\cdots>a_n$, которые удовлетворяют неравенствам

$$a_n<\alpha_n<a_{n-1}<\cdots<a_1<\alpha_1,\tag{19}$$

то нули $\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_{n-1}$ функции $\rho'(x)$ и нули $x_1>x_2>\cdots>x_{n-1}$ функции $f'(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$x_{n-1}<\xi_{n-1}<x_{n-2}<\cdots<x_1<\xi_1.\tag{20}$$

---

* Первая часть этой теоремы доказана с необходимой полнотой в статье С. Н. Бернштейна ([8]), но другим методом.

Для доказательства * рассмотрим функцию

$$F(x) = \mu_1 \rho(x) + \mu_2 f(x) \quad (\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0). \tag{21}$$

Вследствие неравенства (19) имеем

$$F(\alpha_k) F(\alpha_{k+1}) < 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$

а потому $F(x)$ на $[\alpha_n, \alpha_1]$ имеет $\geqslant n-1$ нулей. И так как на отрезке $[a, b]$ $F(x)$ может иметь $\leqslant n$ нулей, то все нули $F(x)$ будут простыми, а на любом интервале (α_{k+1}, α_k) лежит один и только один нуль $F(x)$. Таким образом, какова бы ни была точка x_0 $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$, однородная система линейных уравнений

$$\mu_1 \rho(x_0) + \mu_2 f(x_0) = 0,$$
$$\mu_1 \rho'(x_0) + \mu_2 f'(x_0) = 0$$

не имеет решений, кроме $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Следовательно, функция

$$\Psi(x) = f'(x) \rho(x) - f(x) \rho'(x) \tag{22}$$

не обращается в нуль на $[a, b]$ (для определенности положим $\Psi(x) > 0$). Отсюда легко выводим неравенства (20). Действительно, в нулях $f'(x)$ имеем

$$\Psi(x_k) = -f(x_k) \rho'(x_k) > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

С другой стороны,

$$f(x_k) f(x_{k+1}) < 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{24}$$

Из (23) и (24) получаем

$$\rho'(x_k) \rho'(x_{k+1}) < 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{25}$$

откуда заключаем, что между x_k и x_{k+1} лежит по крайней мере один нуль функции $\rho'(x)$. Аналогично заключаем, что между ξ_k и ξ_{k+1} лежит по крайней мере один нуль функции $f'(x)$.

Чтобы закончить доказательство теоремы, остается установить, что $\xi_1 > x_1$. Предположим для определенности, что $f(\alpha_1) < 0$. Тогда

$$\Psi(\alpha_1) = -f(\alpha_1) \rho'(\alpha_1) > 0,$$

следовательно, $\rho'(\alpha_1) > 0$; с другой стороны,

$$\Psi(x_1) = -f(x_1) \rho'(x_1) > 0,$$

и так как $a_2 < x_1 < a_1 < \alpha_1$, то $f(x_1) f(\alpha_1) < 0$, следовательно, $\rho'(x_1) < 0$. Таким образом, между x_1 и α_1 лежит нуль $\rho'(x)$, т. е. $\xi_1 > x_1$.

Замечание. Теорема 3 осталась бы в силе, если бы одна из функций $f(x)$ или $\rho(x)$ имела на $[a, b]$ только $n-1$ нулей.

В процессе доказательства мы установили, что $F(x) = \mu_1 \rho(x) + \mu_2 f(x)$ может иметь только простые нули, если:

* В моей заметке ([5]) было дано другое доказательство.

1) непрерывные функции $\rho(x)$ и $f(x)$ имеют по n простых нулей каждая, причем нули $\rho(x)$ взаимно разделены с нулями $f(x)$;

2) $F(x)$ имеет $\leqslant n$ нулей на $[a, b]$.

Справедливо и обратное, в известном смысле, утверждение, именно, если:

1) непрерывные и дифференцируемые функции $\rho(x)$ и $f(x)$ имеют по n простых нулей каждая на $[a, b]$, причем нули $\rho(x)$ взаимно разделены с нулями $f(x)$, и

2) $F(x)=\mu_1\rho(x)+\mu_2 f(x)$ при любых μ_1 и μ_2 ($\mu_1^2+\mu_2^2 \neq 0$) имеет только простые нули, то $F(x)$ может иметь либо n, либо $n-1$ простых нулей на $[a_n, \alpha_1]$.

Пусть для определенности $\rho(a_1)<0$. Функция

$$F(x)=\rho(x)+\mu f(x) \quad (\mu \neq 0)$$

имеет в каждом интервале (α_k, α_{k-1}) $(k=2, \ldots, n)$ нечетное число нулей, так как $F(\alpha_k)F(\alpha_{k-1})<0$. В интервале (a_n, α_n) лежит нечетное число нулей, если $\mu f(\alpha_1)>0$, и четное, если $\mu f(\alpha_1)<0$. Предположим, что на одном из интервалов (α_k, α_{k-1}) или (a_n, α_n) лежит $\geqslant 2$ нуля функции $F(x)$; обозначим два таких соседних нуля через β и γ. Так как внутри рассматриваемых интервалов $\rho(x)\neq 0$, то функция $\Phi(x)=\frac{f(x)}{\rho(x)}$ непрерывна. Но

$$\Phi(\beta)=\Phi(\gamma)=-\frac{1}{\mu},$$

и поэтому, по теореме Ролля, в некоторой точке ξ, $\beta<\xi<\gamma$, имеем

$$\Phi'(\xi)=\frac{f'(\xi)\rho(\xi)-f(\xi)\rho'(\xi)}{\rho^2(\xi)}=0,$$

следовательно, существует такое $\lambda \neq 0$, что

$$\rho(\xi)+\lambda f(\xi)=0$$

и

$$\rho'(\xi)+\lambda f'(\xi)=0,$$

т. е. $F(x)=\rho(x)+\lambda f(x)$ имеет в точке ξ двойной нуль.

Таким образом, в формулировке теоремы 3 можно заменить требование 1) требованием 1 bis): *любая линейная комбинация*

$$\mu_1\rho(x)+\mu_2 f(x) \quad (\mu_1^2+\mu_2^2 \neq 0)$$

имеет на отрезке $[a, b]$ *только простые нули* *.

§ 4. Пусть $H(x)$ — положительный на отрезке $[-1, +1]$ многочлен степени m. Если $n \geqslant \frac{m}{2}$, то многочлен $H(x)$ может быть представлен в формах

$$H(x)=M_n^2(x)+(1-x^2)N_{n-1}^2(x) \tag{8}$$

---

* В дальнейшем, когда мы будем ссылаться на теорему 3 с условием 1 bis), мы будем кратко называть ее теоремой 3 bis.

и

$$H(x) = (1+x) K_n^2 + (1-x) L_n^2(x), \tag{9}$$

где многочлены $M_n(x)$, $N_{n-1}(x)$, $K_n(x)$ и $L_n(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. *Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству*

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{H(x)} = \sqrt{M_n^2(x) + (1-x^2) N_{n-1}^2(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{26}$$

то

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \sqrt{[M_n^{(k)}(x)]^2 + [\{\sqrt{1-x^2}\, N_{n-1}(x)\}^{(k)}]^2}, \quad -1 < x < 1 \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{27}$$

причем равенство достигается только для многочлена $P_n(x) = \gamma M_n(x)$, где $|\gamma| = 1$.

При $k = 1$ эта теорема была доказана С. Н. Бернштейном [1].

ТЕОРЕМА 5. *Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству*

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{H(x)} = \sqrt{(1+x) K_n^2(x) + (1-x) L_n^2(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{28}$$

то

$$|P_n^{(k)}(x)| < \sqrt{[\{\sqrt{1+x}\, K_n(x)\}^{(k)}]^2 + [\{\sqrt{1-x}\, L_n(x)\}^{(k)}]^2}, \quad -1 < x < 1 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{29}$$

При $k = 1$ неравенство (29) легко получается из неравенства (6) статьи С. Н. Бернштейна [1]. Метод, который мы здесь будем применять, существенно использует тот факт, что при $k = 1$ теоремы 4 и 5 уже доказаны.

Предположим сперва, что $P_n(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Следующее простое рассуждение позволяет свести доказательство неравенств (27) и (28) к доказательству того, что первые n производных функций

$$F(x, \alpha) = \cos\alpha\, M_n(x) + \sin\alpha \sqrt{1-x^2}\, N_{n-1}(x) - P_n(x),$$
$$F_1(x, \alpha) = \cos\alpha \sqrt{1+x}\, K_n(x) + \sin\alpha \sqrt{1-x}\, L_n(x) - P_n(x)$$

имеют только простые нули на $[-1, +1]$, каково бы ни было действительное число α, если $P_n(x)$ удовлетворяет (26) или соответственно (28). В самом деле, пусть, например, $F^{(k)}(x, \alpha)$ при данном k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ не имеет двойных нулей; пусть, далее, $P_n(x) \not\equiv \gamma M_n(x)$, и предположим, что в некоторой точке x_0 $(-1 < x_0 < 1)$

$$P_n^{(k)}(x_0) \geqslant \sqrt{H_k(x_0)} = \sqrt{[M_n^{(k)}(x_0)]^2 + [\{\sqrt{1-x_0^2}\, N_{n-1}(x_0)\}^{(k)}]^2}. \tag{30}$$

Обозначим

$$R(x, \alpha) = \cos\alpha\, M_n(x) + \sin\alpha \sqrt{1-x^2}\, N_{n-1}(x).$$

Выберем сперва число α по условию

$$P_n^{(k)}(x_0) R^{(k+1)}(x_0, \alpha) - P_n^{(k+1)}(x_0) R^{(k)}(x_0, \alpha) = 0, \tag{31}$$

что всегда возможно, так как (31) определяет только $\operatorname{tg}\alpha$. Затем выберем число λ по условию

$$R^{(k)}(x_0, \alpha) - \lambda P_n^{(k)}(x_0) = 0. \tag{32}$$

При этом, благодаря (30), $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$, так как

$$|\lambda P_n^{(k)}(x_0)| = |R^{(k)}(x_0, \alpha)| \leqslant \sqrt{H_k(x_0)}.$$

Следовательно, $\lambda P_n(x)$ удовлетворяет (26) и, по предположению, функция

$$f(x) = R^{(k)}(x, \alpha) - \lambda P_n^{(k)}(x) \tag{33}$$

не имеет двойных нулей. С другой стороны, сопоставляя (31) и (32), получаем

$$R^{(k+1)}(x_0, \alpha) - \lambda P_n^{(k+1)}(x_0) = 0. \tag{34}$$

Из (32) и (34) следует, что $f(x)$ имеет двойной нуль в точке x_0. Полученное противоречие доказывает неравенство (27). Совершенно так же выводится неравенство (29) из отсутствия двойных нулей у $F_1^{(k)}(x, \alpha)$.

В § 5 мы приведем ряд лемм, при помощи которых получим интересующее нас утверждение о нулях $F^{(k)}(x, \alpha)$ и $F_1^{(k)}(x_1, \alpha)$.

Перейдем теперь к оценке производных многочлена на полуоси $[0, \infty]$. Пусть $G(x)$ — положительный на $[0, \infty]$ многочлен степени m; тогда он может быть представлен в виде

$$G(x) = A^2(x) + xB^2(x), \tag{15}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы 2.

ТЕОРЕМА 6. *Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ $\left(n = \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ удовлетворяет неравенству*

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{G(x)} = \sqrt{A^2(x) + xB^2(x)}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{35}$$

то

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \sqrt{[A^{(k)}(x)]^2 + [\{\sqrt{x}B(x)\}^{(k)}]^2}, \quad 0 \leqslant x < \infty \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{36}$$

причем неравенство достигается лишь для многочлена $P_n(x) = \gamma M_n(x)$, где $|\gamma| = 1$.

Для доказательства мы применим тот же метод, что и к теоремам 4 и 5. Поэтому докажем, прежде всего, неравенство (36) при $k = 1$. В этом случае оно является простым следствием теоремы С. Н. Бернштейна [(3), стр. 138]. Действительно, положим $x = y^2$, тогда неравенство (35) примет вид

$$|P_n(y^2)| \leqslant |A(y^2) + iyB(y^2)|, \quad -\infty < y < \infty, \tag{35bis}$$

откуда, по вышеупомянутой теореме, имеем

$$\left|\left(\frac{d}{dx}P_n(x)\right)\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{d}{dy}P_n(y^2)\right| \leqslant \left|\frac{d}{dy}\{A(y^2)+iyB(y^2)\}\right| =$$
$$= \left|\frac{d}{dx}\{A(x)+i\sqrt{x}B(x)\}\frac{dx}{dy}\right| \quad (-\infty<y<\infty,\ 0\leqslant x<\infty). \quad (36\text{ bis})$$

Доказательство теоремы 6 при $k \geqslant 2$ опять сводится к установлению соответствующего предложения об отсутствии двойных нулей у производных функции

$$F_2(x,\ \alpha) = \cos\alpha\, A(x) + \sin\alpha \sqrt{x}B(x) - P_n(x).$$

Если неравенства (27), (29) и (36) будут установлены для многочленов с действительными коэффициентами, то распространение их на случай комплексных коэффициентов не составит труда, благодаря приему, указанному С. Н. Бернштейном [(10), стр. 45]. Пусть, например, $P_n(x)$ — многочлен с комплексными коэффициентами, удовлетворяющий неравенству (26). Покажем, что в произвольной точке x_0 $(-1<x_0<1)$ имеет место неравенство (27) для данного k $(1\leqslant k\leqslant n)$. С этой целью выберем постоянное β так, чтобы $e^{i\beta}P_n^{(k)}(x_0)$ было действительным числом. Запишем

$$e^{i\beta}P_n(x) = q_n(x) + ir_n(x),$$

где $q_n(x)$ и $r_n(x)$ — многочлены степени n с действительными коэффициентами. Многочлен $q_n(x)$ удовлетворяет неравенству (26) и потому

$$|e^{i\beta}P_n^{(k)}(x_0)| = |q_n^{(k)}(x_0)| \leqslant \sqrt{[M_n^{(k)}(x_0)]^2 + [\{\sqrt{1-x_0}N_{n-1}(x_0)\}^{(k)}]^2}.$$

Ввиду этого замечания, во всем дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемые многочлены имеют действительные коэффициенты.

§ 5. ЛЕММА 2. *Пусть*

$$f(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n(x), \quad (37)$$

где $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $P_n(x)$ — *многочлен степени* n, *все нули которого лежат на интервале* $(-1,\ +1)$. *Тогда* k-*я производная* $f^{(k)}(x)$ $(k=1,\ \ldots,\ n+2)$ *имеет на интервале* $(-1,\ +1)$ $n-k+2$ *и только* $n-k+2$ *нулей*.

Представим функцию $f(x)$ в виде*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (1-x)^{k+\alpha}(1+x)^{n-k+\beta}.$$

Тогда в ряде чисел $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$ имеется n перемен знака, так как для системы функций $(1-x)^k(1+x)^{n-k}$, $0\leqslant k\leqslant n$, на интервале $(-1,\ +1)$ имеет место правило знаков Декарта, а по условию, все нули многочлена $P_n(x)$ лежат на интервале $(-1,\ +1)$.

---

* Идею этого доказательства мне любезно сообщил С. Н. Бернштейн.

Покажем, что $f^{(n+2)}(x)$ не обращается в нуль на $(-1, +1)$. Обозначим

$$y_k = (1-x)^{k+\alpha}(1+x)^{n-k+\beta},$$

тогда

$$(1-x)^{n+2-\alpha}(1+x)^{n+2-\beta}y_k^{(n+2)} = \sum_{\nu=0}^{n+2}\gamma_{k,\nu}(1-x)^{n+k+2-\nu}(1+x)^{n-k+\nu},$$

где $\operatorname{sign}\gamma_{k,\nu} = (-1)^{k+1}$. Таким образом, в ряде коэффициентов многочлена

$$(1-x)^{n+2-\alpha}(1+x)^{n+2-\beta}f^{(n+2)}(x) = \sum_{m=0}^{2n+2}C_m(1-x)^m(1+x)^{2n+2-m}$$

нет ни одной перемены знаков, так как

$$C_m = \sum_{k=0}^{n}A_k\gamma_{k,\,n+k-m+2}.$$

Отсюда заключаем, что $f^{(n+2)}(x)$ не обращается в нуль на интервале $(-1, +1)$. Так как $f(x)$ имеет на $[-1, +1]$ $n+2$ нуля, то, по теореме Ролля, $f^{(k)}(x)$ имеет $\geqslant n+2-k$ нулей; если бы их было $> n+2-k$, то $f^{(n+2)}(x)$ должна была бы по крайней мере один раз обращаться в нуль, что, по доказанному, невозможно.

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$f(x) = x^\alpha P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}A_kx^{k+\alpha}, \tag{38}$$

где $0<\alpha<1$, $P_n(x)$ — *многочлен степени* n, *все нули которого лежат на полуоси* $(0, \infty)$. *Тогда* k-*я производная* $f^{(k)}(x)$ $(k=1, \ldots, n+1)$ *имеет на полуоси* $(0, \infty)$ $n-k+1$ *и только* $n-k+1$ *нулей.*

По правилу знаков Декарта, в ряде чисел $A_0, A_1, \ldots, A_n$ имеется n перемен знака. Многочлен

$$x^{n+1-\alpha}f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n}A_k(k+\alpha)\ldots(k+\alpha-n)x^k$$

имеет все коэффициенты одного знака, так как

$$\operatorname{sign}(k+\alpha)\ldots(k+\alpha-n) = (-1)^{n-k}.$$

Следовательно, $f^{(n+1)}(x)$ не имеет нулей на полуоси $(0, \infty)$, что и доказывает лемму. Заметим, что $f^{(n+s)}(x)$ не обращается в нуль на $(0, \infty)$ при любом целом $s \geqslant 1$.

ЛЕММА 4. *Пусть*

$$f(x) = (1-x)^\alpha P_n(x), \quad f_1(x) = (1+x)^\alpha P_n(x), \tag{39}$$

где $0<\alpha<1$, $P_n(x)$ — *многочлен степени* n, *все нули которого лежат на интервале* $(-1, +1)$. *Тогда* k-*е производные* $f^{(k)}(x)$ *и* $f_1^{(k)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n+1)$ *имеют на интервале* $(-1, +1)$ $n-k+1$ *и только* $n-k+1$ *нулей.*

Это утверждение непосредственно сводится к утверждению леммы 3 заменой переменной: в первом случае $y = 1 - x$, во втором случае $y = 1 + x$.

ЛЕММА 5. *Если $Q_n(x)$ и $R_{n-1}(x)$ — многочлены степени n и $n-1$, все нули которых лежат на интервале $(-1, +1)$, причем нули обоих многочленов взаимно разделены, то разделены нули функций $Q_n^{(k)}(x)$ и $\{\sqrt{1-x^2}R_{n-1}(x)\}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, лежащие на интервале $(-1, +1)$.*

Обозначим $f(x) = \sqrt{1-x^2}R_{n-1}(x)$. По доказанному в лемме 2, $f^{(n+1)}(x)$ не обращается в нуль на $(-1, +1)$; следовательно,

$$F^{(k)}(x) = \lambda f^{(k)}(x) + \mu Q_n^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

может иметь $\leqslant n - k + 1$ нулей на $(-1, +1)$ при любых действительных λ и μ $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$, так как $F^{(n+1)}(x) = \lambda f^{(n+1)}(x)$ не обращается в нуль на $(-1, +1)$. По теореме 3, все условия которой выполнены для $f(x)$ и $Q_n(x)$, нули $f'(x)$ и $Q_n'(x)$ на $(-1, +1)$ взаимно разделены. Предположим по индукции, что нули $f^{(k)}(x)$ и $Q_n^{(k)}(x)$ взаимно разделены, тогда условия теоремы 3 выполнены также для функции $f^{(k)}(x)$ и $Q_n^{(k)}(x)$, и, следовательно, взаимно разделены нули $f^{(k+1)}(x)$ и $Q_n^{(k+1)}(x)$.

ЛЕММА 6. *Если*

$$f(x) = \sqrt{1-x}\, Q_n(x),$$

$$f_1(x) = \sqrt{1+x}\, R_n(x),$$

где $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ — многочлены степени n, причем все нули $f(x)$ и $f_1(x)$ лежат на отрезке $[-1, +1]$ и взаимно разделены, то взаимно разделены нули $f^{(k)}(x)$ и $f_1^{(k)}(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$, лежащие на отрезке $[-1, +1]$.

При доказательстве леммы 1 мы уже показали, что

$$(1+x)R_n^2(x)\left\{\frac{\sqrt{1-x}\,Q_n(x)}{\sqrt{1+x}\,R_n(x)}\right\}' = f'(x)f_1(x) - f(x)f_1'(x)$$

не обращается в нуль на интервале $(-1, +1)$, откуда следует, что, каковы бы ни были μ и μ_1 $(\mu^2 + \mu_1^2 \neq 0)$, функция $F(x) = \mu f(x) + \mu_1 f(x)$ имеет на интервале $(-1, +1)$ только простые нули. По лемме 4, производные $f'(x)$ и $f_1'(x)$ имеют по n нулей каждая. Таким образом, функции $f(x)$ и $f_1(x)$ удовлетворяют всем требованиям теоремы 3 bis, так что нули $f'(x)$ и $f_1'(x)$ взаимно разделены.

Перейдем к доказательству леммы при $k > 1$. Мы уже отмечали в § 3, что $F(x)$ имеет либо n, либо $n+1$ нулей на $(-1, +1)$. Установим прежде всего, что $F'(x)$ имеет либо n, либо $n+1$ простых нулей на $(-1, +1)$. Заметим, что

$$f'(x) = \frac{u_n(x)}{\sqrt{1-x}}, \quad f_1'(x) = \frac{v_n(x)}{\sqrt{1-x}},$$

где $u_n(x)$ и $v_n(x)$ — многочлены степени n. Так как при $k=1$ наша лемма уже доказана, то нули функций $\sqrt{1+x}\,u_n(x)$ и $\sqrt{1-x}\,v_n(x)$ взаимно разделены и, следовательно, функция

$$F_1(x) = \mu\sqrt{1+x}\,u_n(x) + \mu_1\sqrt{1-x}\,v_n(x)$$

имеет либо n, либо $n+1$ простых нулей на $(-1, +1)$. Но

$$F'(x) = \frac{F_1(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

что и доказывает наше утверждение о нулях $F'(x)$.

Легко показать, что $F^{(k)}(x)$ имеет $\leqslant n+2-k$ нулей на $[-1, +1]$. В самом деле, по лемме 4, $f^{(n+1)}(x)$ и $f_1^{(n+1)}(x)$ не обращаются в нуль на $[-1, +1]$. Так как $f^{(n+1)}(x)$ и $f_1^{(n+1)}(x)$ тоже не обращаются в нуль, то $f^{(n+1)}(x)$ и $f_1^{(n+1)}(x)$ монотонны на $[-1, +1]$. Кроме того, $f^{(n+1)}(x) \to \infty$ при $x \to 1$, а $|f_1^{(n+1)}(x)| \to \infty$ при $x \to -1$; поэтому $F^{(n+1)}(x)$ имеет либо один нуль (когда $\mu f^{(n+1)}(x)$ и $\mu_1 f^{(n+1)}(x)$ разных знаков), либо не имеет ни одного нуля. Таким образом, $F^{(k)}(x)$ имеет $\leqslant n+2-k$ нулей. Так как $F'(x)$ имеет $\geqslant n$ простых нулей, то $F''(x)$ имеет по крайней мере $n-1$ простых нулей, которые отделены друг от друга нулями $F'(x)$, но, с другой стороны, $F''(x)$ имеет $\leqslant n$ нулей на $[-1, +1]$; поэтому все они простые. При помощи очевидной индукции по k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ устанавливаем, что $F^{(k)}(x)$ имеет на $[-1, +1]$ только простые нули. Предположим, по индукции, что нули $f^{(k)}(x)$ и $f_1^{(k)}(x)$ взаимно разделены, тогда, по теореме 3 bis, взаимно разделены нули $f^{(k+1)}(x)$ и $f_1^{(k+1)}(x)$.

ЛЕММА 7. *Пусть $Q_n(x)$ — многочлен степени n, все нули которого различны и лежат на положительной полуоси, и пусть $f(x) = \sqrt{x}\,R(x)$, где $R(x)$ — многочлен степени n или $n-1$, все нули которого лежат на положительной полуоси, причем нули $f(x)$ взаимно разделены с нулями $Q_n(x)$. Тогда нули $Q_n^{(k)}(x)$ и $f^{(k)}(x)$, лежащие на $(0, \infty)$, взаимно разделены.*

Лемма 7 доказывается аналогично лемме 5.

ЛЕММА 8. *Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, удовлетворяющий неравенству:*

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{M_n^2(x) + (1-x^2)\,N_{n-1}^2(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{26}$$

где $M_n(x)$ и $N_{n-1}(x)$ — многочлены, фигурирующие в теореме 4.

Если $P_n(x) \not\equiv \gamma M_n(x)$, то, каково бы ни было вещественное α, первые n производных функции

$$F(x, \alpha) = \cos\alpha M_n(x) + \sin\alpha\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x) - P_n(x)$$

имеют только простые нули на $[-1, +1]$.

Лемма 8 доказана в моей заметке ([5]). Как было показано в § 4, из этой леммы следует утверждение теоремы 4.

ЛЕММА 9. *Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, удовлетворяющий неравенству*:

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{(1+x)K_n^2(x)+(1-x)L_n^2(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{28}$$

где $K_n(x)$ и $L_n(x)$ — многочлены, фигурирующие в теореме 5. Тогда, каково бы ни было вещественное α, первые n производных функции

$$F_1(x, \alpha) = \cos\alpha\sqrt{1+x}\,K_n(x) + \sin\alpha\sqrt{1-x}\,L_n(x) - P_n(x)$$

имеют только простые нули на $[-1, +1]$.

Достаточно рассмотреть $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Так как при $k=1$ теорема 5 доказана, то из (28) вытекает неравенство

$$|P_n'(x)| < |\{\sqrt{1+x}\,K_n(x) + i\sqrt{1-x}\,L_n(x)\}' \qquad -1 < x < 1. \tag{40}$$

Разберем следующие случаи:

1°. $\alpha = 0$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right.$ рассматривается аналогично$\left.\right)$. По лемме 4, $\{\sqrt{1-x}\,L_n(x)\}'$ имеет на $[-1, +1]$ n различных нулей $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Из (40) имеем

$$|P_n'(x_s)| < |\{\sqrt{1+x_s}\,K_n(x_s)\}'| \quad (1 \leqslant s \leqslant n); \tag{41}$$

это же неравенство имеет место в достаточно малой окрестности точки -1, так как $|\{\sqrt{1+x}\,K_n(x)\}'| \to \infty$ при $x \to -1$. Благодаря тому что нули $\{\sqrt{1+x}\,K_n(x)\}'$ взаимно разделены с нулями $\{\sqrt{1-x}\,L_n(x)\}'$, имеем

$$\begin{gathered}\{\sqrt{1+x_s}\,K_n(x_s)\}'\,\{\sqrt{1+x_{s+1}}\,K_n(x_{s+1})\}' < 0, \quad (1 \leqslant s \leqslant n-1),\\ \{\sqrt{1+x}\,K_n(x)\}'\,\{\sqrt{1+x_1}\,K_n(x_1)\}' < 0, \qquad -1 < x < -1+\varepsilon,\end{gathered} \tag{42}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Из (41) и (42) следует, что $F_1'(x, 0)$ меняет на $[-1, +1]$ $n+1$ раз знак, т. е. имеет по крайней мере n различных нулей. И так как $F_1^{(n+1)}(x, 0)$ не обращается в нуль на $[-1, +1]$, то $F_1(x, 0)$ имеет n простых нулей, а $F_1^{(k)}(x, 0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ будет иметь $n+1-k$ простых нулей на $[-1, +1]$.

2°. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Заметим, что

$$\{\sqrt{1+x}\,K_n(x)\}' = \frac{u_n(x)}{\sqrt{1+x}}, \quad \{\sqrt{1-x}\,L_n(x)\}' = \frac{v_n(x)}{\sqrt{1-x}},$$

где $u_n(x)$ и $v_n(x)$ — многочлены степени n, причем все нули $\sqrt{1-x}\,u_n(x)$ и $\sqrt{1+x}\,v_n(x)$ лежат на $[-1, +1]$ и взаимно разделены. Положим

$$E_1(x) = [\{\sqrt{1+x}\,K_n(x)\}']^2 + [\{\sqrt{1-x}\,L_n(x)\}']^2,$$

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{1+x}\,v_n(x)}{\sqrt{(1+x)v_n^2(x) + (1-x)u_n^2(x)}} = \frac{\{\sqrt{1-x}\,L_n(x)\}'}{\sqrt{E_1(x)}},$$

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{1-x}\,u_n(x)}{\sqrt{(1+x)v_n^2(x) + (1-x)u_n^2(x)}} = \frac{\{\sqrt{1+x}\,K_n(x)\}'}{\sqrt{E_1(x)}},$$

$$R_1(x) = \cos\alpha \sqrt{1+x}\, K_n(x) + \sin\alpha \sqrt{1-x}\, L_n(x),$$

тогда

$$R_1'(x) = \cos\alpha \{\sqrt{1+x}\, K_n(x)\}' + \sin\alpha \{\sqrt{1-x}\, L_n(x)\}' =$$
$$= \sqrt{E_1(x)} \sin(\psi + \alpha).$$

По лемме 1, при изменении x от $+1$ до -1, аргумент ψ изменяется от 0 до $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Следовательно, $R_1'(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ принимает по абсолютной величине $n+1$ раз значение $\sqrt{E_1(x)}$ с последовательно противоположными знаками в точках $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n+1}$, где $|\sin(\psi+\alpha)| = 1$. В этих точках, вследствие (40), имеем

$$|P_n'(\xi_s)| < \sqrt{E_1(\xi_s)} = |R_1'(\xi_s)| \quad (1 \leqslant s \leqslant n+1),$$

так что $F_1(x, \alpha)$ имеет по крайней мере n различных нулей. Но при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ это — максимальное число, так как $F_1^{(n+1)}(x, \alpha) = R^{(n+1)}(x)$ не обращается в нуль на $[-1, +1]$, как мы показали при доказательстве леммы 5. Таким образом, $F^{(k)}(x, \alpha)$ $(k = 1, \ldots, n)$ имеет $n + 1 - k$ простых нулей.

3°. $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. В этом случае на отрезке $[-1, +1]$ $R_1'(x)$ принимает по абсолютной величине n раз значение $\sqrt{E_1(x)}$ с последовательно противоположными знаками в точках $\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_n$, где $|\sin(\psi + \alpha)| = 1$. Вследствие (40)

$$|P_n'(\eta_s)| < \sqrt{E_1(\eta_s)} = |R_1'(\eta_s)| \quad (1 \leqslant s \leqslant n).$$

Кроме того, в окрестности точек $+1$ и -1 справедливо неравенство

$$|P_n'(x)| < |R_1'(x)|,$$

так как $|R_1'(x)| \to \infty$ при $x \to \pm 1$. Легко установить, что

$$R_1'(x) R_1'(\eta_1) < 0, \quad -1 < x < -1 + \varepsilon,$$
$$R_1'(x) R_1'(\eta_n) < 0, \quad 1 - \varepsilon < x < 1,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало; поэтому $F_1'(x, \alpha)$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ имеет на отрезке $[-1, +1]$ $n+1$ простых нулей, следовательно, $F_1^{(k)}(x, \alpha)$ имеет $x + 2 - k$ простых нулей на $[-1, +1]$. Лемма доказана, и, значит, завершено доказательство теоремы 5.

ЛЕММА 10. *Пусть* $P_n(x)$ — *многочлен степени* $\leqslant n$, *удовлетворяющий неравенству:*

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{A^2(x) + xB^2(x)}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{35}$$

где $A(x)$ *и* $B(x)$ — *многочлены, фигурирующие в теореме* 6. *Если* $P_n(x) \not\equiv \gamma A(x)$, *то, каково бы ни было вещественное* α, *первые* n *производных функции*

$$F_2(x, \alpha) = \cos\alpha\, A(x) + \sin\alpha \sqrt{x}\, B(x) - P_n(x)$$

имеют только простые нули на полуоси $[0, \infty]$.

Для определенности рассмотрим случай, когда $B(x)$ — многочлен степени $n-1$. В § 4 мы доказали теорему 6 для $k=1$, т. е. доказали, что имеет место неравенство

$$|P_n'(x)| < |\{A(x) + i\sqrt{x}B(x)\}'|, \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{36 bis}$$

Разберем следующие случаи:

1°. $\alpha = 0$. В $n-1$ точках $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$, где $\{\sqrt{x}B(x)\}'$ обращается в нуль, имеем

$$|P_n'(x_s)| < |A'(x_s)| \quad (1 \leqslant s \leqslant n-1).$$

Кроме того, из (36 bis) следует, что для достаточно больших x $(x > x')$ имеем также

$$|P_n'(x)| < |A'(x)|.$$

Так как нули $A'(x)$ и $\{\sqrt{x}B(x)\}'$ разделены, то

$$A'(x_s)A'(x_{s+1}) < 0 \quad (1 \leqslant s \leqslant n-2); \quad A'(x_{n-1})A'(x) < 0, \quad x > x',$$

откуда заключаем, что многочлен $F_2'(x, 0)$ имеет на $[0, \infty]$ $n-1$ простых нулей.

2°. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. В $n-1$ точках $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1}$, где $A'(x)$ обращается в нуль, имеем

$$|P_n'(y_s)| < |\{\sqrt{y_s}B(y_s)\}'| \quad (1 \leqslant s \leqslant n-1).$$

Кроме того, $|\{\sqrt{x}B(x)\}'| \to \infty$ при $x \to 0$, так что

$$|P_n'(x)| < |\{\sqrt{x}B(x)\}'|, \quad 0 < x < \varepsilon,$$

где ε достаточно мало. Так как

$$\{\sqrt{y_s}B(y_s)\}'\{\sqrt{y_{s+1}}B(y_{s+1})\}' < 0 \quad (1 \leqslant s \leqslant n-2),$$

$$\{\sqrt{x}B(x)\}'\{\sqrt{y_1}B(y_1)\}' < 0, \qquad 0 < x < \varepsilon,$$

то $F_2'\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет $\geqslant n-1$ простых нулей; но функция $F_2'(x, \alpha)$ может иметь $\leqslant n$ нулей на $[0, \infty]$, поэтому все они простые, а тогда будут также простыми нули $F^{(k)}\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

3°. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. (Случай $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ рассматривается аналогично.) Заметим, что

$$\{\sqrt{x}B(x)\}' = \frac{D_{n-1}(x)}{\sqrt{x}},$$

где $D_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$, причем все нули его $x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1}$, лежат на $[0, \infty]$ и взаимно разделены с нулями $A'(x)$.

Положим

$$G_1(x) = [A'(x)]^2 + [\{\sqrt{x}\,B(x)\}']^2,$$

$$\cos\theta = \frac{D_{n-1}(x)}{\sqrt{D_{n-1}^2(x) + x\,[A'(x)]^2}} = \frac{\{\sqrt{x}\,B(x)\}'}{\sqrt{G_1(x)}},$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x}\,A(x)}{\sqrt{D_{n-1}^2(x) + x\,[A'(x)]^2}} = \frac{A'(x)}{\sqrt{G_1(x)}},$$

$$R_2(x) = \cos\alpha\,A(x) + \sin\alpha\sqrt{x}\,B(x),$$

тогда

$$R_2'(x) = \cos\alpha\,A'(x) + \sin\alpha\,\{\sqrt{x}\,B(x)\}' = \sqrt{G(x)}\sin(\theta+\alpha).$$

При изменении x от 0 до ∞ аргумент θ изменяется от 0 до $-(2n-1)\frac{\pi}{2}$ (см. § 2). Следовательно, $R_2'(x)$ на полуоси $[0, \infty]$ принимает по абсолютной величине $n-1$ раз значение $\sqrt{G_1(x)}$ с последовательно противоположными знаками в точках $\xi_1 < \xi_2 < \cdots \xi_{n-1}$, где $|\sin(\theta+\alpha)| = 1$. Вследствие (36 bis), имеем

$$|P_n'(\xi_s)| < \sqrt{G_1(\xi_s)} = |R_2'(\xi_s)| \quad (1 \leqslant s \leqslant n-1).$$

Кроме того, при $x \to 0$ $|R_2'(x)| \to \infty$, поэтому справедливо также неравенство

$$|P_n'(x)| < |R_2'(x)|, \quad 0 < x < \varepsilon,$$

где ε — достаточно малое число. Так как

$$R_2'(x)\,R_2'(\xi_1) < 0, \quad 0 < x < \varepsilon,$$

то $F_2'(x, \alpha)$ имеет на $[0, \infty] \geqslant n-1$ простых нулей, следовательно, все нули $F_2^{(k)}(x, \alpha)$ $(k = 1, \ldots, n)$, лежащие на $[0, \infty]$, будут простыми. Тем самым лемма доказана.

Установленные нами неравенства (27) и (29) имеют место лишь на интервале $(-1, +1)$, а правые части их неограниченно возрастают при $x \to \pm 1$. В заметке ([7]) мною дано уточнение этих неравенств в окрестности концов отрезка и указана оценка производных на действительной оси вне интервала $(-1, +1)$. Аналогично уточнена и дополнена теорема 6.

§ 6. Добавление. Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 6 при помощи теорем 4 и 5, которые будем применять на отрезках растущей длины. Идея этого доказательства была мне указана С. Н. Бернштейном.

ЛЕММА. *Из бесконечной последовательности многочленов* $\{Q_{n,s}(x)\}$ *данной степени* n, *равномерно ограниченной на отрезке* $[a, b]$, *т. е. удовлетворяющей условиям*

$$|Q_{n,s}(x)| \leqslant L, \quad a \leqslant x \leqslant b \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{43}$$

можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{Q_{n,s'}\}$. *Предельная функция есть многочлен степени* $\leqslant n$.

Действительно, полагая

$$Q_{n,s}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,s} x^k,$$

вследствие теоремы В. А. Маркова ([6]), имеем

$$|a_{k,s}| \leqslant L_k \quad (0 \leqslant k \leqslant n), \tag{44}$$

где L_k не зависит от s. Следовательно, можно выделить сходящуюся последовательность коэффициентов $\{a_{0,s'}, a_{1,s'}, \ldots, a_{n,s'}\}$, что и доказывает лемму.

Пусть $G_{2n}(x)$ — положительный на $[0, \infty]$ многочлен степени $2n$. По теореме 1, примененной на отрезке $[0, t]$, $t > 0$, этот многочлен может быть представлен в виде

$$G_{2n}(x) = M_{n,t}^2(x) + \left(1 - \frac{x}{t}\right) x N_{n-1,t}^2(x),$$

где $M_{n,t}(x)$ и $N_{n-1,t}(x)$ — многочлены степени n и $n-1$, причем все нули этих многочленов лежат на $[0, t]$ и взаимно разделены. Если предположим теперь, что t изменяется от некоторого $t_1 > 0$ до ∞, то получим две бесконечные последовательности многочленов $\{M_{n,t}(x)\}$ и $\{N_{n-1,t}(x)\}$. На данном конечном отрезке $[0, b]$, $0 < b < t_1$, обе последовательности многочленов равномерно ограничены:

$$|M_{n,t}(x)| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant b} \sqrt{G_{2n}(x)}, \quad |N_{n-1,t}(x)| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant b} \sqrt{G_{2n}(x)}.$$

Пусть $\{M_{n,t'}(x)\}$ и $\{N_{n,t'}(x)\}$ — сходящиеся подпоследовательности и пусть

$$\lim_{t' \to \infty} M_{n,t'}(x) = A_n(x), \quad \lim_{t' \to \infty} N_{n-1,t'}(x) = B_{n-1}(x).$$

Тогда, очевидно, имеет место равенство

$$G_{2n}(x) = A_n^2(x) + x B_{n-1}^2(x), \tag{45}$$

из которого следует, что $A_n(x)$ степени n. Нули $A_n(x)$ и $\sqrt{x} B_{n-1}(x)$ лежат на $[0, \infty]$ и взаимно разделены *, так как, с одной стороны, нули многочлена являются непрерывными функциями от его коэффициентов, а с другой — нули $M_{n,t'}(x)$ и $\sqrt{\left(1 - \frac{x}{t}\right) x}\, N_{n-1,t'}(x)$ лежат на $[0, \infty]$ и взаимно разделены (совпадение нуля $A_n(x)$ и $B_{n-1}(x)$ исключено, так как $G_{2n}(x) > 0$ при $x \geqslant 0$). По теореме 2, мы знаем, что такие многочлены $A_n(x)$ и $B_{n-1}(x)$ определены однозначно.

Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, удовлетворяющий неравенству

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{G_{2n}(x)}, \quad 0 \leqslant x < \infty;$$

---

* Мы, таким образом, доказали заново теорему 2; правда, здесь еще не установлена единственность представления $G_{2n}(x)$ в виде (45), но этот пробел легко восполнить при помощи теоремы 4 моей заметки ([7]).

тогда, по теореме 4,

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \left| \left\{ M_{n,t'}(x) + i \sqrt{\left(1 - \frac{x}{t'}\right) x}\, N_{n-1,t'}(x) \right\}^{(k)} \right|,$$
$$0 \leqslant x \leqslant t' \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Устремляя t' к бесконечности, получаем неравенства

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant |\{A_n(x) + i \sqrt{x} B_{n-1}(x)\}^{(k)}|, \quad 0 \leqslant x < \infty \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

которые и составляют утверждение теоремы 6 для случая, когда $G_{2n}(x)$ — многочлен четной степени. Для случая нечетной степени результат получается аналогично при помощи теоремы 5.

Поступило
25. IX. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Sur la limitation des dérivées des polynomes, C. R., t. 190 (1930), 338—341.

[2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, т. 13 (1912), 49—194.

[3] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, М. — Л., 1937.

[4] Schaeffer A. C. and Duffin R. J., On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff for derivatives of polynomials, Bull. Am. Math. Soc., v. 44, № 4 (1938), 289—297.

[5] Виденский В. С., О неравенствах относительно производных многочлена, Доклады Ак. Наук СССР, т. 67, № 5 (1949), 777—780.

[6] Марков В. А., О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном отрезке. СПб., 1892.

[7] Виденский В. С., Об оценках производных многочлена, Доклады Ак. Наук СССР, т. 73, № 2 (1950), 257—259.

[8] Бернштейн С. Н., Sur une classe de polynomes orthogonaux, Сообщ. Харьк. матем. об—ва, сер. 4 (1930), 79—92.

[9] Чебышев П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций, Полн. собр. соч., т. II, М.—Л., 1947.

[10] Бернштейн С. Н., Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleur approximation des fonctions analytiques d'une variable réele, Paris, 1926.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 421–438

Г. С. ЧОГОШВИЛИ

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИЙ ГОМОЛОГИИ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Доказывается (§ 2) изоморфизм функциональных групп гомологии пространства в смысле Колмогорова (7) и Александера (1) со спектральными группами гомологии в смысле Александрова (3) и Чеха (4). С этой целью в § 1 строится спектральная теория гомологий пространств, основанная на разбиениях.

§ 1. О группах гомологии, основанных на разбиениях пространства

1.1. Наряду со спектральной теорией гомологии, основанной на покрытиях (замкнутых или открытых), может быть также построена спектральная теория, основанная на разбиениях пространства. Спектры, порожденные разбиениями, обладают тем же преимуществом, что и спектры, основанные на покрытиях Куроша (8), а именно, в них симплициальные отображения нервов определимы лишь единственным способом, что влечет транзитивность проекций цепей. Вместе с тем, эти спектры удобны и просты в том отношении, что элементами разбиения могут быть произвольные множества, а не только те, которые обладают какими-либо специальными свойствами. В случае компактного метрического пространства группы гомологии, основанные на разбиениях (именно, на счетной, упорядоченной системе, т. е. последовательности разбиений), рассматриваются А. Н. Колмогоровым в третьей из серии заметок (7).

Разбиением хаусдорфова пространства R мы будем называть систему D_α конечного числа подмножеств e_i^α, $i = 1, 2, \ldots, s_\alpha$, пространства R, попарно не пересекающихся, $e_i^\alpha \cap e_j^\alpha = 0$, $i \neq j$, и в сумме дающих все пространство:

$$R = \bigcup_{i=1}^{s_\alpha} e_i^\alpha.$$

Будем говорить, что разбиение D_β *вписано* в разбиение D_α, и обозначать это через $D_\alpha < D_\beta$, если каждый элемент e_j^β из D_β есть подмножество некоторого элемента e_i^α из D_α. Этим множество $\{D_\alpha\}$ всех разбиений R превращается в *неограниченную, частично упорядоченную систему*.

Нервом N_α разбиения D_α назовем комплекс, вершинами которого являются элементы D_α, причем вершины $e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha$ образуют симплекс тогда и только тогда, когда

$$\bar{e}_{i_0}^\alpha \cap \ldots \cap \bar{e}_{i_r}^\alpha \neq 0.$$

Вершина e_i^α нерва N_α разбиения D_α имеет, по определению, порядок особенности s, если s есть наименьшее целое положительное число, обладающее следующим свойством: в N_α существует такая последовательность вершин

$$e_i^\alpha = e_{i_s}^{\alpha},\ e_{i_{s-1}}^{\alpha}, \ldots, e_{i_1}^{\alpha},$$

что $e_{i_1}^\alpha$ не бикомпактно в R * и

$$\bar{e}_{i_p}^{\alpha} \cap \bar{e}_{i_{p-1}}^{\alpha} \neq 0, \quad p = s, \ldots, 2.$$

Совокупность всех вершин нерва N_α, порядок особенности которых $\leqslant s$, порождает подкомплекс C_α^s нерва N_α, называемый ниже *подкомплексом порядка особенности* s. Целесообразно также пустой подкомплекс называть *подкомплексом нулевого порядка особенности* ($s = 0$), а весь нерв покрытия — *подкомплексом бесконечного порядка особенности.*

Пусть

$$L_\alpha^r = L^r(N_\alpha, \Theta)$$

есть группа всех r-мерных цепей нерва N_α по бикомпактной группе коэффициентов Θ,

$$Z_{\alpha s}^r = Z^r(N_\alpha \bmod C_\alpha^s, \Theta)$$

есть группа всех r-мерных циклов нерва N_α по модулю C_α^s, а

$$H_{\alpha s}^r = H^r(N_\alpha \bmod C_\alpha^s, \Theta)$$

есть группа всех r-мерных циклов, гомологичных нулю на N_α по модулю C_α^s; пусть, наконец,

$$\Delta_{\alpha s}^r = \Delta^r(N_\alpha \bmod C_\alpha^s, \Theta)$$

обозначает r-мерную группу гомологии комплекса N_α по модулю C_α^s и по группе коэффициентов Θ.

Если $D_\alpha < D_\beta$, то, ставя в соответствие каждой вершине e_i^α из N_α ту однозначно определенную вершину e_j^β из N_β, в которой содержится e_i^α, получим симплициальное отображение σ_α^β нерва N_β в N_α. Если e_i^β имеет порядок особенности $\leqslant s$, то и $\sigma_\alpha^\beta e_i^\beta$ имеет порядок особенности $\leqslant s$, так что

$$\sigma_\alpha^\beta C_\beta^s \subset C_\alpha^s.$$

В силу этого, симплициальное отображение σ_α^β порождает, как обычно, гомоморфизм групп L_β^r, $Z_{\beta s}^r$, $H_{\beta s}^r$, $\Delta_{\beta s}^r$ соответственно в группы L_α^r, $Z_{\alpha s}^r$, $H_{\alpha s}^r$, $\Delta_{\alpha s}^r$. Все эти гомоморфизмы мы обозначим одним символом ρ_α^β, что, очевидно, не может вызвать недоразумения.

В силу *однозначности* отображений σ_α^β, проекции ρ_α^β обладают свойством *транзитивности*

$$\rho_\alpha^\beta \rho_\beta^\gamma = \rho_\alpha^\gamma$$

---

* т. е. $\bar{e}_i^\alpha$ не бикомпактно.

не только относительно классов гомологии, но и относительно цепей. Это дает возможность ввести следующие обратные спектры бикомпактных групп:

$$\{L_\alpha^r, \rho_\alpha^\beta\}, \quad \{Z_{\alpha s}^r, \rho_\alpha^\beta\}, \quad \{H_{\alpha s}^r, \rho_\alpha^\beta\}, \quad \{\Delta_{\alpha s}^r, \rho_\alpha^\beta\}.$$

Исходя из этих спектров, можно ввести группы гомологии пространства R различных типов.

Прежде всего выделяется предельная группа обратного спектра

$$\{\Delta^r(N_\alpha \bmod C_\alpha^s, \Theta), \rho_\alpha^\beta\}.$$

Эту группу мы будем обозначать через $\Delta_{Ds}^r(R, \Theta)$ и называть группой гомологии пространства R, основанной на разбиениях и порядка особенности s. Нижний значок D здесь, так же как и везде в дальнейшем, указывает на то, что рассматриваемая группа гомологии основана на нервах разбиений пространств; значок s указывает, что гомологии на нервах берутся по модулю подкомплексов порядка особенности s.

Обозначим через $Z_P^r(R, \Theta)$ множество всех систем $\{z_\alpha^r\}$, получающихся таким выбором по одному циклу z_α^r из каждой группы $Z_{\alpha s}^r$ спектра $\{Z_{\alpha s}^r, \rho_\alpha^\beta\}$, чтобы

$$z_\alpha^r - \rho_\alpha^\beta z_\beta^r \in H_{\alpha s}^r.$$

Определяя групповую операцию и топологию в этом множестве аналогично тому, как это обычно делается для элементов предельной группы обратного спектра бикомпактных групп [см., например, ([10])], мы видим, что $Z_P^r(R, \Theta)$ есть бикомпактная группа. Подмножество всех тех элементов $\{z_\alpha^r\}$ этой группы, для которых $z_\alpha^r \in H_{\alpha s}^r$ для каждого α, образует подгруппу $H_P^r(R, \Theta)$.

Группу гомологии пространства R, являющуюся фактор-группой

$$Z_P^r(R, \Theta) - H_P^r(R, \Theta),$$

обозначим через $\Delta_{DPs}^r(R, \Theta)$.

Так же как в теории гомологии, основанной на покрытиях [см. ([10])], доказывается изоморфизм *

$$\Delta_{Ds}^r(R, \Theta) \approx \Delta_{DPs}^r(R, \Theta).$$

Пусть $L^r(R, \Theta)$ есть предельная группа обратного спектра $\{L_\alpha^r, \rho_\alpha^\beta\}$, т. е. бикомпактная группа всех систем $\{f_\alpha^r\}$, составленных таким выбором по одной цепи f_α^r из каждой группы L_α^r, что $f_\alpha^r = \rho_\alpha^\beta f_\beta^r$; пусть, далее, $Z^r(R, \Theta)$ есть предельная группа спектра $\{Z_{\alpha s}^r, \rho_\alpha^\beta\}$, а $H^r(R, \Theta)$ — предельная группа спектра $\{H_{\alpha s}^r, \rho_\alpha^\beta\}$.

Обозначим через $H_T{}^r(R, \Theta)$ подгруппу группы $Z^r(R, \Theta)$, состоящую из всех таких элементов $\{z_\alpha^r\} \in Z^r(R, \Theta)$, для которых существуют элементы $\{f_\alpha^{r+1}\} \in L^{r+1}(R, \Theta)$, удовлетворяющие условию: $z_\alpha^r = \Delta f_\alpha^{r+1}$ на N_α по модулю C_α^s для каждого α.

* Символом $\approx$ обозначается изоморфизм (непрерывный в случае топологических групп).

Группу гомологии пространства R, являющуюся фактор-группой

$$Z^r(R, \Theta) - H_T{}^r(R, \Theta),$$

обозначим через $\Delta^r_{DTs}(R, \Theta)$.

Основное значение при доказательстве интересующей нас теоремы об эквивалентности спектральной и функциональной теорий гомологии имеет следующая

ТЕОРЕМА (1.1 : 1).

$$\Delta^r_{DPs}(R, \Theta) \approx \Delta^r_{DTs}(R, \Theta).$$

Доказательство см. в моей заметке (5) или в книге С. Лефшеца (9). При доказательстве, конечно, не существенно, какие группы рассматриваются, — группы, основанные на разбиениях, или группы, основанные на покрытиях Куроша. Для случая, когда R — метрическое компактное пространство, теорема была доказана П. С. Александровым (2).

Группу гомологии пространства R, являющуюся фактор-группой

$$Z^r(R, \Theta) - H^r(R, \Theta),$$

обозначим через $\Delta^r_{DQs}(R, \Theta)$.

В доказательстве предыдущей теоремы содержится доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА (1.1 : 2).

$$\Delta^r_{DTs}(R, \Theta) \approx \Delta^r_{DQs}(R, \Theta).$$

В дальнейшем понадобятся еще группы гомологии, определенные следующим образом.

Пусть $L_{(s)}{}^r(R, \Theta)$ есть группа всех систем $\{f_\alpha{}^r\}$, составленных таким выбором по одной цепи $f_\alpha{}^r$ из каждой группы $L_\alpha{}^r$, что $f_\alpha{}^r = \rho_\alpha{}^\beta f_\beta{}^r$ на $N_\alpha - C_\alpha{}^s$. Топологизируем эту группу обычным образом. Выделим подгруппу $Z^r_{(s)}(R, \Theta)$, состоящую из всех $\{f_\alpha{}^r\}$, для которых $f_\alpha{}^r \in Z^r_{\alpha s}$. В группе $Z_{(s)}{}^r(R, \Theta)$ содержится подгруппа $H_{(s)}{}^r(R, \Theta)$ всех таких $\{f_\alpha{}^r\}$, для которых существует

$$\{f_\alpha^{r+1}\} \in L^{r+1}_{(s)}(R, \Theta),$$

удовлетворяющий условию: $f_\alpha{}^r \sim \Delta f_\alpha^{r+1}$ на N_α по модулю $C_\alpha{}^s$ для каждого α; в этом случае будем писать:

$$\{f_\alpha{}^r\} = \Delta\{f_\alpha^{r+1}\}.$$

Группу гомологии пространства R, представляющую собой фактор-группу

$$Z_{(s)}{}^r(R, \Theta) - H_{(s)}{}^r(R, \Theta),$$

обозначим через $\Delta_{(s)}{}^r(R, \Theta)$.

Замечая, что если $f_\alpha{}^r$ и $f_\beta{}^r$ — два элемента из $\{f_\alpha{}^r\} \in Z_{(s)}{}^r(R, \Theta)$, то $f_\alpha{}^r \sim \rho_\alpha{}^\beta f_\beta{}^r$ на N_α по модулю $C_\alpha{}^s$ и, пользуясь теоремой (1·1 : 1), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА (1.1:3).

$$\Delta_{DPs}{}^r(R, \Theta) \approx \Delta_{(s)}{}^r(R, \Theta).$$

Два элемента $\{f_\alpha{}^r\}$ и $\{\varphi_\alpha{}^r\}$ группы $L_{(s)}{}^r(R, \Theta)$ назовем *эквивалентными*, если $f_\alpha{}^r = \varphi_\alpha{}^r$ на $N_\alpha - C_\alpha{}^s$ при каждом α.

Пусть $[\{f_\alpha{}^r\}]$ есть класс эквивалентных друг другу элементов, содержащий $\{f_\alpha{}^r\}$, а $L_{[s]}{}^r(R, \Theta)$ есть бикомпактная группа всех таких классов.

Обозначим через $Z_{[s]}{}^r(R, \Theta)$ подгруппу группы $L_{[s]}{}^r(R, \Theta)$, состоящую из всех классов $[\{f_\alpha{}^r\}]$, представители $\{f_\alpha{}^r\}$ которых содержатся в $Z_{(s)}{}^r(R, \Theta)$. Через $H_{[s]}{}^r(R, \Theta)$ обозначим подгруппу, состоящую из всех классов $[\{f_\alpha{}^r\}]$, для которых $\{f_\alpha{}^r\} \in H_{(s)}{}^r(R, \Theta)$. Ясно, что если эти условия выполняются для одного представителя класса, то они выполняются и для всех других. Поэтому при

$$\{f_\alpha{}^r\} = \Delta\{f_\alpha^{r+1}\}$$

можем писать

$$[\{f_\alpha{}^r\}] = \Delta[\{f_\alpha{}^{r+1}\}].$$

Группу гомологии пространства R, определенную как фактор-группа

$$Z_{[s]}{}^r(R, \Theta) - H_{[s]}{}^r(R, \Theta),$$

обозначим через $\Delta_{[s]}{}^r(R, \Theta)$.

Отображая каждый элемент

$$\{f_\alpha{}^r\} \in L_{(s)}{}^r(R, \Theta)$$

на тот класс

$$[\{f_\alpha{}^r\}] \in L_{[s]}{}^r(R, \Theta),$$

в котором он содержится, находим, что имеет место

ТЕОРЕМА (1.1:4).

$$\Delta_{(s)}{}^r(R, \Theta) \approx \Delta_{[s]}{}^r(R, \Theta).$$

1.2. Группы гомологии различных порядков особенности имеют лишь вспомогательное значение и для хаусдорфовых локально-бикомпактных пространств они совпадают между собой, как это показывает следующая

ТЕОРЕМА (1.2:1).

$$\Delta_{Ds}{}^r(R, \Theta) \approx \Delta_{Dt}{}^r(R, \Theta)$$

при всех $s, t \geqslant 1$.

Если $t < s$, то $C_\alpha{}^t$ является подкомплексом $C_\alpha{}^s$ и, ставя в соответствие элементу $d_{\alpha t}$ из $\Delta_{\alpha t}$, содержащему цикл $z_{\alpha t}$, элемент $d_{\alpha s}$ из $\Delta_{\alpha s}$, содержащий тот же $z_{\alpha t}$, получим гомоморфизм T_α группы $\Delta_{\alpha t}$ в $\Delta_{\alpha s}$. Если $d_{\alpha t}$ при всевозможных α составляют элемент $d_t = \{d_{\alpha t}\}$ группы Δ_{Dt}, то и $T_\alpha d_{\alpha t} = d_{\alpha s}$ составят элемент $d_s = \{d_{\alpha s}\}$ группы $\Delta_{Ds}{}^r$, ибо $\rho_\alpha{}^\beta d_{\beta s}$ и $d_{\alpha s}$ содержат один и тот же цикл $z_{\alpha t}$ и, следовательно, $\rho_\alpha{}^\beta d_{\beta s} = d_{\alpha s}$. Очевидно, что отображение $Td_t = d_s$ есть гомоморфизм группы $\Delta_{Dt}^r(R, \Theta)$ в $\Delta_{Ds}^r(R, \Theta)$.

Для каждого D_α существует такое $D_\beta > D_\alpha$, что $\sigma_\alpha{}^\beta C_\beta{}^s \subset C_\alpha{}^1$ при данном $s \geqslant 2$. В самом деле, возьмем сумму B всех бикомпактных в R множеств из D_α. Берем такие окрестности U_i, $i = 1, \ldots, s-1$, множества $\bar{B}$, что

$$U_i \subset U_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, s-1.$$

Каждое бикомпактное в R множество e_α из D_α разбиваем на подмножества:

$$e_{\beta_i} = (e_\alpha \cap U_{i-1}) \setminus (e_\alpha \cap U_i),$$

где $i = 1, \ldots, s$, причем принято, что $U_0 = R$ и $U_s = 0$. Искомое разбиение D_β состоит из всех этих множеств e_{β_i}, а также из бикомпактных в R множеств разбиения D_α.

Пусть $t = 1$. Возьмем отличную от нуля координату $d_{1\alpha}$ элемента $d_1 \neq 0$, и пусть D_β — такое подразбиение D_α, что $\sigma_\alpha{}^\beta C_\beta{}^s \subset C_\alpha{}^1$. Цикл $z_{1\beta}$ из $d_{1\beta}$ не гомологичен нулю на N_β не только по модулю $C_\beta{}^1$, но и по модулю $C_\beta{}^s$, ибо в противном случае одновременно имели бы:

$$\rho_\alpha{}^\beta z_{1\beta} \sim 0 \text{ на } N_\alpha \mod C_\alpha{}^1$$

и

$$\rho_\alpha{}^\beta z_{1\beta} \in \rho_\alpha{}^\beta d_{1\beta} = d_{1\alpha} \neq 0.$$

Поэтому класс гомологии $d_{\beta s}$ цикла $z_{1\beta}$ на $N_\beta \mod C_\beta{}^s$ не является нулевым классом. Так как, кроме того, $d_{\beta s}$ является β-координатой элемента $Td_1 = d_s$, то $d_s \neq 0$.

Наконец, для любого $d_s = \{d_{s\alpha}\} \in \Delta_{D_s}{}^r$ существует такое $d_1 = \{d_{1\alpha}\} \in \Delta_{D1}{}^r$, что $Td_1 = d_s$. Возьмем произвольное D_α и такое $D_\beta > D_\alpha$, что $\rho^\beta{}_\alpha C_\beta{}^s \subset C_\alpha{}^1$.

Если $z_{s\beta} \in d_{s\beta}$, то $\rho_\alpha{}^\beta z_{s\beta}$ есть цикл на $N_\alpha \mod C_\alpha{}^1$. Пусть класс гомологии цикла $\rho_\alpha{}^\beta z_{s\beta}$ на $N_\alpha \mod C_\alpha{}^1$ есть $d_{1\alpha}$. Так как

$$\rho_\alpha{}^\beta z_{s\beta} \in \rho_\alpha{}^\beta d_{s\beta} = d_{s\alpha},$$

то

$$T_\alpha d_{1\alpha} = d_{s\alpha}.$$

Элемент $d_{1\alpha}$ не зависит от выбора D_β: если $D_{\beta'}$ — другое такое подразбиение D_α, что $\rho_\alpha{}^{\beta'} C_{\beta'}{}^s \subset C_\alpha{}^1$, и если $D_\gamma > D_\beta, D_{\beta'}$, то, беря из $d_{s\beta}$ цикл $\rho_{\beta'}{}^\gamma z_{s\gamma}$, $z_{s\gamma} \in d_{s\gamma}$, имеем, в силу $\rho_\beta{}^\gamma z_{s\gamma} \in d_{s\beta}$,

$$\rho_\alpha{}^{\beta'} \rho_{\beta'}{}^\gamma z_{s\gamma} = \rho_\alpha{}^\gamma z_{s\gamma} = \rho_\alpha{}^\beta \rho_\beta{}^\gamma z_{s\gamma} \in d_{1\alpha}.$$

Подобранные таким образом классы $d_{1\alpha}$ образуют элемент $d_1 = \{d_{1\alpha}\}$ группы $\Delta_{D1}{}^r$, ибо при $D_\beta > D_{\alpha'} > D_\alpha$, $\sigma_{\alpha'}^\beta C_\beta{}^s \subset C_{\alpha'}^1$, классы $d_{1\alpha}$ и $d_{1\alpha'}$ содержат соответственно циклы $\rho_\alpha{}^\gamma z_{s\gamma}$ и $\rho_{\alpha'}{}^\gamma z_{s\gamma}$, $z_{s\gamma} \in d_{s\gamma}$, а так как

$$\rho_\alpha{}^\gamma z_{s\gamma} = \rho_\alpha{}^{\alpha'} \rho_{\alpha'}{}^\gamma z_{s\gamma},$$

то

$$d_{1\alpha} = \rho_{\alpha}{}^{\alpha'} d_{1\alpha'}.$$

Ясно, что $Td_1 = d_s$ и, таким образом, T является изоморфизмом групп $\Delta_{Ds}{}^r$ и $\Delta_{D1}{}^r$.

1.3. Группы гомологии, основанные на разбиениях, совпадают с группами гомологии, основанными на замкнутых покрытиях.

Чтобы показать это, рассмотрим систему $\{F_\xi\}$ всех замкнутых покрытий F_ξ хаусдорфова пространства R и систему $\{K_\xi\}$ их нервов. Понятия порядка особенности какого-либо элемента покрытия F_ξ и подкомплекса $E_\xi{}^s$ порядка особенности s, $s = 0, 1, \ldots, \infty$, нерва K_ξ определяются совершенно так же, как и выше в случае разбиений (теперь, в силу замкнутости элементов F_ξ, вместо их бикомпактности в R мы можем говорить просто об их бикомпактности).

Если F_η вписано в F_ξ, то, ставя в соответствие вершине e^η из K_η содержащую ее вершину e^ξ, $e^\eta \subset e^\xi$, из K_ξ, получим симплициальное отображение K_η в K_ξ. Его мы обозначим через $\tau_\xi{}^\eta$, а гомоморфизм группы гомологии

$$\Delta_{\eta s}{}^r = \Delta^r (K_\eta \operatorname{mod} E_\eta{}^s, \Theta)$$

в $\Delta_{\xi s}{}^r$, порожденное отображением $\tau_\xi{}^\eta$, обозначим через $\pi_\xi{}^\eta$.

Предельную группу обратного спектра $\{\Delta_{\xi s}{}^r, \pi_\xi{}^\eta\}$ обозначим через $\Delta_{Fs}{}^r (R, \Theta)$ и назовем *группой гомологии пространства R, основанной на замкнутых покрытиях и порядка особенности s.*

Понятие группы $\Delta_{F1}{}^r (R, \Theta)$, основанной на покрытиях и порядка особенности 1, введено П. С. Александровым [см. ([5])]. Ниже эти группы будут называться группами гомологии в смысле Александрова и обозначаться также через $\Delta_{FA}^r (R, \Theta)$.

Группы $\Delta_{F0}^r (R, \Theta)$ (т. е. предельные группы спектра $\{\Delta^r (K_\xi, \Theta), \pi_\xi^\eta\}$) будут называться группами гомологии в смысле Чеха [см. ([4])] и обозначаться еще через $\Delta_{FC}^r (R, \Theta)$. Аналогичные названия и обозначения примем и для соответствующих групп, основанных на разбиениях (см. выше n° 1.1):

$$\Delta_{DA}^r (R, \Theta) = \Delta_{D1}^r (R, \Theta), \quad \Delta_{DC}^r (R, \Theta) = \Delta_{D0}^r (R, \Theta).$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА (1:3:1).

$$\Delta_{Ds}^r (R, \Theta) \approx \Delta_{Fs}^r (R, \Theta).$$

Возьмем произвольный элемент $f = \{f_\xi\}$ группы $\Delta_{Fs}^r (R, \Theta)$, где

$$f_\xi \in \Delta^r (K_\xi \operatorname{mod} E_\xi^s, \Theta), \quad f_\xi = \pi_\xi^\eta f_\eta.$$

Каково бы ни было разбиение D_α пространства R, система $\overline{D}_\alpha$ замыканий его элементов образует некоторое замкнутое покрытие F_ξ пространства R. Нерв K_ξ покрытия F_ξ и нерв N_α разбиения D_α изоморфны, причем подкомплексы $E_\xi{}^s$ и $C_\alpha{}^s$ соответствуют друг другу. Отождествляя K_ξ и N_α, мы видим, что класс гомологии f_ξ нерва K_ξ по модулю $E_\xi{}^s$ совпадает с определенным классом гомологии d_α нерва N_α по модулю C_α^s. Таким образом, исходя из f, мы в каждой группе

$$\Delta_{\alpha s}{}^r = \Delta^r (N_\alpha \operatorname{mod} C_\alpha{}^s, \Theta)$$

определяем по одному элементу d_α. Эти d_α образуют элемент $d = \{d_\alpha\}$ группы $\Delta^r_{Ds}(R, \Theta)$. В самом деле, d_β представляет собой координату f_η элемента f, принадлежащую группе

$$\Delta_{\eta s}^{\ r} = \Delta^r(K_\eta \bmod E^s_\eta,\ \Theta),$$

где K_η — нерв покрытия $F_\eta = \bar{D}_\beta$. Поэтому, независимо от того, совпадают или нет симплициальные отображения τ_ξ^η и η_α^β комплекса $K_\eta = N_\beta$ в комплекс $K_\xi = N_\alpha$, гомоморфизмы π_ξ^η и ρ_α^β группы $\Delta_\eta^r = \Delta_\beta^r$ в группу $\Delta_\xi^r = \Delta_\alpha^r$ удовлетворяют равенству:

$$\pi_\xi^\eta f_\eta = \rho_\alpha^\beta d_\beta.$$

Но $\pi_\xi^\eta f_\eta = f_\xi$, а $f_\xi = d_\alpha$; следовательно, $\rho_\alpha^\beta d_\beta = d_\alpha$. Ставя в соответствие элементу f элемент d, получим непрерывный гомоморфизм S группы $\Delta^r_{Fs}(R, \Theta)$ в группу $\Delta^r_{Ds}(R, \Theta)$. Покажем, что S есть изоморфизм. Пусть f — ненулевой элемент из $\Delta^r_{Fs}(R, \Theta)$, а $f_\xi \in \Delta_{\xi s}^{\ r}$ — его отличная от нуля координата. Возьмем какое-либо разбиение D_β пространства R, замыкание элементов которого образует замкнутое покрытие $F_\eta = \bar{D}_\beta$, вписанное в F_ξ (таким будет, например, разбиение на множества

$$\Phi_1,\ \Phi_2 \setminus \Phi_1, \ldots,\ \Phi_p \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} \Phi_i,$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ суть элементы покрытия F_ξ). Координата f_η элемента f, принадлежащая Δ_η, не является нулевой, ибо $\pi_\xi^\eta f_\eta = f_\xi$. Следовательно, отличен от нуля и элемент d_β группы $\Delta_{\beta s}$, совпадающий с f_η при отождествлении K_η с N_β. Но d_β является координатой образа $Sf = d$ элемента f. Поэтому отличен от нуля сам элемент d группы $\Delta^r_{Ds}(R, \Theta)$.

Наконец, покажем, что S осуществляет отображение на всю группу $\Delta^r_{Ds}(R, \Theta)$. Возьмем любой элемент d этой группы. Пусть F_ξ — некоторое покрытие R, D_β — такое разбиение, что $D_\beta = F_\eta$ вписано в F_ξ, а d_β — координата элемента d, принадлежащая $\Delta_{\beta s}^{\ r}$. Обозначим через f_η элемент группы $\Delta_{\eta s}^{\ r}$, совпадающий с d_β при отождествлении K_η с N_β, и рассмотрим элемент $f_\xi = \pi_\xi^\eta f_\eta$ группы $\Delta_{\xi s}$. Другое разбиение $D_{\beta'}$ с $\bar{D}_{\beta'} = F_{\eta'} > F_\xi$ привело бы нас к тому же f_ξ. В самом деле, возьмем $D_\gamma > D_\beta, D_{\beta'}$. Пусть $d_{\beta'}$ и d_γ — координаты элемента d, принадлежащие к $\Delta^r_{\beta' s}$ и $\Delta^r_{\gamma s}$, а $f_{\eta'}$ и f_ζ — совпадающие с ними элементы из $\Delta^r_{\eta' s}$ и $\Delta^r_{\zeta s}$. Каковы бы ни были симплициальные отображения σ_β^γ и σ_η^ζ комплекса $N_\gamma = K_\zeta$ в $N_\beta = K_\eta$, для порожденных ими гомоморфизмом ρ_β^γ и π_η^ζ группы $\Delta_{\gamma s}^{\ r} = \Delta_{\zeta s}^{\ r}$ в $\Delta_{\beta s}^{\ r} = \Delta_{\eta s}^{\ r}$ имеем:

$$\pi_\eta^\zeta f_\zeta = \rho_\beta^\gamma d_\gamma = d_\beta = f_\eta.$$

Точно так же

$$\pi_{\eta'}^\zeta f_\zeta = \rho_{\beta'}^\gamma d_\gamma = d_{\beta'} = f_{\eta'}.$$

В силу этого,

$$\pi_\xi^\zeta f_\zeta = \pi_\xi^\eta \pi_\eta^\zeta f_\zeta = \pi_\xi^\eta f_\eta$$

и, аналогично,

$$\pi_\xi^\zeta f_\zeta = \pi_\xi^{\eta'} \pi_{\eta'}^\zeta f_\zeta = \pi_\xi^{\eta'} f_{\eta'}.$$

Следовательно,

$$\pi_\xi^{\eta'} f_{\eta'} = \pi_\xi^\eta f_\eta = f_\xi,$$

что и утверждали.

Система всех f_ξ образует элемент $f = \{f_\xi\}$ группы $\Delta^r_{Fs}(R, \Theta)$. Чтобы это показать для данных F_ξ, F_η, $F_\xi < F$, возьмем D_γ с $\overline{D}_\gamma = F_\zeta > F_\eta$. По определению, f_ζ совпадает с d_γ, а $f_\eta = \pi_\eta^\zeta f_\zeta$ и $f_\xi = \pi_\xi^\zeta f_\zeta$. Но

$$\pi_\xi^\zeta f_\zeta = \pi_\xi^\eta \pi_\eta^\zeta f_\zeta = \pi_\xi^\eta f_\eta$$

и, следовательно, $\pi_\xi^\eta f_\eta = f_\xi$. Для построенного элемента f имеем $Sf = d$, чем и завершается доказательство теоремы (1.3 : 1).

§ 2. Изоморфизм функциональных и спектральных групп гомологий

2.1. Функциональными группами гомологий пространства мы будем называть группы, введенные Колмогоровым (7) и Александером (1). Изоморфизм групп Колмогорова и Александера доказан М. Кляйном (6). Нашей целью является доказательство изоморфизма функциональных групп со спектральными. При этом мы будем исходить из функциональных Δ-групп гомологии в смысле Колмогорова. Эти группы определяются следующим образом [см. (7)].

Каждой упорядоченной системе $r+1$ подмножеств $e_0, \ldots, e_r$ хаусдорфова локально-бикомпактного пространства R, бикомпактных в R, ставится в соответствие однозначно определенный элемент $f^r(e_0, \ldots, e_r)$ бикомпактной группы Θ. При этом требуется, чтобы функция f^r удовлетворяла следующим условиям:

(K1) f^r остается без изменения при четной перестановке аргументов и меняет знак при нечетной их перестановке; $f^r = 0$, если два аргумента совпадают (кососимметричность);

(K2) если $e_i = e_i' \cup e_i''$, причем $e_i' \cap e_i'' = 0$, то

$$f^r(e_0, \ldots, e_i, \ldots, e_r) = f^r(e_0, \ldots, e_i', \ldots, e_r) + f^r(e_0, \ldots, e_i'', \ldots, e_r)$$

(аддитивность);

(K3) если $\overline{e}_0 \cap \ldots \cap \overline{e}_r = 0$, то $f^r(e_0, \ldots, e_r) = 0$.

Суммою $f_1^r + f_2^r$ двух функций f_1^r и f_2^r называем функцию, определенную равенством

$$(f_1^r + f_2^r)(e_0, \ldots, e_r) = f_1^r(e_0, \ldots, e_r) + f_2^r(e_0, \ldots, e_r).$$

Ясно, что совокупность всех r-мерных (т. е. определенных на системах из $r+1$ множеств) функций f^r представляет собой абелеву группу, которую мы обозначаем через $F_K^r(R, \Theta)$. Для топологизации группы $F_K^r(R, \Theta)$ каждой подсистеме $(e_{i_0}, \ldots, e_{i_r})$ данной системы множеств $(e_1, \ldots, e_s)$ ставится в соответствие некоторая окрестность $U_{i_0 \ldots i_r}$ элемента $f^r(e_{i_0}, \ldots, e_{i_r})$; окрестностью U элемента f^r, соответствующей системе $(e_1, \ldots, e_s)$, называется совокупность всех таких функций $\varphi^r \in F_K^r(R, \Theta)$, что для каждой подсистемы $(e_{i_0}, \ldots, e_{i_r})$ имеем:

$$\varphi^r(e_{i_0}, \ldots, e_{i_r}) \in U_{i_0 \ldots i_r}.$$

Тогда $F_K^r(R, \Theta)$ оказывается бикомпактной группой.

Каждой функции f^r из $F^r_K(R, \Theta)$ приводим в соответствие некоторую $(r-1)$-мерную функцию Δf^r, называемую Δ-границей f^r и определенную так:

$$\Delta f^r(e_0, \ldots, e_{r-1}) = f^r(G, e_0, \ldots, e_{r-1}),$$

где G есть произвольное открытое, бикомпактное в R множество, содержащее $\overline{e_0} \cup \ldots \cup \overline{e_{r-1}}$. Ясно, что Δf^r не зависит от специального выбора G.

Циклами называются те функции, границы которых тождественно равны нулю группы Θ. Их совокупность образует группу $Z^r_K(R, \Theta)$. Цикл f^r называется гомологичным нулю или ограничивающим, $f^r \sim 0$, если существует такая функция f^{r+1}, что $\Delta f^{r+1} = f^r$. Множество всех ограничивающих циклов дает группу $H^r_K(R, \Theta)$. Фактор-группа

$$Z^r_K(R, \Theta) - H^r_K(R, \Theta)$$

и есть *r-мерная функциональная (в смысле Колмогорова) Δ-группа гомологии R по Θ* [см. (7)]. Ее мы будем обозначать через $\Delta^r_K(R, \Theta)$.

Рассмотрим еще одну разновидность функциональных групп гомологии.

В (5) мною рассматривались функции, определенные на *всех* подмножествах хаусдорфова пространства R, а не только на *бикомпактных* в R множествах, как это делалось выше. Совокупность всех таких r-мерных функций (удовлетворяющих условиям (K1), (K2), (K3)) образует группу $F_M{}^r(R, \Theta)$. При определении граничного оператора Δ в $F_M{}^r(R, \Theta)$ за множество G может быть принято все R. Исходя из этого, мы обычным образом вводим группу циклов $Z_M{}^r(R, \Theta)$, группу ограничивающих циклов $H_M{}^r(R, \Theta)$ и, наконец, фактор-группу

$$\Delta_M{}^r(R, \Theta) = Z_M{}^r(R, \Theta) - H_M{}^r(R, \Theta),$$

которая и является новой функциональной Δ-группой гомологии пространства R. Ясно, что если R бикомпактно, то $\Delta_M{}^r(R, \Theta)$ совпадает с $\Delta^r_K(R, \Theta)$.

С. Лефшец (9) рассматривает функции, заданные на замкнутых подмножествах пространства R. Множество всех таких r-мерных функций дает группу $F_L{}^r(R, \Theta)$. Применение оператора Δ порождает группу циклов $Z^r_L(R, \Theta)$, группу ограничивающих циклов $H_L{}^r(R, \Theta)$ и функциональную группу гомологии

$$\Delta_L{}^r(R, \Theta) = Z_L{}^r(R, \Theta) - H_L{}^r(R, \Theta)$$

пространства R.

Отметим теперь те связи, которые существуют между указанными группами гомологии.

А. Н. Колмогоров (7) в случае, когда R — компактное метрическое пространство, наметил доказательство изоморфизма группы $\Delta^r_K(R, \Theta)$ с группой Бетти пространства R в смысле Виеториса.

В заметке (5) я дал схему доказательства изоморфизма функциональной группы $\Delta_M{}^r(R, \Theta)$ со спектральной группой гомологии в смысле Чеха хаусдорфова пространства R *.

---

* Из трех рефератов заметки (5) (G. Nöbeling, Zentralblatt für Math., 25 (1941), стр. 235; N. Steenrod, Math. Rev., 3 (1942), стр. 142; М. Ф. Бокштейн, Физ.-мат. реф. ж., т. 5 (1941), стр. 118) в двух отмечается, что доказательство упомянутого

С. Лефшец в ([9]) доказывает изоморфизм группы $\Delta_L{}^r(R, \Theta)$ со спектральной группой гомологии R в смысле Чеха.

Таким образом, группы $\Delta_M{}^r(R, \Theta)$ и $\Delta_L{}^r(R, \Theta)$, как и следовало ожидать, судя по их определениям, изоморфны:

$$\Delta_M{}^r(R, \Theta) \approx \Delta_L{}^r(R, \Theta).$$

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА (2.1:1). *Функциональная группа гомологии в смысле Колмогорова $\Delta_K^r(R, \Theta)$ хаусдорфова локально-бикомпактного пространства R изоморфна со спектральной группой гомологии в смысле Александрова $\Delta_A^r(R, \Theta)$.*

При этом, в силу результатов § 1, под $\Delta_A{}^r(R, \Theta)$ мы можем понимать как группу

$$\Delta_{D1}{}^r(R, \Theta) = \Delta_{DA}{}^r(R, \Theta),$$

основанную на разбиениях, так и группу

$$\Delta_{F1}{}^r(R, \Theta) = \Delta_{FA}{}^r(R, \Theta),$$

основанную на покрытиях, а также вообще группы

$$\Delta_{Ds}{}^r(R, \Theta), \quad \Delta_{DTs}{}^r(R, \Theta), \quad \Delta_{DPs}{}^r(R, \Theta),$$
$$\Delta_{DQs}{}^r(R, \Theta), \quad \Delta_{(s)}{}^r(R, \Theta), \quad \Delta_{[s]}{}^r(R, \Theta)$$

при любых s, $1 \leqslant s < \infty$.

Имеет место также следующая

ТЕОРЕМА (2.1:2). *Функциональная группа гомологии $\Delta_M{}^r(R, \Theta)$ хаусдорфова пространства R изоморфна со спектральной группой гомологии в смысле Чеха $\Delta_C{}^r(R, \Theta)$.*

И здесь, в силу § 1, под $\Delta_C{}^r(R, \Theta)$ можем понимать как $\Delta_{DC}{}^r(R, \Theta)$, так и $\Delta_{FC}{}^r(R, \Theta)$, $\Delta_{DP}{}^r(R, \Theta)$ и т. п.

Мы приведем лишь доказательство теоремы (2.1:1), так как совершенно тем же методом теорема (2.1:2) доказывается еще проще. Кроме того, как указывалось выше, доказательство теоремы (2.1:2) сжато было изложено нами в ([5]). Наконец, исключительное значение в теории гомологии, как известно, имеют именно группы $\Delta_K{}^r(R, \Theta)$ и $\Delta_A{}^r(R, \Theta)$: для них справедлива теорема двойственности Александера-Колмогорова ([7]), ([3]).

Мы докажем следующие теоремы, которые, очевидно, являются несколько более сильными, чем теоремы (2.1:1) и (2.1:2).

ТЕОРЕМА (2.1:3). *Группы $F_K{}^r(R, \Theta)$ и $L_{[3]}{}^r(R, \Theta)$ изоморфны; этот изоморфизм сохраняет граничный оператор Δ.*

изоморфизма не является полным. Именно, М. Ф. Бокштейн указывает, что «пропущено тривиальное указание, что здесь вместо Ω_α (системы всех замкнутых покрытий) нужно взять такую ее конфинальную часть, для которой $\rho_\beta{}^\gamma \rho_\alpha{}^\beta = \rho_\alpha{}^\gamma$, например, рассматривать лишь покрытия R замыканиями непересекающихся открытых множеств». N. Steenrod с этой целью рекомендует брать покрытия Куроша. Повидимому, сжатое изложение и вообще недостатки редакционного характера помешали увидеть, что в ([5]) вместо покрытий Куроша применяются, как это и указано на стр. 340, разбиения и порожденные ими покрытия, обладающие всеми нужными свойствами. Более того, М. Ф. Бокштейн, меняя формулировку доказанного мною утверждения, как нетрудно обнаружить, впадает в противоречие.

ТЕОРЕМА (2.1:4). *Имеет место изоморфизм групп $F_M{}^r(R,\Theta)$ и $L^r(R,\Theta)$, сохраняющий граничный оператор Δ.*

2.2. Перейдем к доказательству теоремы (2.1:3).

Пусть $f^r \in F_K{}^r(R,\Theta)$. Возьмем произвольный симплекс $t_\alpha{}^r = (e_0{}^\alpha, \ldots, e_r{}^\alpha)$ из $N_\alpha - C_\alpha{}^3$, где N_α — нерв разбиения D_α пространства R, а $C_\alpha{}^3$ — особый подкомплекс порядка 3 нерва N_α. Тогда все $e_i{}^\alpha, i=0,1,\ldots,r$, бикомпактны в R и f^r определена на системе $e_0{}^\alpha, \ldots, e_r{}^\alpha$. Рассмотрим цепь $f_\alpha{}^r$ комплекса N_α, положив

$$f_\alpha{}^r(t_\alpha{}^r) = f^r(e_0{}^\alpha, \ldots, e_r{}^\alpha) \text{ при } t_\alpha{}^r \in N_\alpha - C_\alpha{}^3$$

и

$$f_\alpha{}^r(t_\alpha{}^r) = 0 \text{ при } t_\alpha{}^r \in C_\alpha{}^3.$$

Обозначим через s_α отображение группы $F_K{}^r(R,\Theta)$ в группу $L^r(N_\alpha,\Theta)$, ставящее в соответствие функции f^r цепь $f_\alpha{}^r$. Легко показать, что s_α сохраняет операцию сложения и что оно непрерывно.

Далее, если $D_\alpha < D_\beta$ и если

$$s_\alpha f^r = f_\alpha{}^r, \quad s_\beta f^r = f_\beta{}^r,$$

то

$$\rho_\alpha{}^\beta f_\beta{}^r(t_\alpha{}^r) = f_\alpha{}^r(t_\alpha{}^r)$$

при $t_\alpha{}^r = (e_0{}^\alpha, \ldots, e_r{}^\alpha) \in N_\alpha - C_\alpha{}^3$. В самом деле,

$$\rho_\alpha{}^\beta f_\beta{}^r(e_0{}^\alpha, \ldots, e_r{}^\alpha) = \sum f_\beta{}^r(e_0{}^\beta, \ldots, e_r{}^\beta),$$

где суммирование распространяется на все такие симплексы $t_\beta{}^r = (e_0{}^\beta, \ldots, e_r{}^\beta)$, вершины которых удовлетворяют условиям:

$$e_i{}^\beta \subset e_i{}^\alpha, \quad i=0,\ldots,r,$$

и, кроме того, условию

$$\bigcap_{i=0}^{r} \bar{e}_i{}^\beta \neq 0.$$

Так как все вершины $e_i{}^\alpha$ имеют порядок особенности $\geqslant 3$, а по крайней мере одна из них имеет порядок $\geqslant 4$, то, в силу $\sigma_\alpha{}^\beta t_\beta{}^r = t_\alpha{}^r$, этим же свойством будут обладать и вершины $e_i{}^\beta$, т. е. $t_\beta{}^r \in N_\beta - C_\beta{}^3$. Поэтому

$$f_\beta{}^r(e_0{}^\beta, \ldots, e_r{}^\beta) = f^r(e_0{}^\beta, \ldots, e_r{}^\beta),$$

откуда

$$\rho_\alpha{}^\beta f_\beta{}^r(e_0{}^\alpha, \ldots, e_r{}^\alpha) = \sum f^r(e_0{}^\beta, \ldots, e_r{}^\beta),$$

где суммирование уже можем считать распространенным на все такие $e_i{}^\beta, i=1,\ldots,r$, которые удовлетворяют лишь условию $e_i{}^\beta \subset e_i{}^\alpha$, а не дополнительному условию $\bigcap_{i=0}^{r} \bar{e}_i{}^\beta \neq 0$, ибо в случае $\bigcap_{i=0}^{r} \bar{e}_i{}^\beta = 0$ имеем $f^r(e_0{}^\beta, \ldots, e_r{}^\beta) = 0$. Отсюда, в силу аддитивности f^r, получим:

$$\sum f^r(e_0{}^\beta, \ldots, e_r{}^\beta) = f^r(\bigcup e_0{}^\beta, \ldots, \bigcup e_r{}^\beta) = f_\alpha{}^r(e_0{}^\alpha, \ldots, e_r{}^\alpha),$$

т. е.

$$\rho_\alpha{}^\beta f_\beta{}^r(t_\alpha{}^r) = f_\alpha{}^r(t_\alpha{}^r).$$

Таким образом, множество всех цепей

$$s_\alpha f^r = f_\alpha{}^r \in L^r(K_\alpha, \Theta),$$

соответствующих функции f^r, образует элемент $\{f_\alpha{}^r\}$ группы $L_{[3]}{}^r(R, \Theta)$. Пусть $[\{f_\alpha{}^r\}]$ есть элемент группы $L^r_{[3]}(R, \Theta)$, содержащий $\{f_\alpha{}^r\}$. Ставя в соответствие функции $f^r \in F_K{}^r(R, \Theta)$ элемент $[\{f_\alpha{}^r\}] \in L_{[3]}{}^r(R, \Theta)$, получим гомоморфизм s группы $F_K{}^r(R, \Theta)$ в группу $L_{[3]}{}^r(R, \Theta)$.

Покажем, что

$$sF_K{}^r(R, \Theta) = L_{[3]}{}^r(R, \Theta).$$

Исходя из данной совокупности бикомпактных в R множеств e_{j_1}, $j_1 = 0, \ldots, r$, рассмотрим множества e^α вида

$$\bigcap_{t=1}^{p} e_{j_1^t} \setminus \bigcup_{j_1^* \neq j_1^t} e_{j_1^*}, \tag{*}$$

где $j_1{}^1, \ldots, j_1{}^p$ представляют собой p различных индексов из системы индексов $0, \ldots, r$, а j_1^* пробегает все значения из той же системы, за исключением $j_1{}^1, \ldots, j_1{}^p$. Рассмотрим систему D_α, состоящую из всех непустых множеств вида (*), $p = 1, \ldots, r$, а также из множеств

$$\bigcap_{j_1=0}^{r} e_{j_1}, \quad U_1 \setminus \bigcup_{j_1=0}^{r} e_{j_1}, \quad U_2 \setminus U_1, \quad R \setminus U_2,$$

где U_1 и U_2 — бикомпактные в R окрестности множеств $\bigcup_{j_1=0}^{r} \overline{e}_{j_1}$ и $\overline{U}_1$ соответственно.

Легко видеть, что D_α есть разбиение пространства R. Особый подкомплекс $C_\alpha{}^3$ порядка особенности 3 нерва N_α разбиения D_α может состоять, очевидно, только из вершин

$$R \setminus U_2, \quad U_2 \setminus U_1, \quad U_1 \setminus \bigcup_{i=0}^{r} e_i.$$

Каждое множество e_{j_1}, $j_1 = 0, \ldots, r$, есть сумма определенных элементов $e_{j_1 j_2}$, $j_2 = 1, \ldots, s(j_1)$, системы D_α:

$$e_{j_1} = \bigcup_{j_2} e_{j_1 j_2}.$$

Ясно, что комплекс N_α однозначно определяется (с точностью до изоморфизма) заданием $e_0, \ldots, e_r$ и описанным построением D_α.

Мы будем говорить, что разбиение D_α и его нерв N_α *порождены* системой множеств $e_0, \ldots, e_r$, U_1, U_2.

Из данного элемента $[\{f_\alpha{}^r\}]$ группы $L_{[3]}{}^r(R, \Theta)$ возьмем какую-либо цепь $f_\alpha{}^r$, лежащую на только что построенном нерве N_α. Значение искомой функции f^r на $e_0, \ldots, e_r$ определим так:

$$f^r(e_0, \ldots, e_r) = \sum f_\alpha{}^r(e_{0j_2^0}, \ldots, e_{rj_2^r}),$$

где сумма распространена на все такие системы $e_{0j_2^0}, \ldots, e_{rj_2^r}$, которые образуют симплекс, т. е. для которых

$$\overline{e}_{0j_2^0} \cap \ldots \cap \overline{e}_{rj_2^r} \neq 0;$$

если ни одна такая система не образует симплекса, то положим

$$f^r(e_0, \ldots, e_r) = 0.$$

Легко видеть, что определенная таким образом функция f^r удовлетворяет условиям (К1) и (К3). Покажем, что она удовлетворяет и условию (К2). Пусть

$$e_k = e_{k'} \cup e_{k''}, \quad e_{k'} \cap e_{k''} = 0,$$

где k есть одно из чисел $0, 1, \ldots, r$, а k' и k'' — два каких-то индекса. Рассмотрим разбиение D_β пространства R, порожденное множествами

$$e_0, \ldots, e_{k-1}, e_{k'}, e_{k''}, e_{k+1}, \ldots, e_r, U_1, U_2.$$

Возьмем какой-либо элемент e^β из D_β, имеющий вид (*), где $j_1^1, \ldots, j_1^p$ суть p различных индексов из системы $0, \ldots, k', k'', \ldots, r$, а j^* принимает все значения из этой же системы, кроме $j_1^1, \ldots, j_1^p$.

Нетрудно видеть, что если ни один из $j_1, \ldots, j_p$ не есть k' или k'', то e^β является одним из элементов разбиения D_α. Если же среди $j_1, \ldots, j_p$ встречается k' или k'' (оба не могут встретиться), то e^β содержится в определенном элементе разбиения D_α, именно в элементе, вид которого только тем отличается от вида e^β, что один из j_1^t вместо k' или k'' принимает значение k. Отсюда мы заключаем, что $D_\alpha < D_\beta$.

Пусть, как и раньше, в разбиении D_α элемент

$$e_{j_1} = \bigcup_{j_2} e^\alpha_{j_1 j_2},$$

где $j_2 = 1, \ldots, s(j_1)$, и пусть каждое $e^\alpha_{j_1 j_2}$ в подразбиении D_β разбиения D_α представляется в виде

$$e^\alpha_{j_1 j_2} = \bigcup_{j_3} e^\beta_{j_1 j_2 j_3},$$

где $j_3 = 1, \ldots, s(j_1, j_2)$.

Ниже мы будем пользоваться обозначениями

$$f(e_0, \ldots, e_r) = f(e_{j_1})$$

и т. п.

Имеем

$$f^r(e_{j_1}) = \sum f_\alpha^r(e^\alpha_{j_1 j_2}),$$

где сумма распространена на все такие $e^\alpha_{j_1 j_2}$, что $\bigcap \overline{e}^\alpha_{j_1 j_2} \neq 0$.

С другой стороны,

$$f_\alpha^r(e^\alpha_{j_1 j_2}) = \sum f_\beta^r(e^\beta_{j_1 j_2 j_3}),$$

где сумма распространяется на все такие $e^\beta_{j_1 j_2 j_3}$, что $\bigcap \overline{e}^\beta_{j_1 j_2 j_3} \neq 0$.

Отсюда заключаем, что

$$f^r(e_{j_1}) = \sum f_\beta^r(e^\beta_{j_1 j_2 j_3}), \tag{k}$$

где сумма распространена на все такие $e^\beta_{j_1 j_2 j_3}$, которые независимо друг от друга пробегают элементы разбиения D_β, удовлетворяющие условиям

$$e^\beta_{j_1 j_2 j_3} \subset e^\alpha_{j_1 j_2} \subset e_{j_1}, \quad j_1 = 0, \ldots, k, \ldots, r,$$

и

$$\bigcap_{j_1=0}^{r} \overline{e}^\beta_{j_1 j_2 j_3} \neq 0.$$

Далее, можно показать, что D_β есть подразбиение разбиения $D_{\alpha'}$, порожденного множествами $e_0, \ldots, e_{k'}, \ldots, e_r, U_1, U_2$.

В данном случае имеем, во-первых,

$$f^r(e_{j_1'}) = \sum f^r_{\alpha'}(e^{\alpha'}_{j_1'j_2'}),$$

где сумма распространена на все те $e^{\alpha'}_{j_1'j_2'} \in D_{\alpha'}$, для которых

$$e^{\alpha'}_{j_1'j_2'} \subset e_{j_1'}, \quad j_1' = 0, \ldots, k', \ldots, r,$$

и $\bigcap \bar{e}^{\alpha'}_{j_1'j_2'} \neq 0$, а во-вторых,

$$f_{\alpha'}^r(e^{\alpha'}_{j_1'j_2'}) = \sum f_\beta^r(e^\beta_{j_1'j_2'j_3'}),$$

где $e^\beta_{j_1'j_2'j_3'}$ пробегают все элементы из D_β, удовлетворяющие условиям

$$e^\beta_{j_1'j_2'j_3'} \subset e^{\alpha'}_{j_1'j_2'} \quad \text{и} \quad \bigcap \bar{e}^\beta_{j_1'j_2'j_3'} \neq 0.$$

Поэтому

$$f^r(e_{j_1'}) = \sum f_\beta^r(e^\beta_{j_1'j_2'j_3'}), \tag{k'}$$

где сумма берется для всех $e^\beta_{j_1'j_2'j_3'}$ из D_β, удовлетворяющих условиям:

$$e^\beta_{j_1'j_2'j_3'} \subset e^{\alpha'}_{j_1'j_2'} \subset e_{j_1'}, \quad j_1' = 0, \ldots, k', \ldots, r, \quad \text{и} \quad \bigcap \bar{e}^\beta_{j_1'j_2'j_3'} \neq 0.$$

Наконец, рассматривая разбиение $D_{\alpha''}$ пространства R, порожденное множествами $e_0, \ldots, e_{k-1}, e_{k''}, e_{k+1}, \ldots, e_r, U_1, U_2$, получим

$$f^r(e_{j_1''}) = \sum f_\beta^r(e^\beta_{j_1''j_2''j_3''}), \tag{k''}$$

где $e^\beta_{j_1''j_2''j_3''}$ пробегают все те элементы разбиения D_β, которые удовлетворяют условиям

$$e^\beta_{j_1''j_2''j_3''} \subset e^{\alpha''}_{j_1''j_2''} \subset e_{j_1''}, \quad j_1'' = 0, \ldots, k-1, k'', k+1, \ldots, r,$$

и

$$\bigcap \bar{e}^\beta_{j_1''j_2''j_3''} \neq 0.$$

Теперь нетрудно показать, что каждое слагаемое суммы (k) входит в качестве слагаемого и притом только один раз в одну и только в одну из сумм (k') или (k''), и наоборот.

Из этого следует, что

$$f^r(e_0, \ldots, e_k, \ldots, e_r) = f^r(e_0, \ldots, e_{k'}, \ldots, e_r) + f^r(e_0, \ldots, e_{k''}, \ldots, e_r),$$

что требовалось доказать.

Построенная функция f^r и есть тот элемент из $F^r_K(R, \Theta)$, который посредством гомоморфизма s отображается на $[\{f_\alpha^r\}]$. В самом деле, возьмем произвольную координату f_α^r из $[\{f_\alpha^r\}]$, заданную на нерве N_α данного разбиения D_α, и пусть

$$t^r = (e_0^\alpha, \ldots, e_r^\alpha) \in N_\alpha - C_\alpha^3.$$

Разбиение D_β, порожденное множествами

$$e_0^\alpha, \ldots, e_r^\alpha, U_1, U_2,$$

состоит из множеств

$$e_0^\alpha, \ldots, e_r^\alpha, \quad U_1 \setminus \bigcup_{i=0}^{r} e_i^\alpha, \quad U_2 \setminus U_1 \quad \text{и} \quad R \setminus U_2.$$

Беря координату f_β^r цепи $\{f_\beta^r\}$, лежащую на нерве N_β, мы видим, что

$$f^r(e_{j_1}^\alpha) = f_\beta^r(t^r).$$

Разбиение D_γ, являющееся пересечением D_α и D_β, содержит элементы $e_0^\alpha, \ldots, e_r^\alpha$. Возьмем координату f_γ^r цепи $\{f_\alpha^r\}$, лежащую на N_γ. Симплициальным отображением σ_α^γ комплекса N_γ в N_α на симплексе t^r комплекса N_α отобразится единственный симплекс t^r комплекса N_γ. Поэтому

$$f_\alpha^r(t^r) = f_\gamma^r(t^r).$$

Точно так же

$$f_\beta^r(t^r) = f_\gamma^r(t^r).$$

Вместе с полученными ранее равенствами это дает

$$f_\alpha^r(t^r) = f^r(e_{j_1}^\alpha),$$

откуда и следует, что

$$f_\alpha^r(t^r) = s_\alpha f^r(e_{j_1}^\alpha).$$

Покажем теперь, что отображение s есть изоморфизм. Пусть f_1^r и f_2^r — две различные функции из $F_K^r(R, \Theta)$. Тогда существует такая система бикомпактных в R множеств $e_0, \ldots, e_r$, что

$$f_1^r(e_{j_1}) \neq f_2^r(e_{j_1}).$$

Рассмотрим разбиение D_α пространства R, порожденное множествами $e_0, \ldots, e_r, U_1, U_2$, и пусть в этом разбиении $e_{j_1} = \bigcup_{j_2} e_{j_1 j_2}$. Тогда

$$f_1^r(e_{j_1}) = f_1^r\left(\bigcup_{j_2} e_{j_1 j_2}\right) = \sum_{j_2} f_1^r(e_{j_1 j_2}).$$

Точно так же

$$f_2^r(e_{j_1}) = \sum_{j_2} f_2^r(e_{j_1 j_2}).$$

Поэтому должна существовать по крайней мере одна такая система аргументов $e_{j_1 j_2 *}$, фигурирующая в предыдущих суммах, что

$$f_1^r(e_{j_1 j_2 *}) \neq f_2^r(e_{j_1 j_2 *}).$$

В частности, по крайней мере одно из

$$f_1^r(e_{j_1 j_2 *}), \quad f_2^r(e_{j_1 j_2 *})$$

не есть нуль группы Θ, так что $\bigcap \overline{e}_{j_1 j_2 *} \neq 0$, т. е. $e_{j_1 j_2 *}$ образуют симплекс t_α нерва N_α; ясно, что $t_\alpha \in N_\alpha - C_\alpha^3$. Вместе с тем

$$s_\alpha f_1^r(t_\alpha) \neq s_\alpha f_2^r(t_\alpha)$$

или

$$[\{s_\alpha f_1^{\,r}\}] \neq [\{s_\alpha f_2^{\,r}\}],$$

что требовалось доказать.

Докажем, наконец, что s сохраняет граничный оператор Δ, т. е. что если

$$\Delta f^{r+1} = f^r$$

и если

$$sf^{r+1} = [\{f_\alpha^{\,r+1}\}] \quad \text{и} \quad sf^r = [\{f_\alpha^{\,r}\}],$$

то

$$\Delta [\{f_\alpha^{\,r+1}\}] = [\{f_\alpha^{\,r}\}].$$

По определению,

$$\Delta f_\alpha^{\,r+1}(e_0, \ldots, e_r) = \sum_k f_\alpha^{\,r+1}(e_k, e_0, \ldots, e_r),$$

где e_k пробегает все те вершины N_α, для которых $\bar{e}_k \cap \bar{e}_0 \cap \ldots \cap \bar{e}_r \neq 0$. Так как

$$(e_0, \ldots, e_r) \in N_\alpha \setminus C_\alpha^{\,3},$$

то

$$f_\alpha^{\,r+1}(e_k, e_0, \ldots, e_r) = f^{r+1}(e_k, e_0, \ldots, e_r),$$

т. е.

$$\Delta f_\alpha^{\,r+1}(e_0, \ldots, e_r) = \sum_k f^{r+1}(e_k, e_0, \ldots, e_r).$$

В этой сумме можно допустить, чтобы e_k пробегало не только те из множеств D_α, для которых $\bar{e}_k \cap \left(\bigcap_{i=0}^{r} \bar{e}_i\right) \neq 0$, но и все те, для которых $\bar{e}_k \cap \left(\bigcup_{i=0}^{r} \bar{e}_i\right) \neq 0$, ибо для добавленных e_k

$$f^{r+1}(e_k, e_0, \ldots, e_r) = 0.$$

Поэтому

$$\Delta f_\alpha^{\,r+1}(e_0, \ldots, e_r) = f^{r+1}\left(\bigcup_k e_k, e_0, \ldots, e_r\right).$$

Легко показать, что открытое ядро G множества $\bigcup_k e_k$ является бикомпактной в R окрестностью множества $\bigcup_{i=0}^{r} \bar{e}_i$. Поэтому

$$\Delta f^{r+1}(e_0, \ldots, e_r) = f^{r+1}(G, e_0, \ldots, e_r).$$

С другой стороны, так как край P множества $\bigcup_k e_k$ удовлетворяет условию $\bar{P} \cap \left(\bigcup_{i=0}^{r} \bar{e}_i\right) = 0$, то имеем

$$f^{r+1}\left(\bigcup e_k, e_0, \ldots, e_r\right) = f^{r+1}(G, e_0, \ldots, e_r).$$

Сопоставление дает

$$\Delta f_\alpha^{\,r+1}(e_0, \ldots, e_r) = \Delta f^{r+1}(e_0, \ldots, e_r) = f_\alpha^{\,r}(e_0, \ldots, e_r),$$

что требовалось доказать.

Поступило
31.V.1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexander J. W., A theory of connectivity in terms of graitings, Ann. of Math., 39 (1938), 883—912.

[2] Александров П., Zur Homologie-Theorie der Kompakten, Comp. Math., 4 (1937), 256—270.

[3] Александров П. С., Общая теория гомологии, Ученые записки МГУ, 45 (1940), 1—60.

[4] Čech E., Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, Fund. Math., 19 (1932), 149—183.

[5] Чогошвили Г., On the homology theory of topological spaces, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, 1 (1940), 337—340.

[6] Kline M., Note on homology theory for locally bicompact spaces, Fund. Math., 32 (1939), 64—68.

[7] Колмогоров А. Н., Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts, C. R. de Paris, 202 (1936), 1144—1147; Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts, ibid., 1325—1327; Les groupes de Betti des espaces métriques, ibid., 1558—1560; Cycles relatifs. Théorème de dualité de M. Alexander, ibid., 1641—1643.

[8] Курош А. Г., Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume, Comp. Math., 2 (1935), 471—476.

[9] Lefschetz S., Algebraic topology, N. Y., Amer. Math. Soc., Coll. Publ., vol. 27, 1942.

[10] Steenrod N., Universal homology groups, Amer. Journ. of Math., v. 58 (1936), 661—701.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 439–462

Н. Я. ВИЛЕНКИН

ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП С ЗАДАННОЙ ОГРАНИЧЕННОСТЬЮ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе рассматриваются группы, в которых, кроме топологии, вводится ограниченность, т. е. указывается класс множеств, называемых ограниченными. Для групп с заданной ограниченностью строится теория характеров, частными случаями которой являются классическая теория характеров Л. С. Понтрягина и теория сопряженных линейных пространств.

Одним из наиболее выдающихся достижений во всей теории топологических групп является построенная Л. С. Понтрягиным теория характеров. Характером топологической абелевой группы G называется непрерывная функция $\chi(g)$, принимающая значения от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$ и удовлетворяющая функциональному уравнению

$$\chi(g_1 - g_2) = \chi(g_1) - \chi(g_2).$$

При этом значения $\chi(g)$ приводятся по mod 1. Полагая

$$(\chi_1 - \chi_2)(g) = \chi_1(g) - \chi_2(g),$$

мы превращаем множество характеров X группы G в группу. Обозначим через $N(A)$ совокупность характеров χ, значения которых на множестве $A \subset G$ не превосходят $\frac{1}{4}$ $\left(\text{в дальнейшем мы будем писать для краткости } |\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}\right)$. Заставляя A пробегать совокупность всех бикомпактных множеств группы G, мы получим совокупность множеств $N(A)$, которые принимаются за полную систему окрестностей нуля группы X.

Таким образом, группа X превращается в топологическую абелеву группу. Если группа G локально компактна, то и группа X локально компактна, причем группа характеров группы X изоморфна группе G [см. ([1]), гл. 5].

Нетрудно видеть, что топология группы G двояким образом влияет на строение группы X. Во-первых, она влияет на отбор элементов этой группы, так как мы берем лишь непрерывные характеры. Во-вторых, она влияет на топологизацию группы X, так как бикомпактность множеств группы G зависит от ее топологии. Для локально бикомпактных групп обе функции топологии весьма удачно сочетаются. Иначе обстоит дело для групп, не являющихся локально бикомпактными. Примером

такой группы является любое бесконечномерное линейное нормированное пространство. Другим примером может служить предельная группа обратного спектра локально бикомпактных абелевых групп. Для этих групп обычная топологизация группы характеров не столь удачна. Например, группа характеров линейного нормированного пространства, совпадающая, как нетрудно убедиться, с сопряженным с ним пространством, топологизируется обычно при помощи множеств вида $N(A)$, где A — сфера пространства L.

Существенным осложнением является то обстоятельство, что в то время как при открытом гомоморфном отображении локально бикомпактной абелевой группы G на такую же группу H каждое бикомпактное подмножество группы H имеет хотя бы один бикомпактный прообраз, для произвольных групп это не имеет места.

Указанные выше соображения подсказывают, что целесообразно разделить две функции топологии группы G. Для этого следует ввести в группу G понятие ограниченного множества, не зависящее от топологизации группы G. Соответствующие аксиомы даны в первом параграфе этой статьи. Далее определяется и изучается понятие квазивыпуклого множества топологической абелевой группы, являющееся аналогом понятия выпуклости в линейных пространствах.

В третьем параграфе изучается понятие группы характеров топологической абелевой группы с заданной ограниченностью, после чего в четвертом параграфе находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа G была изоморфна группе характеров $\hat{\hat{G}}$ своей группы характеров (такие группы мы называем инволюционными). Попутно выясняются условия инволюционности подгруппы инволюционной группы.

Пятый параграф посвящен примерам, один из которых указывает путь построения теории характеров для незамкнутых подгрупп локально бикомпактных абелевых групп, а другой вскрывает причину давно замеченного параллелизма между теорией характеров и теорией сопряженных линейных пространств.

В этой статье приняты те же обозначения, что и в ([2]). Кроме этих обозначений, мы вводим следующие.

Через $\frac{1}{2}A$ мы обозначаем совокупность всех элементов a топологической группы G таких, что $a \in A$ и $2a \in A$ ([7]).

Далее, полагаем

$$\frac{1}{2^n}A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n-1}}A\right].$$

Тогда введенный в ([2]) символ $g\,'A$ можно определить как такое число $\frac{1}{2^n}$, что $g \in \frac{1}{2^n}A \setminus \frac{1}{2^{n+1}}A$.

Через $\mathfrak{R}$ мы обозначим группу вещественных чисел, приведенных по mod 1, и через $\mathfrak{R}^n$ — n-мерную торовидную группу, рассматриваемую как прямая сумма групп типа $\mathfrak{R}$. Отметим еще, что мы не предполагаем в этой статье открытости окрестностей нуля [ср. ([3])].

§ 1. Группы с заданной ограниченностью

1.1. Определение 1. Пусть G — топологическая группа. Мы скажем, что в G задана *ограниченность*, если в G задано множество $T = (M_\alpha)$ ее подмножеств, называемых ограниченными, причем:

1) если множество A ограничено, то ограничено и множество A^{-1};

2) если множество A ограничено и $B \subset A$, то и B ограничено;

3) если множества A и B ограничены, то и множества $A \cup B$ и AB ограничены;

4) каждый элемент ограничен.

Укажем, что ограниченность в топологических пространствах изучалась в работе (4).

Примеры. Совокупность всех подмножеств группы G, обладающих бикомпактными замыканиями, совокупность всех конечных подмножеств группы G, а также совокупность всех подмножеств группы G задают ограниченности.

1.2. Если H — подгруппа топологической группы G с заданной ограниченностью, то мы можем ввести ограниченность в H, назвав ограниченными в H множества вида $H \cap A$, где A — ограниченное в G множество. Нетрудно проверить, что при этом выполняются все условия определения 1. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такую ограниченность в подгруппе.

1.21. Пусть G и G_1 — топологические группы с заданными в них ограниченностями. Непрерывное гомоморфное отображение φ группы G в G_1 называется *ограниченным*, если образ каждого ограниченного в G множества ограничен в G, *ограничивающим*, если для каждого ограниченного множества A из G существует такое ограниченное множество B из G, что $A \cap \varphi(G) \subset \varphi(B)$, и *биограниченным*, если оно ограничивающее и ограниченное.

1.22. Пусть H — замкнутый нормальный делитель группы G с заданной ограниченностью. Назовем ограниченными в фактор-группе G/H образы ограниченных множеств из G. Нетрудно видеть, что при таком определении G/H превращается в группу с заданной ограниченностью, причем естественное гомоморфное отображение G на G/H биограничено. Обратно, пусть φ — открытое биограниченное отображение (такие отображения мы будем называть *вполне гомоморфными*) топологической группы G с заданной ограниченностью на группу H. Тогда H вполне изоморфна фактор-группе G/T, где T — ядро гомоморфизма (мы называем две топологические группы с заданной ограниченностью *вполне изоморфными*, если существует вполне гомоморфное отображение одной из них на другую, ядро которого равно единице).

1.23. Если $M = (G_\alpha)$ — некоторое множество топологических групп с заданными в них ограниченностями, причем в каждой из групп G_α отмечена замкнутая симметричная подгруппа H_α [см. (2), стр. 23], то мы можем ввести ограниченность в группу $G = P(G_\alpha : H_\alpha)$ (см. там же), назвав ограниченным такое множество $A \subset G$, что при любом α его проекция A_α в G_α ограничена в G_α, причем почти при всех α $A_\alpha \subset H_\alpha$. (Мы называем *проекцией* множества $A \subset G$ в G_α совокупность всех эле-

ментов из G_α, являющихся координатами хотя бы одного из элементов $x \in A$.)

Точно таким же образом вводится ограниченность в группы

$$P^r(G_\alpha : H_\alpha), \quad P^f(G_\alpha : H_\alpha), \quad \Sigma^a(G_\alpha : H_\alpha)$$

[см. (2), стр. 23 и 31].

1.3. Определение 2. Некоторая совокупность ограниченных множеств $T = (M_\alpha)$ группы G с заданной ограниченностью называется *базой ограниченности*, если любое ограниченное в G множество является подмножеством одного из множеств M_α.

Например, совокупность всех отрезков вида $[-n; n]$ является базой ограниченности для естественной ограниченности на прямой линии.

§ 2. Квазивыпуклость в топологических абелевых группах

2.1. Определение 3. Подмножество A топологической абелевой группы G называется *квазивыпуклым*, если для любого элемента $g \in G \setminus A$ существует такой характер χ, что $|\chi(g)| > \frac{1}{4}$, в то время как для любого элемента $a \in A$ $|\chi(a)| \leqslant \frac{1}{4}$.

Группа G называется *локально квазивыпуклой*, если она содержит сколь угодно малые квазивыпуклые окрестности нуля, и группой с *квазивыпуклой ограниченностью*, если каждое ограниченное в G множество лежит в квазивыпуклом ограниченном множестве.

Наименьшее квазивыпуклое множество, содержащее данное подмножество A топологической абелевой группы G, назовем *квазивыпуклой оболочкой* множества A и будем обозначать через $\widetilde{A}$. Очевидно, что $\widetilde{A}$ состоит из всех элементов g, для которых из $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$ следует $|\chi(g)| \leqslant \frac{1}{4}$.

Докажем некоторые свойства квазивыпуклых подмножеств топологической абелевой группы G.

2.11. *Пусть A — квазивыпуклое подмножество в G и $x_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — такие элементы группы G, что $\sum_{i=1}^{n} x_i / A \leqslant 1$. Тогда $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in A$.*

В самом деле, пусть χ — такой характер группы G, что $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$. Тогда из определения символа x / A следует, что

$$|\chi(x_i)| \leqslant \frac{1}{4} x_i / A,$$

а потому

$$|\chi(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\chi(x_i)| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n} x_i / A \leqslant \frac{1}{4}. \tag{1}$$

В силу квазивыпуклости множества A, неравенство (1) означает, что $x \in A$.

2.12. Из свойства 2.11 вытекает, что *если A — квазивыпуклое подмножество в G и $B = \frac{1}{2^n} A$, то $B^{2^n} \subset A$.*

2.13. Очевидно, что *если A — квазивыпуклое подмножество в G, то* $A = A^{-1}$.

2.14. *Пересечение двух квазивыпуклых подмножеств A и B квазивыпукло.*

В самом деле, пусть $g \overline{\in} A \cap B$. Тогда либо $g \overline{\in} A$, либо $g \overline{\in} B$. В первом случае существует такой характер χ, что $|\chi(g)| > \frac{1}{4}$, в то время как $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$ и поэтому $|\chi(A \cap B)| \leqslant \frac{1}{4}$. Во втором случае доказательство проводится аналогично.

2.15. *Если множество A квазивыпукло в G, то при любом натуральном n множество $B = \frac{1}{2^n} A$ также квазивыпукло.*

В самом деле, если $g \overline{\in} B$, то найдется такое целое число $l \, (0 \leqslant l \leqslant n)$, что $2^l g \overline{\in} A$, а потому, в силу квазивыпуклости A, найдется такой характер χ, что $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$, в то время как $|\chi(2^l g)| > \frac{1}{4}$. Но тогда, полагая $\chi_1 = 2^l \chi$, имеем для любого элемента $b \in B$ $|\chi_1(b)| \leqslant \frac{1}{4}$, в то время как $|\chi_1(g)| > \frac{1}{4}$.

2.16. *Пусть A (соответственно B) — некоторое подмножество группы G (соответственно H), причем*

$$A = \varphi^{-1}[B \cap \varphi(G)],$$

где через φ обозначено некоторое гомоморфное отображение группы G в H. Тогда

$$\frac{1}{2^n} A = \varphi^{-1}\left[\frac{1}{2^n} B \cap \varphi(G)\right].$$

В самом деле, если $g \in \frac{1}{2^n} A$, то при $0 \leqslant l \leqslant n$ $2^l g \in A$, а потому $\varphi(2^l g) \in B$. Но тогда

$$\varphi(g) \in \frac{1}{2^n} B \cap \varphi(G)$$

и, следовательно,

$$\varphi\left(\frac{1}{2^n} A\right) \subset \frac{1}{2^n} B \cap \varphi(G).$$

Обратно, если

$$g_1 = \varphi(g) \in \frac{1}{2^n} B \cap \varphi(G),$$

то при $0 \leqslant l \leqslant n$ имеем

$$\varphi(2^l g) = 2^l g_1 \in B \cap \varphi(G)$$

и потому $2^l g \in A$, откуда вытекает, что $g \in \frac{1}{2^n} A$.

2.2. Докажем теперь некоторые свойства квазивыпуклых оболочек.

2.21. *Если $A \subset B$, то $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$.*

В самом деле, если $g \overline{\in} \widetilde{B}$, то это значит, что существует такой характер χ, что $|\chi(B)| \leqslant \frac{1}{4}$, а $|\chi(g)| > \frac{1}{4}$. Но тогда $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$, а $|\chi(g)| > \frac{1}{4}$ и потому $g \overline{\in} \widetilde{A}$.

2.22. Из свойства 2.21 вытекает, что $\tilde{A} \cup \tilde{B} \subset \widetilde{A \cup B}$ и $\tilde{A} \cap \tilde{B} \supset \widetilde{A \cap B}$.

2.23. *Если* $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4n}$, *то и* $|\chi(\tilde{A})| \leqslant \frac{1}{4n}$.

В самом деле, в этом случае мы имеем неравенства

$$|k\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4} \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

из которых вытекает, что для любого элемента $a \in \tilde{A}$ имеем

$$|k\chi(a)| \leqslant \frac{1}{4} \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Но легко видеть, что эта система неравенств удовлетворяется лишь в случае, если $|\chi(a)| \leqslant \frac{1}{4n}$ (напомним, что мы рассматриваем характеры как действительные числа, принимающие значения от $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$ и приводимые при сложении по mod 1).

2.24. *Для любых двух множеств A и B таких, что* $0 \in A \cap B$, *имеем*

$$\tilde{A} + \tilde{B} \subset \widetilde{A^2 \cup B^2}.$$

В самом деле, пусть $|\chi(A^2 \cup B^2)| \leqslant \frac{1}{4}$. Тогда для любого элемента $a \in A$ имеем неравенства

$$|\chi(a)| \leqslant \frac{1}{4}, \quad |\chi(2a)| \leqslant \frac{1}{4},$$

из которых следует, что $|\chi(a)| \leqslant \frac{1}{8}$. Итак, $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{8}$, а тогда, по свойству 2.23, и $|\chi(\tilde{A})| \leqslant \frac{1}{8}$. Аналогично доказывается, что $|\chi(\tilde{B})| \leqslant \frac{1}{8}$, а потому

$$|\chi(\tilde{A} + \tilde{B})| \leqslant \chi(\tilde{A})| + |\chi(\tilde{B})| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Но тогда

$$\tilde{A} + \tilde{B} \subset \widetilde{A^2 \cup B^2}.$$

2.3. Пусть G — топологическая абелева группа с заданной в ней ограниченностью. Изменим в группе G топологию и ограниченность таким образом, чтобы она стала локально квазивыпуклой группой с квазивыпуклой ограниченностью. Для этого выберем в качестве базы ограниченности совокупность множеств вида $\tilde{A}$, где A — ограниченные подмножества группы G, а в качестве полной системы окрестностей нуля — совокупность множеств вида $\tilde{U}$, где U пробегает полную систему окрестностей нуля в G.

Проверим выполнение аксиом топологической группы с заданной ограниченностью.

Условие 1) определения 1 выполнено, так как $\tilde{A} = \widetilde{A^{-1}}$. Условие 2) выполнено тривиальным образом. Условие 3) выполнено в силу 2.22 и 2.24. Условие 4) выполнено тривиальным образом.

Для того чтобы показать выполнение аксиом GT из [3], § 2, заметим, что из свойств 2.12, 2.13 и 2.15 квазивыпуклых множеств вытекает, что для любой квазивыпуклой окрестности нуля U существует квазивыпуклая окрестность нуля $V=\frac{1}{2}U$ такая, что $VV^{-1}\subset U$. Далее, по свойству 2.14, пересечение двух квазивыпуклых окрестностей нуля является квазивыпуклой окрестностью нуля. Так как группа G — абелева, то из изложенного вытекает, что при введенной нами топологизации G превращается в общую топологическую абелеву группу. Пусть H — замыкание нуля в этой группе G^*. Группу $\widetilde{G}=G^*/H$, в которой мы вводим ограниченность согласно 1.22, назовем *приведенной* группой G.

2.31. Покажем, что приведенная группа локально квазивыпукла и обладает квазивыпуклой ограниченностью. Для этого достаточно показать, что *запас характеров группы G такой же, как в группе $\widetilde{G}$*. Очевидно, что всякий характер группы $\widetilde{G}$ индуцирует характер группы G^*, а так как топология в G больше, чем топология G^* [([5]), n° 22], то χ индуцирует и характер в группе G.

Пусть теперь χ — характер группы G. Так как группы G и G^* алгебраически изоморфны, то с алгебраической точки зрения χ является характером группы G^*. Зададим число ε, $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}$, и найдем такое натуральное число n, что $\frac{1}{4n}<\varepsilon$. Существует такая окрестность нуля V, что $|\chi(V)|\leqslant\frac{1}{4n}$. Но тогда рассуждения, аналогичные проведенным в 2.23, показывают, что и $|\chi(\widetilde{V})|\leqslant\frac{1}{4n}<\varepsilon$, а тем самым, что характер χ непрерывен на G^*.

Чтобы закончить доказательство нашего утверждения, нам достаточно показать, что $\chi(H)=0$. Если бы существовал такой элемент $h\in H$, что $\chi(h)=0$, то нашелся бы и такой характер χ_1, что $|\chi_1(h)|>\frac{1}{4}$. Существует такая окрестность нуля U, что $|\chi_1(U)|\leqslant\frac{1}{4}$. Очевидно, что $h\overline{\in}\widetilde{U}$ и потому не принадлежит к H. Полученное противоречие показывает, что $|\chi(H)|=0$ и потому χ можно рассматривать как характер фактор-группы $\widetilde{G}=G^*/H$.

§ 3. Теория характеров групп с заданной ограниченностью

3.1. Определение 4. Пусть G — топологическая абелева группа с заданной ограниченностью, а X — абстрактная группа ее непрерывных характеров. Через $N(A)$ будем обозначать совокупность всех элементов χ группы X таких, что для всех элементов $a\in A\subset G$ имеем $|\chi(a)|\leqslant\frac{1}{4}$.

В качестве полной системы окрестностей нуля в группе X примем совокупность всех множеств вида $N(A)$, где A — ограниченное подмножество в G. В качестве базы ограниченности в X примем совокупность всех множеств вида $N(U)$, где U — окрестность нуля в G. Группу X с введенными таким образом топологией и ограниченностью назовем *группой характеров группы G*.

3.11. Покажем, что в группе X выполняются аксиомы топологической группы и аксиомы группы с заданной ограниченностью.

Условие 1) определения 1 выполняется тривиальным образом, так как если $|\chi(U)| \leqslant \frac{1}{4}$, то и $|-\chi(U)| \leqslant \frac{1}{4}$. Так же тривиально выполняется условие 2) этого определения.

Пусть теперь $\Phi = N(U)$ и $\Psi = N(V)$. Тогда

$$\Phi \cup \Psi \subset N(U \cap V).$$

Далее, если U_1 и V_1 — такие окрестности нуля, что $U_1^2 \subset U$ и $V_1^2 \subset V$, то из того, что $\varphi \in \Phi$ (соответственно $\psi \in \Psi$) вытекает, что для любого элемента $u \in U_1$ (соответственно $v \in V_1$) имеем $|\varphi(u)| \leqslant \frac{1}{8}$ $\left(\text{соответственно } |\psi(v)| \leqslant \frac{1}{8}\right)$. Но тогда для любого элемента $g \in U_1 \cap V_1$ имеем

$$|(\varphi + \psi)(g)| \leqslant \frac{1}{4}$$

и потому

$$\Phi + \Psi \subset N(U_1 \cap V_1).$$

Таким образом, выполняется и условие 3) определения 1.

Условие 4) выполняется, так как для любого элемента $\chi \in X$ существует такая окрестность нуля U группы G, что $|\chi(U)| \leqslant \frac{1}{4}$ и потому $\chi \in N(U)$.

Покажем теперь, что выполняются аксиомы GT I — IV из ([3]). Пусть $\chi \neq 0$. Существует такой элемент $g \in G$, что $\chi(g) \neq 0$. Но тогда найдется такое целое число n, что $|\chi(ng)| > \frac{1}{4}$, а потому $\chi \,\overline{\in}\, N(ng)$.

Таким образом, выполнена аксиома GT I.

Пусть $\Phi = N(A)$ и $\Psi = N(B)$. Тогда

$$\Phi \cap \Psi \subset N(A \cup B)$$

и потому $\Phi \cap \Psi$ является окрестностью нуля в X (множество $A \cup B$ ограничено в силу условия 3) определения 1). Таким образом, выполнена аксиома GT II.

Пусть $\Phi = N(A)$ — окрестность нуля в X и $0 \in A$. Множество A^2 ограничено в G, по условию 3) определения 1, и потому $\Psi = N(A^2)$ является окрестностью нуля в X. Но $\Psi = \Psi^{-1}$ и при $\psi \in \Psi$, $\psi_1 \in \Psi$

$$|\psi(A)| \leqslant \frac{1}{8}, \quad |(\psi - \psi_1)(A)| \leqslant \frac{1}{4} \text{ и } \Psi\Psi^{-1} \subset \Phi,$$

а потому выполнена аксиома GT III.

Аксиома GT IV выполняется тривиальным образом, в силу коммутативности G.

3.2. ТЕОРЕМА 1. *Пусть X—группа характеров топологической абелевой группы G с заданной ограниченностью. Тогда любое множество вида $N(A)$, где A — некоторое подмножество группы G, квазивыпукло в X.*

Доказательство. Пусть $\psi \overline{\in} N(A)$. Тогда найдется такой элемент $a \in A$, что $|\psi(a)| > \frac{1}{4}$. Полагая при $\varphi \in X$ $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$, мы получим некоторый характер группы X, который непрерывен, так как элемент a группы G ограничен, по условию 4) из определения 1. Но тогда $|\hat{a}(\psi)| > \frac{1}{4}$, в то время как $|\hat{a}(N(A))| \leqslant \frac{1}{4}$, $\psi \in \widetilde{N(A)}$, и поэтому $N(A) = \widetilde{N(A)}$. Теорема доказана.

Следствие. *Какова бы ни была топологическая абелева группа G с заданной ограниченностью, ее группа характеров является локально квазивыпуклой группой с квазивыпуклой ограниченностью.*

В самом деле, в каждой окрестности нуля группы X лежит множество вида $N(A)$, где A — ограниченное подмножество в G, а каждое ограниченное подмножество из X лежит в множестве вида $N(U)$, где U — окрестность нуля в G.

3.21. Заметим, что для локально бикомпактных абелевых групп, в которых ограниченными считаются множества с бикомпактными замыканиями, данное в 3.1 определение группы характеров совпадает с обычным [см. (3), стр. 114]. В самом деле, так как из того, что $|\chi(A^n)| \leqslant \frac{1}{4}$, $0 \in A$, вытекает, что $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4n}$, мы можем при определении топологии в группе характеров зафиксировать окрестность нуля группы $\mathfrak{R}$ и менять лишь бикомпактные множества. Далее, на стр. 114 в (3) показано, что множество вида $N(U)$, где U — замкнутая окрестность нуля в G, бикомпактно в X, а из теоремы двойственности вытекает, что любое бикомпактное множество в X содержится в множестве вида $N(U)$.

3.22. Из утверждения 3.21, теоремы двойственности и следствия из теоремы 1 вытекает, что локально бикомпактные абелевы группы с описанной выше ограниченностью являются локально квазивыпуклыми группами с квазивыпуклой ограниченностью.

3.3. ЛЕММА 1. *Для любого подмножества A топологической абелевой группы G с заданной ограниченностью имеем $N(A) = N(\tilde{A})$.*

Доказательство. Очевидно, что $N(\tilde{A}) \subset N(A)$. Пусть теперь $\chi \in N(A)$. Это значит, что $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$. Но тогда и $|\chi(\tilde{A})| \leqslant \frac{1}{4}$ и потому $\chi \in N(\tilde{A})$.

3.31. Из доказанной леммы следует, что группа характеров группы G вполне изоморфна группе характеров приведенной группы. Поэтому мы можем в дальнейшем рассматривать лишь приведенные группы, т. е. локально квазивыпуклые группы с квазивыпуклой ограниченностью. Для краткости такие группы мы будем называть Q-группами. Как мы видели выше, класс Q-групп достаточно широк и содержит, во всяком случае, все локально бикомпактные абелевы группы.

3.32. Пусть G — абелева группа, X — ее группа характеров и $\hat{G}$ — группа характеров группы X. Каждому элементу g группы G поставим в соответствие характер $\hat{g}$ группы X, определяемый равенством

$$\hat{g}(\chi) = \chi(g).$$

Как уже упоминалось, характер $\hat{g}$ непрерывен на X, так как элемент g ограничен в G, а потому совокупность $\Phi = N(g)$ элементов группы X, для которых $|\hat{g}(\chi)| = |\chi(g)| \leqslant \frac{1}{4}$, является окрестностью нуля в X. Так как для любого n существует такая окрестность нуля Ψ, что $\Psi^n \subset \Phi$, а для $\psi \in \Psi$

$$|\hat{g}(\psi)| \leqslant \frac{1}{4n},$$

то элемент $\hat{g}$ непрерывен на X.

Очевидно, что отображение $\alpha: g \to \hat{g}$ группы G в $\hat{G}$ является алгебраически гомоморфным отображением.

3.33. ТЕОРЕМА 2. *Отображение $\alpha: g \to \hat{g}$ является вполне изоморфным отображением Q-группы G на подгруппу $\alpha(G)$ группы $\hat{G}$.*

Доказательство. Покажем, что отображение α непрерывно. Пусть $\hat{U}$ — окрестность нуля в $\hat{G}$, определяемая ограниченным множеством Ψ из X. Существует такая окрестность нуля U в G, что $\Psi \subset N(U)$. Но тогда, очевидно, из $g \in U$ вытекает, что $\alpha(g) \in \hat{U}$.

Покажем, что отображение α ограничено. В самом деле, пусть A — ограниченное подмножество в G, $\Psi = N(A)$ и $\hat{A} = N(\Psi)$. Тогда, очевидно, $\hat{A}$ ограничено в $\hat{G}$, причем $\alpha(A) \subset \hat{A}$. Отметим, что при доказательстве непрерывности и ограниченности отображения α мы не использовали того факта, что G является Q-группой.

Для доказательства открытости отображения α рассмотрим окрестность нуля U группы G и содержащуюся в ней квазивыпуклую окрестность нуля V. Положим $\Psi = N(V)$ и $\hat{V} = N(\Psi)$. Тогда для любого элемента $g \bar{\in} V$ найдется такое $\chi \in \Psi$, что $|\chi(g)| > \frac{1}{4}$. Но тогда $|\hat{g}(\chi)| > \frac{1}{4}$ и $\hat{g} \bar{\in} \hat{V}$. Поэтому

$$\hat{V} \cap \alpha(G) \subset \alpha(V),$$

откуда и следует, что отображение α открыто.

Чтобы доказать, что α является ограничивающим отображением, рассмотрим ограниченное множество $\hat{A}$ в $\hat{G}$. Найдется такая окрестность нуля Θ в X, что $N(\Theta) \supset \hat{A}$. В Θ найдется окрестность нуля Φ вида $N(B)$, где B — ограниченное множество в G. Так как G — группа с квазивыпуклой ограниченностью, то B лежит в квазивыпуклом ограниченном множестве A. Пусть $g \bar{\in} A$. Тогда найдется такой элемент $\chi \in X$, что $|\chi(g)| > \frac{1}{4}$ и $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$. Так как $B \subset A$, то $|\chi(B)| \leqslant \frac{1}{4}$ и потому $\chi \in \Phi \subset \Theta$. Но тогда из

$$|\hat{g}(\chi)| = |\chi(g)| > \frac{1}{4}$$

следует, что $\hat{g} \bar{\in} \hat{A}$ и потому

$$\alpha(A) \supset \hat{A} \cap \alpha(G),$$

следовательно, α является ограничивающим отображением.

Заметим, наконец, что для любого элемента $g \neq 0$ группы G найдется такой элемент $\chi \in X$, что $|\chi(g)| > \frac{1}{4}$ и потому отображение α взаимно однозначно. Теорема доказана.

§ 4. Инволюционные группы

4.1. Определение 5. Топологическая абелева группа G с заданной ограниченностью называется *инволюционной*, если построенное в 3.32 отображение α является вполне изоморфным отображением группы G на $\hat{G}$.

Из теоремы 2 и следствия из теоремы 1 вытекает, что для того чтобы группа G была инволюционной, необходимо и достаточно, чтобы:

1) G была Q-группой;

2) для любого элемента $h \in \hat{G}$ существовал такой элемент $g \in G$, что для всех элементов $\chi \in X$ имело место $h(\chi) = \chi(g)$.

4.11. Условию 2) инволюционности группы может быть придан другой вид. Введем в группу G новую топологию. Назовем слабой окрестностью нуля, определенной характером χ, совокупность $M(\chi)$ всех таких элементов g группы G, для которых $|\chi(g)| \leqslant \frac{1}{4}$. В качестве полной системы окрестностей нуля слабой топологизации группы G примем совокупность всех множеств вида $M(\chi)$ и их конечных пересечений. Нетрудно убедиться, что для этой системы окрестностей нуля выполняются аксиомы GT II — IV из (3) (аксиома GT III выполнена потому, что $[M(\chi) \cap M(2\chi)]^2 \subset M(\chi)$).

Аксиома GT I выполняется, если для любого элемента g группы G существует такой характер χ, что $\chi(g) \neq 0$. В частности, это имеет место, если группа G локально квазивыпукла.

4.12. Очевидно, что можно ввести слабую топологию и в группу характеров $\hat{G}$ группы X, приняв в качестве полной системы окрестностей нуля в $\hat{G}$ совокупность конечных пересечений множеств вида $N(\chi)$. Под множеством $N(\chi)$ мы понимаем совокупность всех элементов $\hat{h}$ группы $\hat{G}$ таких, что $|\hat{h}(\chi)| \leqslant \frac{1}{4}$. Очевидно, что на подгруппе $\alpha(G)$, где через α обозначено описанное в 3.32 гомоморфное отображение группы G в $\hat{G}$, эта слабая топология совпадает с описанной в 4.11.

4.13. Отметим следующее свойство торовидной группы $\mathfrak{R}^n$, элементы которой мы записываем в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_n \in \mathfrak{R}$.

ЛЕММА 2. *Пусть H — замкнутая подгруппа группы $\mathfrak{R}^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — элемент группы $\mathfrak{R}^n$, не принадлежащий H. Тогда существуют такие целые числа $m_1, \ldots, m_n$, что для всех элементов $h = (h_1, \ldots, h_n)$ из H имеем*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i h_i = 0, \quad a \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \neq 0.$$

Доказательство. Пусть C^n — группа характеров для $\mathfrak{R}^n$ и C — аннулятор H в C^n. Обозначим через α_i характер группы $\mathfrak{R}^n$, определяемый равенством $\alpha(x) = x_i$ для $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что элементы α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ образуют базу для C^n. Пусть β_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — база подгруппы C, причем

$$\beta_i = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \alpha_j.$$

Так как $y \overline{\in} H$, то хотя бы для одного i $\beta_j(y) \neq 0$, а потому

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} y_j \neq 0.$$

В то же время для всех элементов h из H

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} h_j = 0.$$

4.14. ТЕОРЕМА 3. *Подгруппа $\alpha(G)$ всюду плотна в группе $\hat{G}$, взятой в слабой топологии.*

Доказательство. Пусть h — любой элемент из $\hat{G} \setminus \alpha(G)$ и T — его слабая окрестность, определяемая элементами $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ из X. Обозначим через ψ гомоморфное отображение группы $\hat{G}$ в n-мерный тор $\mathfrak{R}^n$, задаваемое формулой ($g \in \hat{G}$):

$$\psi(g) = [\chi_1(g), \ldots, \chi_n(g)].$$

Покажем, что $\psi(h) \in \overline{\psi[\alpha(G)]}$. В самом деле, в противном случае, по лемме 2, нашлись бы такие целые числа m_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что для любого элемента $g \in \alpha(G)$ имело бы место $\chi(g) = 0$, где $\chi = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_i$, в то время как $\chi(h) \neq 0$. Но так как из $\chi[\alpha(G)] = 0$ вытекает, что $\chi = 0$, то мы пришли к противоречию.

Итак, в окрестности элемента $\psi(h) = [\chi_1(h), \ldots, \chi_n(h)]$, определяемой неравенствами

$$|\chi_i(g) - \chi_i(h)| \leqslant \frac{1}{4}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

существует элемент вида $\psi[\alpha(x)]$, где $x \in G$. Но тогда, очевидно, $\alpha(x) \in h + T$, откуда и вытекает, что $\alpha(G)$ всюду плотно в группе $\hat{G}$, взятой в слабой топологии.

4.15. В дальнейшем нам будет полезно следующее замечание:

Если для алгебраического характера χ группы G существует такая окрестность нуля U, что $|\chi(U)| \leqslant \frac{1}{4}$, то характер χ непрерывен.

В самом деле, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $\frac{1}{4n} < \varepsilon$, и такая окрестность нуля V, что $V^n \subset U$. Но тогда

$$|\chi(V)| \leqslant \frac{1}{4n} < \varepsilon$$

и χ непрерывен.

Из этого замечания вытекает, в частности, что любой характер группы G, непрерывный в первоначальной топологии, непрерывен и в слабой топологии, а потому его можно продолжить на пополнение $\mathfrak{G}$ группы G, взятой в слабой топологии. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между характерами групп G и $\mathfrak{G}$.

4.16. Для любого элемента $\mathfrak{g}$ T_1—группы $\mathfrak{G}$ существует такой характер $\chi \in X$, что $\chi(\mathfrak{g}) \neq 0$. В самом деле, возьмем такую окрестность нуля $\mathfrak{V}$

группы $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^{-1}$ и $\mathfrak{g} \bar{\in} \mathfrak{V}^2$. Так как $\mathfrak{V} \cap G$ является слабой окрестностью нуля группы G, то существует конечное число элементов $\chi_1, \ldots, \chi_n$ группы X таких, что $\bigcap_{i=1}^{n} N(\chi_i) \subset \mathfrak{V}$. Выберем такую слабую окрестность $\mathfrak{A}$ элемента $\mathfrak{g}$, чтобы для всех $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ имело место

$$|\chi_i(\mathfrak{a}) - \chi_i(\mathfrak{g})| \leqslant \frac{1}{8},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n,$$

и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{g} + \mathfrak{V}$. Так как G всюду плотно в $\mathfrak{G}$, то найдется элемент $h \in \mathfrak{A} \cap G$. Так как $h \bar{\in} \mathfrak{V}$, то существует такое i, что $|\chi_i(h)| > \frac{1}{4}$. Но тогда $|\chi_i(\mathfrak{g})| > \frac{1}{8}$.

4.2. Дадим теперь вторую формулировку условия 2) инволюцисонности группы.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы топологическая абелева группа G с заданной ограниченностью была инволюционной, необходимо и достаточно*, чтобы:

1) *G была Q-группой;*

2) *для любого ограниченного подмножества A группы G и любого элемента $\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{G} \setminus G$ существовал такой характер χ группы $\mathfrak{G}$, что $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$, в то время как $|\chi(\mathfrak{g})| > \frac{1}{4}$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно показать эквивалентность условия 2) нашей теоремы с условием 2) из 4.1 Пусть не выполнено условие 2) нашей теоремы. Тогда существует такое ограниченное множество A из G и такой элемент $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G} \setminus G$, что неравенство $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$ влечет за собой неравенство $|\chi(\mathfrak{g})| \leqslant \frac{1}{4}$ для всех χ. Поставим каждому элементу $\chi \in X$ в соответствие число $\chi(\mathfrak{g})$. Этим определяется алгебраический характер $\hat{\mathfrak{g}}$ группы X. Так как для любого элемента $\chi \in N(A)$ имеем $|\chi(\mathfrak{g})| \leqslant \frac{1}{4}$, а потому $|\hat{\mathfrak{g}}(x)| \leqslant \frac{1}{4}$, то $|\hat{\mathfrak{g}}[N(A)]| \leqslant \frac{1}{4}$ и, в силу 4.45, характер $\hat{\mathfrak{g}}$ непрерывен на X. Если бы существовал такой элемент g группы G, что для всех $\chi \in X$ $\hat{\mathfrak{g}}(\chi) = \chi(g)$, то для всех $\chi \in X$ мы имели бы $\chi(\mathfrak{g} - g) = 0$, откуда, в силу 4.16, вытекало бы, что $\mathfrak{g} - g = 0$ и потому $\mathfrak{g} \in G$, вопреки предположению. Поэтому не выполнено условие 2) из 4.1.

Пусть теперь не выполнено условие 2) из 4.1 и $h \in \hat{G} \setminus \alpha(G)$. Так как, в силу теоремы 3, $\alpha(G)$ всюду плотно в слабо топологизированной группе $\hat{G}$, то h можно рассматривать как элемент группы $\mathfrak{G}$. Но так как h является непрерывным характером группы X, то существует окрестность нуля $\Psi = N(A)$ группы X такая, что $|h(\Psi)| \leqslant \frac{1}{4}$, а потому существует такое ограниченное множество A, что из $|\chi(A)| \leqslant \frac{1}{4}$ вытекает $|\chi(h)| \leqslant \frac{1}{4}$. Таким образом, не выполнено условие 2) нашей теоремы.

4.21. Так как в случае, когда группа G бикомпактна, все ее топологизации, меньшие первоначальной, совпадают с ней, то всякая биком-

пактная абелева группа, в которой все подмножества считаются ограниченными, является Q-группой, а ее слабая топологизация совпадает с первоначальной и потому $\hat{\hat{G}} = \alpha(G)$ (мы считаем уже известным, что для любого элемента $g \in G$ существует характер χ такой, что $\chi(g) = 0$). Отсюда получается новое доказательство теоремы двойственности для бикомпактных групп.

4.3. Покажем, что для топологических абелевых групп имеет место теорема, аналогичная известной теореме Плеснера для нормированных линейных пространств [см. ([6]), стр. 115].

Введем следующие обозначения. Пусть X, $\hat{G}$, $\hat{X}$, $\hat{\hat{G}}$ являются соответственно группами характеров для G, X, $\hat{G}$, $\hat{X}$ и α, α_1, α_2 — введенными в 3.32 гомоморфными отображениями групп G в $\hat{G}$, X в $\hat{X}$ и $\hat{G}$ в $\hat{\hat{G}}$ (из теоремы 2 и следствия теоремы 1 вытекает, что α_1 и α_2 являются вполне изоморфными отображениями на $\alpha_1(X)$ и $\alpha_2(\hat{G})$). При этих обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Если* $\hat{X} \neq \alpha_1(X)$, *то* $\hat{\hat{G}} \neq \alpha_2(G)$.

Доказательство. Пусть $\hat{X} \neq \alpha_1(X)$. Тогда, очевидно, $\hat{G} \neq \alpha(G)$, причем аннулятор Θ подгруппы $\alpha(G)$ в $\hat{X}$ отличен от нуля. Так как лишь нулевой элемент в X обращается в нуль на G, то $\alpha_1(X) \cap \Theta = 0$. Далее,

$$\hat{X} = \alpha_1(X) + \Theta.$$

В самом деле, пусть $\hat{\chi} \in \hat{X}$. Тогда $\hat{\chi}$ определяет на $\alpha(G)$ некоторый характер χ, который можно считать элементом из X. Но тогда

$$\hat{\chi} - \alpha_1(\chi) \in \Theta.$$

Покажем теперь, что, каковы бы ни были окрестности нуля Ψ и Φ подгрупп $\alpha_1(X)$ и Θ, множество $\Psi + \Phi$ содержит окрестность нуля группы $\hat{X}$. Пусть

$$\Psi \supset \alpha_1[N(A)],$$

где A — ограниченное подмножество группы G, $\Phi = \Theta \cap \Phi_1$, где $\Phi_1 \supset N(A_1)$, и A_1 — ограниченное подмножество группы $\hat{G}$. Пусть $A_1 \subset N(\Gamma)$, где Γ — окрестность нуля группы X и $\Gamma \supset N(A_2)$, где $A_2 \supset 0$ — ограниченное подмножество группы G. Обозначим $\alpha[A \cup A_2]$ через A_3 и $N[(A_3 \cup A_1)^2]$ через Δ. Δ является окрестностью нуля группы $\hat{X}$. Пусть $\delta \in \Delta$. Тогда

$$\delta = \delta_1 + \delta_2,$$

где $\delta_1 \in \Theta$, $\delta_2 = \alpha_1(\delta_3)$, $\delta_3 \in X$. Заметим, что δ_3 и $2\delta_3$ лежат в $N(A) \cap \Gamma$, так как $\delta_1[\alpha(G)] = 0$, а δ принимает на $\alpha(A \cup A_2)$ значения, не превосходящие по абсолютной величине $\frac{1}{8}$. Следовательно, $\delta_2 \in \Psi$. Из того, что

$$|\delta_2[\alpha(A_2)]| \leqslant \frac{1}{8}$$

и

$$A_1 \subset N[N[(A_2)]] \subset \widetilde{\alpha(A_2)}$$

вытекает, что $|\delta_2(A_1)| \leqslant \frac{1}{8}$. Но так как и $|\delta(A_1)| \leqslant \frac{1}{8}$, то $|\delta_1(A_1)| \leqslant \frac{1}{4}$. Поэтому $\delta_1 \in \Phi$ и $\Delta \subset \Phi + \Psi$. Из доказанного следует, что

$$\hat{X} = \alpha_1(X) \dotplus \Theta.$$

Так как существуют отличные от нуля характеры группы Θ, то мы получаем из доказанного, что

$$\hat{\hat{G}} = \alpha_2(\hat{G}) \dotplus T,$$

где $T \neq 0$ — группа характеров для Θ, а потому α_2 не является вполне изоморфным отображением группы $\hat{G}$ на $\hat{\hat{G}}$. Теорема доказана.

4.31. Из доказанной теоремы следует, что *для любой топологической абелевой группы с заданной ограниченностью либо ее группа характеров инволюционна, либо ни одна из последующих групп характеров не инволюционна*.

4.4. Рассмотрим теперь вопрос об условиях, при которых замкнутая подгруппа инволюционной группы инволюционна.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы подгруппа H инволюционной группы G была инволюционной, достаточно, чтобы*:

1) *любой характер χ, заданный на H, мог быть распространен на всю группу G*;

2) *подгруппа H была квазивыпукла в G (или, что то же самое, аннулятор аннулятора подгруппы H совпадал с H)*.

Доказательство. Из условия 1) следует, что каждый характер подгруппы H задается некоторым характером группы G и каждый характер группы G задает некоторый характер подгруппы H. Этим определяется алгебраическое гомоморфное отображение φ группы характеров X для G на группу характеров Ψ для H. Из определения ограниченности в подгруппе (см. 1.2) вытекает, что это отображение непрерывно. Ядром гомоморфизма φ является, очевидно, аннулятор Θ подгруппы H в X.

Пусть h — некоторый характер группы Ψ. Полагая

$$h_1(\chi) = h[\varphi(\chi)],$$

мы получим характер группы X, который, по предположению об инволюционности группы G, задается некоторым элементом t группы G. При этом $h_1(\Theta) = 0$, а потому элемент h_1 принадлежит аннулятору подгруппы Θ в G. В силу квазивыпуклости подгруппы H, для любого элемента $g \notin H$ существует такой характер χ, что $|\chi(g)| > \frac{1}{4}$, в то время как $|\chi(H)| \leqslant \frac{1}{4}$, а потому $\chi(H) = 0$ и $\chi \in \Theta$. Следовательно, аннулятор Θ в G совпадает с H и $h_1 \in H$.

Так как подгруппа Q-группы является Q-группой, а второе условие из 4.1 выполнено, в силу проведенных сейчас рассуждений, то группа H является инволюционной группой.

4.41. ТЕОРЕМА 7. *Пусть G — топологическая абелева группа с заданной ограниченностью, H — ее замкнутая подгруппа, X — группа характеров группы G и Θ — аннулятор подгруппы H в X. Тогда Θ является группой характеров для G/H.*

Доказательство. Очевидно, что группа Θ алгебраически изоморфна группе характеров Θ_1 группы G/H [см. ([1]), стр. 151]. Обозначим этот изоморфизм через φ. Пусть Φ — окрестность нуля в Θ_1, имеющая вид $\Phi = N(A)$, где A — ограниченное подмножество в G/H. Так как отображение ψ группы G на G/H биограничено, то существует такое ограниченное подмножество A_1 в G, что $A = \psi(A_1)$. Обозначим $N(A_1) \cap \Theta$ через Φ_1. Φ_1 является окрестностью нуля в Θ, но очевидно, что

$$\varphi[N(A)] = \Phi_1$$

и потому отображение φ открыто. Легко видеть, что, в силу ограниченности отображения ψ, каждая окрестность нуля группы Θ содержит окрестность нуля, получающуюся таким же образом, как Φ_1; следовательно, отображение φ непрерывно.

То, что отображение φ биограничено, следует аналогичным образом из того, что отображение ψ непрерывно и открыто.

4.42. Отметим, что из проведенных выше рассуждений даже в случае, когда группа G инволюционна, не следует инволюционность G/H. Дело в том, что G/H и группа характеров Ψ инволюционной подгруппы H могут обладать вполне изоморфными группами характеров, не будучи вполне изоморфными друг другу.

4.5. Рассуждения, аналогичные проведенным в ([2]), п. 4, показывают, что если $[G_\alpha]$, $\alpha \in \mathfrak{M}$, — некоторое множество топологических абелевых групп с заданной в них ограниченностью, в каждой из которых отмечена репрезентативная подгруппа H_α, и если X_α — группа характеров для G_α, а Φ_α — аннулятор подгруппы H_α, то

$$X = \sum{}^a (X_\alpha : \Phi_\alpha)$$

является группой характеров для

$$G = \sum{}^a (G_\alpha : H_\alpha).$$

Если, кроме того, все группы G_α инволюционны, а подгруппы H_α квазивыпуклы, то и группа G_α инволюционна.

4.51. Определение 6. Пусть G — топологическая абелева группа и T — ее подмножество. Пусть Φ — множество всех характеров группы G таких, что $|\chi(T)| \leqslant \frac{1}{4}$. Тогда для любого элемента $g \in T$ положим

$$\frac{g}{T} = \sup_{\chi \in \Phi} |\chi(g)|.$$

4.52. *Если множество T квазивыпукло, то*

$$\frac{1}{8} g/T < \frac{g}{T} \leqslant \frac{1}{4} g/T. \tag{2}$$

В самом деле, пусть $g/T = \frac{1}{2^n}$. Тогда $2^l g \in T$, $0 \leqslant l \leqslant n$, в то время как $2^{n+1} g \bar{\in} T$. Поэтому для любого характера $\chi \in \Phi$ имеем $|2^l \chi(g)| \leqslant \frac{1}{4}$,

$0 \leqslant l \leqslant n$, и в то же время существует такой характер $\chi_1 \in \Phi$, что $|2^{n+1}\chi_1(g)| > \frac{1}{4}$. Поэтому для любого характера χ из Φ

$$|\chi(g)| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n},$$

в то время как

$$|\chi_1(g)| > \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Отсюда и следует неравенство (2).

4.53. Пусть $G = \sum (G_\alpha : H_\alpha)$ и пусть в каждой из групп G_α выбрана окрестность нуля U_α так, что почти для всех α $H_\alpha \Subset U_\alpha$. Обозначим через $U = U^{am}(U_\alpha)$ совокупность всех элементов $g = (g_\alpha)$ группы G таких, что при всех α $g_\alpha \in U_\alpha$ и $\sum \frac{g_\alpha}{U_\alpha} \leqslant \frac{1}{4}$. Совокупность всех $U^{am}(U_\alpha)$ примем за полную систему окрестностей нуля в G. *Получающаяся таким образом топологизация группы G эквивалентна, в силу неравенства* (2), *звездообразной топологизации группы G* [см. ([2]), п. 3].

4.54. Наряду с звездообразной топологизацией группы $G = \sum (G_\alpha : H_\alpha)$ нами была введена [([2]), п. 3] свободная топологизация, рассматриваемая как сумма всех топологизаций, индуцирующих на каждом из слагаемых G_α его топологию, а на подгруппе $H = \underset{\alpha}{S} H_\alpha$ — тихоновскую топологию. Связь свободной и звездообразной топологизаций дается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 8. *Если прямые слагаемые G_α и фактор-группы G_α/H_α локально квазивыпуклы, то звездообразная топологизация группы $G = \sum (G_\alpha : H_\alpha)$ является приведением в смысле* 2.3 *ее свободной топологизации.*

Доказательство. Пусть $V^2 \subset U$, где U и V — свободные окрестности нуля группы G. Тогда для любого α $V_\alpha{}^2 \subset U_\alpha$, где положено $V_\alpha = V \cap G_\alpha$ и $U_\alpha = U \cap G_\alpha$. Но почти все V_α содержат H_α, так как $V \cap H$ должно быть тихоновской окрестностью группы $H = \underset{\alpha}{S} H_\alpha$ Поэтому почти при всех α $H_\alpha \Subset U_\alpha$, и мы можем, в силу локальной квазивыпуклости G_α и G_α / H_α, построить такие квазивыпуклые окрестности нуля $W_\alpha \subset U_\alpha$, что почти при всех α будем иметь $H_\alpha \Subset W_\alpha$. Пусть $W = U^a(W_\alpha)$. Из 2.11 вытекает, что W содержится в квазивыпуклой оболочке множества $W^* = \bigcup_\alpha W_\alpha$, а тем более в квазивыпуклой оболочке окрестности U. Поэтому звездообразная топологизация больше, чем топологизация, получающаяся при приведении свободной.

Покажем, с другой стороны, что множество $U^{am}(W_\alpha) = T$ квазивыпукло. В самом деле, пусть $h \overline{\in} T$, причем

$$h = \sum h_\alpha, \quad h_\alpha \in G_\alpha.$$

Тогда либо существует такой индекс α_0, что $h_{\alpha_0} \overline{\in} W_{\alpha_0}$, либо $\sum \frac{h_\alpha}{W_\alpha} > \frac{1}{4}$. В первом случае существует такой характер χ_{α_0} группы G_{α_0}, что $|\chi_{\alpha_0}(W_{\alpha_0})| \leqslant \frac{1}{4}$,

в то время как $|\chi_{\alpha_0}(h_{\alpha_0})| > \frac{1}{4}$. Полагая для остальных индексов $\chi_\alpha = 0$ и полагая

$$\chi(g) = \sum \chi_\alpha(g_\alpha), \quad (g_\alpha) = g,$$

мы получим такой характер группы G, что $|\chi(T)| \leqslant \frac{1}{4}$, в то время как $|\chi(h)| > \frac{1}{4}$. Во втором случае, пользуясь тем, что для любого α $\frac{h_\alpha}{W_\alpha} \leqslant \frac{1}{4}$, мы можем выбрать конечное множество индексов α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ так, чтобы

$$\frac{1}{4} < \sum_{i=1}^{n} \frac{h_{\alpha_i}}{W_{\alpha_i}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Для каждого индекса α_i мы можем, по определению символа $\frac{h_{\alpha_i}}{W_{\alpha_i}}$, выбрать характер χ_{α_i} группы G_{α_i} так, что

$$|\chi_{\alpha_i}(W_{\alpha_i})| \leqslant \frac{1}{4}$$

и

$$\frac{1}{4} < \sum_{i=1}^{n} \chi_{\alpha_i}(h_{\alpha_i}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Полагая для остальных индексов $\chi_\alpha = 0$ и полагая

$$\chi(g) = \sum \chi_\alpha(g_\alpha), \quad g = (g_\alpha),$$

мы получаем такой характер χ группы G, что для любого элемента $g = (g_\alpha)$ из T

$$|\chi(g)| \leqslant \sum \frac{g_\alpha}{W_\alpha} \leqslant \frac{1}{4},$$

в то время как $|\chi(h)| > \frac{1}{4}$. Но в каждой звездообразной окрестности содержится окрестность вида $U^{am}(W_\alpha)$ и потому звездообразная топологизация меньше, чем топологизация, получающаяся при приведении свободной. В сочетании с доказанным ранее мы получаем отсюда, что эти две топологизации эквивалентны.

§ 5. Некоторые примеры

5.1. Определение 7. Топологическая абелева группа с заданной ограниченностью называется *локально ограниченной*, если она обладает ограниченной окрестностью нуля, и *ограниченной*, если все множества группы G ограничены.

Из определения группы характеров вытекает, что *группа характеров локально ограниченной группы локально ограничена, группа характеров дискретной группы ограничена и группа характеров ограниченной группы дискретна.*

5.2. В работе (7) Фрейденталь указывает на топологизацию группы характеров данной группы, являющуюся топологизацией группы характеров группы, ограниченными множествами которой считаются лишь конечные множества.

5.21. Пусть G — локально бикомпактная абелева группа, в которой ограниченными считаются множества с бикомпактным замыканием, и H — ее всюду плотная подгруппа, являющаяся образом локально бикомпактной абелевой группы F при непрерывном гомоморфном отображении φ. Пусть X — группа характеров группы G, Φ — группа характеров для F и ψ — сопряженное с φ гомоморфное отображение группы X в Φ, определяемое формулой

$$\psi\chi(f) = \chi[\varphi(f)], \quad f \in F.$$

Назовем ограниченными в H образы ограниченных множеств группы F. Тогда группой характеров группы H будет $\psi(X)$.

5.3. Определение 8. Подмножество T топологической группы G называется *вполне ограниченным*, если для любой окрестности единицы U группы G можно найти такое конечное множество элементов x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что

$$T \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U.$$

5.31. ТЕОРЕМА 9. *Пусть G — топологическая абелева группа с заданной ограниченностью, причем все ограниченные множества в G вполне ограничены. Тогда любое множество $\Psi = N(U)$ в группе характеров X группы G, где U — замкнутая окрестность нуля в G, бикомпактно* [см. (3), стр. 114].

Доказательство. Каждому элементу x группы G поставим в соответствие группу T_x, изоморфную группу $\mathfrak{R}$. Прямая сумма Θ_0 всех этих групп является множеством всех функций $\vartheta(x)$ на группе G, принимающих значения из группы $\mathfrak{R}$. Множество Θ функций $\vartheta(x)$, удовлетворяющих всем соотношениям вида

$$\vartheta(x+y) = \vartheta(x) + \vartheta(y),$$

будет замкнутой и потому бикомпактной подгруппой группы Θ_0. Θ является множеством всех характеров дискретной группы, алгебраически изоморфной группе G, т. е. множеством всех алгебраических, но не обязательно непрерывных характеров группы G. Всякому характеру $\chi(x)$ соответствует некоторый элемент из Θ. Обозначим это отображение через β и покажем, что β является непрерывным гомоморфным отображением группы X на $\beta(X)$. В самом деле, топология в $\beta(X)$ совпадает с топологией, получающейся, если считать ограниченными лишь конечные множества. Но конечные множества ограничены в любой ограниченности, откуда и следует наше утверждение.

Пусть теперь U — замкнутая окрестность нуля в G и $\Psi = N(U)$. Пусть, далее, Φ — окрестность нуля в X, имеющая вид $\Phi = N(C)$, где C — ограниченное множество в G, и пусть V — такая окрестность нуля

в группе G, что $V^2 \subset U$. Тогда для любого $g \in V$ и любого элемента $\psi \in \Psi$ имеем

$$|\psi(g)| \leqslant \frac{1}{8}.$$

Кроме того, существует конечное число таких элементов s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} (s_i + V).$$

Поэтому, если $\varphi \in \Psi$ и для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$|\varphi(s_i)| \leqslant \frac{1}{8},$$

то

$$|\varphi(g)| \leqslant \frac{1}{4}$$

для всех $g \in C$.

Обозначим через Γ множество всех элементов из Θ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\vartheta(s_i)| \leqslant \frac{1}{8} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Γ является окрестностью нуля в Θ и

$$\beta^{-1}[\Gamma \cap \beta(X)] \subset \Phi.$$

Отсюда следует, что отображение β^{-1} непрерывно.

Покажем теперь, что множество $\beta(\Psi)$ замкнуто в Θ. Пусть

$$\vartheta(x) \in \overline{\beta(\Psi)}.$$

Тогда при любом $g \in C$ имеем

$$|\vartheta(g)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Кроме того, если $g \in U$, то

$$|\vartheta(g)| \leqslant \frac{1}{4}$$

и потому, в силу 4.15, $\vartheta(g)$ является непрерывным характером на G. Поэтому

$$\vartheta(g) \in \beta(\Psi).$$

Итак, $\beta(\Psi)$ замкнуто и потому бикомпактно. В силу непрерывности β^{-1}, бикомпактно и множество $\Psi = \beta^{-1}\beta(\Psi)$.

5.32. Определение 9. Топологическая группа G с заданной ограниченностью называется *группой с ограниченной сходимостью*, если для любого множества A и любого элемента $x \in A$ найдется такое ограниченное множество $B \subset A$, что $x \in \overline{B}$.

Легко видеть, что локально ограниченные группы, а также группы с первой аксиомой счетности, в которых ограниченными множествами считаются вполне ограниченные множества (см. 5.5), являются группами с ограниченной сходимостью.

5.33. ТЕОРЕМА 10. *Пусть G — топологическая абелева группа с заданной ограниченностью, и пусть сходимость в G ограничена, причем все ограниченные множества в G вполне ограничены. Тогда для любого бикомпактного множества Θ из группы характеров X группы G найдется такая окрестность нуля $U \subset G$, что $\Theta \subset N(U)$.*

Доказательство. Пусть для любой окрестности нуля $U_\alpha \subset G$ найдется такой элемент $u_\alpha \in U_\alpha$ и такой элемент $\vartheta_\alpha \in \Theta$, что

$$|\vartheta_\alpha(u_\alpha)| > \frac{1}{4}.$$

Обозначим совокупность всех u_α через V. Так как $0 \in \overline{V}$, то существует ограниченное множество $T \subset V$ такое, что $0 \in \overline{T}$. Для каждой окрестности нуля U_α найдется элемент

$$v_\alpha \in U_\alpha \cap T.$$

Совокупность всех элементов v_α обозначим через W. Очевидно, что $0 \in \overline{W}$. Введем теперь в W частичную упорядоченность, считая $v_\alpha > v_\beta$, если $U_\alpha \subset U_\beta$. Тогда W будет направленным множеством с индексами из частично упорядоченного множества Δ. Совокупность всех ϑ_α, $\alpha \in \Delta$, также образует направленное множество, и, в силу бикомпактности Θ, из него можно извлечь конфинальное сходящееся направленное множество Ψ, индексы которого образуют множество Γ. Совокупность Z элементов v_α, $\alpha \in \Gamma$, сходится к нулю и ограничена. Поэтому $\Phi = N(Z)$ является окрестностью нуля в X.

Пусть

$$\vartheta = \lim \vartheta_\alpha, \quad \alpha \in \Gamma.$$

Так как ϑ является непрерывным характером группы G, то существует такая окрестность нуля $U \subset G$, что

$$|\vartheta(U)| \leqslant \frac{1}{8}.$$

Обозначим через P совокупность таких индексов из Γ, что $\alpha \in P$ влечет за собой $v_\alpha \in U$. Очевидно, P конфинально Γ. Через Ψ обозначим такую окрестность нуля группы X, что

$$\Psi^2 \subset \Phi.$$

Найдется такой индекс $\alpha \in P$, что

$$\vartheta_\alpha = \vartheta + \psi,$$

где $\psi \in \Psi$. Но тогда

$$|\psi(u_\alpha)| \leqslant \frac{1}{8}$$

и потому

$$|\vartheta_\alpha(u_\alpha)| \leqslant |\vartheta(u_\alpha)| + |\psi(u_\alpha)| \leqslant \frac{1}{4},$$

вопреки выбору элементов u_α и ϑ_α. Получившееся противоречие доказывает теорему.

5.4. Если в группе G задана двусторонне инвариантная метрика, то совокупность всех подмножеств, имеющих в этой метрике конечный диаметр, задает в G ограниченность. В самом деле, так как

$$\rho(x, y) = \rho(x^{-1}; y^{-1}),$$

то выполнено условие 1) определения 1. Условия 2) и 4) этого определения выполняются тривиальным образом.

Пусть теперь множества A и B ограничены, a_1 и a_2 лежат в A, b_1 и b_2 лежат в B. Тогда

$$\rho(a_1b_1; a_2b_2) \leqslant \rho(a_1b_1; a_1b_2) + \rho(a_1b_2; a_2b_2) = \\ = \rho(b_1; b_2) + \rho(a_1; a_2),$$

откуда вытекает ограниченность множества AB. Кроме того,

$$\rho(a_2; b_2) \leqslant \rho(a_1; a_2) + \rho(a_1; b_1) + \rho(b_1; b_2),$$

откуда вытекает ограниченность множества $A \cup B$.

5.5. Отметим, что *совокупность всех вполне ограниченных множеств группы G может быть принята за совокупность всех ограниченных множеств.*

В самом деле, условия 1), 2), 4) определения 1 выполняются тривиальным образом. Тривиально также, что объединение двух вполне ограниченных множеств вполне ограничено. Пусть теперь A и B — вполне ограниченные множества и U — окрестность единицы группы G. Тогда найдется такая окрестность единицы V, что $V^2 \subset U$. В силу полной ограниченности B, существует конечное множество таких элементов $b_1, \ldots, b_n$, что

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{n} b_k V.$$

Пусть W — такая окрестность единицы группы G, что при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$Wb_k \subset b_k V.$$

Тогда существует конечное множество $a_1, \ldots, a_n$ таких элементов, что

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} a_k W.$$

Положим $c_{kt} = a_k b_t$. Тогда

$$AB \subset \bigcup c_{kt} U.$$

В самом деле, пусть $c = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда существуют такие k, t, что

$$c \in a_k W b_t V \subset a_k b_t V^2 \subset c_{kt} U.$$

5.51. Указанная в 5.5 ограниченность наиболее естественным образом связана с заданной топологией группы G. Покажем теперь, что *если в абстрактной абелевой группе G задана ограниченность, то существует такая топологизация группы G, что все ограниченные множества вполне ограничены в этой топологии.*

Пусть X — группа характеров группы G, рассматриваемой как дискретная группа. Введем в группу X топологию, используя заданную ограниченность группы G, и назовем ограниченными в X множества, вполне ограниченные в этой топологии. Пусть $\hat{G}$ — группа характеров группы X с описанными ограниченностью и топологией. Тогда существует описанное в 3.32 гомоморфное отображение α группы G в $\hat{G}$. Так как для каждого элемента $g \in G$ существует такой характер χ, что $\chi(g) \neq 0$, то это отображение является алгебраически изоморфным. Топология, индуцируемая на G при отображении α, и является искомой. В самом деле,

пусть A — ограниченное множество в G. Тогда, в силу теоремы 9, множество $\mathfrak{a} = N(N(A))$ бикомпактно, причем $\alpha(A) \subset \mathfrak{a}$, и потому вполне ограничено. (Последнее утверждение вытекает из того, что если H — подгруппа группы F и T — бикомпактное множество в F, то $T \cap H$ вполне ограничено в H.)

5.52. Отметим, что *построенная выше топологизация группы G является наибольшей локально квазивыпуклой топологизацией, при которой все ограниченные множества вполне ограничены.*

В самом деле, пусть G_1 — иным образом топологизированная группа G, причем все ограниченные множеста группы G вполне ограничены в G_1 и группа G_1 локально квазивыпукла. Пусть U — квазивыпуклая окрестность нуля в G_1. Тогда, по теореме 9, подмножество $T_1 = N(U)$ группы характеров X_1 группы G_1 бикомпактно. Очевидно, что существует непрерывное гомоморфное отображение β группы X_1 в X. Множество $T = \beta(T_1)$ бикомпактно в X и потому множество $Q = N(T)$ является окрестностью нуля в $\hat{G}$, а $\alpha(G) \cap Q$ — окрестностью нуля в $\alpha(G)$. Но из квазивыпуклости U вытекает, что $\alpha(U) = \alpha(G) \cap Q$, и потому U является окрестностью нуля в построенной в 5.51 топологизации группы G. Наше утверждение доказано.

5.6. Каждое линейное нормированное пространство можно рассматривать как топологическую абелеву группу. Ограниченными подмножествами этого пространства назовем множества, содержащиеся в некоторой сфере. Легко видеть, что при этом наше пространство превращается в группу с заданной ограниченностью. Назовем две нормы, заданные в некотором пространстве L, эквивалентными, если они индуцируют одну и ту же топологию. Нетрудно видеть, что они индуцируют и одинаковые ограниченности. Если две нормы эквивалентны, то соответствующие им сопряженные пространства состоят из одних и тех же элементов, причем нормы в этих пространствах также эквивалентны.

Каждый линейный функционал f линейного нормированного пространства индуцирует характер этого пространства, рассматриваемого как топологическая группа. Обратно, каждому характеру соответствует линейный функционал, индуцирующий этот характер. Поэтому пространство $\overline{L}$, сопряженное с данным пространством L, состоит из тех же элементов, что и группа характеров для L. Легко видеть, что топология, задаваемая в $\overline{L}$ нормой, совпадает с топологией, задаваемой в $\overline{L}$ согласно 3.1. Поэтому результаты § 3 и 4 могут быть применены для построения теории сопряженных линейных пространств. Этим объясняется аналогия, существующая между теорией характеров и теорией сопряженных пространств.

Поступило
9. XII. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва, ОНТИ, 1938

[2] Виленкин Н. Я., Теория топологических групп. II, Успехи мат. наук, 5, вып. 4 (1950), 19—74.

[3] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его приложения, ИЛ, 1950.

[4] Sze-Tsen Hu, Boundedness in a topological space, Journ. Math. pures et appl., 28 (1949), 287—320.

[5] Граев М. И., Теория топологических групп. 1, Успехи мат. наук, 5, вып. 2 (1950), 3—56.

[6] Люстерник Л. А., Основные понятия функционального анализа, Успехи мат. наук, 1 (1936), 77—140.

[7] Freudenthal H., Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen, Comp. Math., 4 (1937), 145—234.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 463—476

В. А. ЗАЛГАЛЛЕР

ВАРИАЦИИ КРИВЫХ ВДОЛЬ ФИКСИРОВАННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

В статье вводится понятие индикатрисы вариаций кривой как центрально-симметричного выпуклого тела, опорная функция которого равна вариации кривой в соответствующем направлении. При помощи этого понятия исследуется связь вариаций сходящихся кривых и предельной кривой. Попутно устанавливается, что многогранник, являющийся пределом выпуклых многогранников с центрально-симметричными гранями, сам имеет центрально-симметричные грани.

§ 1. Кривая. Длина и вариация кривой

Кривой $\mathfrak{L} = X(t)$ в пространстве E^n, как обычно, называем непрерывный образ отрезка $a \leqslant t \leqslant b$, рассматриваемый вместе с тем порядком точек, который определяется в нем указанным отображением. Точнее: Сначала как кривые рассматриваются образы отрезка вместе с самими отображениями. Расстояние $\rho(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ между так определенными кривыми $\mathfrak{L}_1 = X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и $\mathfrak{L}_2 = X(u)$, $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, определяется равенством

$$\rho(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \inf_T [\max_t |X_1(t) - X_2[T(t)]|],$$

где T — всевозможные сохраняющие порядок топологические отображения отрезка $[a, b]$ на отрезок $[\alpha, \beta]$.

Затем, кривые, расстояние между которыми равно нулю, перестают различаться и считаются одной и той же кривой. Данное выше определение расстояния очевидным образом распространяется на определенные таким образом кривые *.

---

* Это определение несколько отличается от обычного (M. Fréché, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendic. Circ. Mat. Palermo, XXII (1906), стр. 51). Принятый вариант определения сообщен автору С. М. Лозинским, в связи с одним из докладов которого возникла настоящая работа и которому автор весьма признателен за ряд советов. Использованное определение, сохраняя основные результаты Фреше о пространстве кривых, избегает частных оговорок о вырождающихся случаях и допускает, в отличие от определения Фреше, рассмотрение таких параметризаций, при которых на некоторых участках изменения параметра точка не движется по кривой.

Следуя более наглядной геометрической тенденции, можно сначала ввести понятие кривой, а затем уже определить расстояние непосредственно между введенными кривыми. Однако самое определение будет при этом более громоздким. Наметим такое определение.

1. Сначала как кривые рассматриваются образы отрезка вместе с самими

Длиной кривой называется точная верхняя граница длин вписанных ломаных. Кривая конечной длины называется спрямляемой.

Вариацией ломаной в направлении вектора $\bar{e}$ называется сумма длин проекций ее звеньев на $\bar{e}$, а вариацией кривой — точная верхняя граница вариаций вписанных ломаных *.

Отметим простейшие взаимосвязи этих понятий.

1. Спрямляемая кривая, очевидно, во всяком направлении имеет конечную вариацию, не превосходящую длины кривой.

2. Кривая, имеющая конечные вариации в направлениях n линейно независимых векторов, спрямляема. Действительно, в силу линейной независимости избранных n векторов, всякое направление в E^n образует хоть с одним из них угол, отличный от прямого более чем на некоторое $\delta > 0$. Но тогда всякая ломаная длины l будет иметь хоть в одном из избранных направлений вариацию, большую чем $\frac{l}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$. Значит, из ограниченности таких вариаций следует ограниченность длины.

3. Известно, что на спрямляемой кривой $\mathfrak{L} = X(s)$ в качестве параметра может быть избрана длина дуги s. Обозначим через $x(s)$ проекцию

отображениями, т. е. множества в E^n вместе с определенной параметризацией $X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Далее, между геометрически совпадающими точками $X(t_1) = X(t_2)$ $(a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b)$ сохраняется различие только в том случае, если существует лежащее между t_1 и t_2 значение параметра t_3, при котором $X(t_3) \neq X(t_1) = X(t_2)$; в противном случае все точки $X(t)$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ считаются за одну точку кривой. В этом смысле употребляется затем понятие точки кривой.

В множестве точек кривой естественным образом определяется понятие следования.

Наконец, если две кривые совпадают как множество точек пространства E^n и если, кроме того, их различаемые кратные точки могут быть поставлены в такое взаимно однозначное соответствие, что в результате сохраняется порядок соответствующих точек кривых, то кривые не различаются и считаются одной кривой.

2. Расстояние $\rho(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ между так определенными невырождающимися в точку кривыми $\mathfrak{L}_1 = X_1(t)$ и $\mathfrak{L}_2 = X_2(u)$ определяется равенством:

$$\rho(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \inf_T \left[\max_t |X_1(t) - T[X_1(t)]|\right],$$

где T — всевозможные сохраняющие порядок точек взаимно однозначные отображения множеств точек кривой $\mathfrak{L}_1$ на $\mathfrak{L}_2$.

Если одна из кривых, например $\mathfrak{L}_1$, вырождается в точку X, то расстояние $\rho(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ определяется равенством:

$$\rho(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \min_{X_2(u)} |X - X_2(u)|.$$

* Собственно говоря, вариация кривой это длина другой кривой, описанной при движении точки по исходной кривой проекцией этой точки на избранное направление. Можно сказать, что вариация в данном направлении — это вариация вне двух координат (по осям, ортогональным избранному направлению). Простая аналогия приводит к понятию вариации кривой в данной плоскости (вне одной координаты). При замене простого ортогонального проектирования проектированием вдоль координатных линий (при криволинейных координатах) можно получать другие аналогичные понятия вариации кривой вне некоторой части координат.

точки $X(s)$ на числовую ось, идущую в направлении некоторого единичного вектора $\bar{e}$. Из самих определений длины и вариации кривой следует, что функция $x(s)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\Delta x(s)| \leqslant |\Delta s|$$

и имеет конечную вариацию, равную вариации $V_{\bar{e}}(\mathfrak{L})$ кривой $\mathfrak{L}$ в направлении $\bar{e}$.

Повторяя это рассмотрение для n линейно независимых векторов $\bar{e}$, убеждаемся, что кривая $\mathfrak{L}$ почти везде имеет касательную, определенную единичным вектором $\bar{t}(s)$, и там, где последняя существует, заведомо существует и производная $\frac{d}{ds}x(s)$, равная

$$\frac{d}{ds}x(s) = et;$$

поскольку $x(s)$ — абсолютно непрерывная функция, то ее вариация равна интегралу от модуля ее производной.

Вариация спрямляемой кривой $\mathfrak{L}$ длины l выражается интегралом Лебега:

$$V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}) = \int_0^l |et|\, ds.$$

4. Вариация спрямляемой кривой длины l, как функция направления, удовлетворяет условию Липшица:

$$|V_{\bar{e}_1} - V_{\bar{e}_2}| \leqslant \int_0^l |(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\,\bar{t}|\, ds = |\bar{e}_1 - \bar{e}_2| \cdot V_{\bar{e}_1 - \bar{e}_2} \leqslant$$
$$\leqslant |\bar{e}_1 - \bar{e}_2| \cdot \max_e V_{\bar{e}} \leqslant l \cdot |\bar{e}_1 - \bar{e}_2|.$$

5. ТЕОРЕМА 1. *Длина l спрямляемой кривой $\mathfrak{L}$ равна взятому по поверхности n-мерной единичной сферы C интегралу от вариации этой кривой в соответствующем направлении, разделенному на удвоенную $(n-1)$-мерную площадь S_d диаметрального сечения единичной сферы C.*

$$l = \frac{1}{2S_d} \int\int\cdots_C \int V_{\bar{e}}(\mathfrak{L})\, d\sigma_{\bar{e}}. \tag{1}$$

Для доказательства вычислим стоящий справа интеграл:

$$\int\cdots_C\int V_{\bar{e}}(\mathfrak{L})\, d\sigma = \int\cdots_C\int \left[\int_0^l |et|\, ds\right] d\sigma.$$

Ограниченность подинтегральной функции позволяет переменить порядок интегрирования:

$$\int\cdots_C\int \left[\int_0^l |\bar{e}\bar{t}|\, ds\right] d\sigma = \int_0^l \left[\int\cdots_C\int |et|\, d\sigma\right] ds.$$

Разделим поверхность C на две полусферы, на каждой из которых произведение $\bar{e}\bar{t}$ сохраняет знак, и произведем интегрирование:

$$\int_{C}\cdots\int V_{\bar{e}}(\mathfrak{L})\,d\sigma = 2\int_0^l \Big[\int_{\frac{C}{2}}\cdots\int \bar{e}\bar{t}\,d\sigma\Big]\,ds = 2S_d l$$

$\left(\frac{C}{2}\right.$ — та часть сферы, на которой $\left.\bar{e}\bar{t} > 0.\right)$

Простейшим следствием формулы (1) является планиметрическая теорема Барбье о равенстве длин кривых постоянной ширины.

6. Кривые $\mathfrak{L}_i$ называются сходящимися к кривой $\mathfrak{L}$ (обозначение: $\mathfrak{L}_i \to \mathfrak{L}$), если $\rho(\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}) \to 0$.

Если кривые $\mathfrak{L}_i$ сходятся к кривой $\mathfrak{L}$, то во всяком направлении вариации предельной кривой не превосходят нижнего предела вариаций сходящихся кривых. Действительно, для всякой ломаной L, вписанной в $\mathfrak{L}$, при достаточно больших i ломаная, вписанная в $\mathfrak{L}_i$ и соответствующая L по значению параметра в вершинах, будет отличаться по вариации от L на величину, меньшую наперед заданного $\varepsilon > 0$, откуда и подавно следует, что

$$V_{\bar{e}}(L) \leqslant V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}_i) + \varepsilon.$$

Переходя справа к нижнему пределу и устремляя ε к нулю, а слева — беря точную верхнюю границу, получим:

$$V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}) \leqslant \varliminf_{\mathfrak{L}_i \to \mathfrak{L}} V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}_i).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для длин.

7. Из пп. 6, 4, 5 можно непосредственно получить теорему Адамса и Леви:

Если $\mathfrak{L}_i \to \mathfrak{L}$ и длины кривых $\mathfrak{L}_i$ сходятся к длине $\mathfrak{L}$, то во всяком направлении вариации кривых $\mathfrak{L}_i$ сходятся к вариации $\mathfrak{L}$.

8. Нетрудно привести пример ломаных L_i, сходящихся к некоторому отрезку L вместе с вариациями во всех направлениях, кроме направлений, лежащих в некотором сколь угодно узком секторе, причем длины ломаных L_i не будут сходиться к длине L.

Однако из п.5 следует результат, в известной мере обратный утверждению п.7.

ТЕОРЕМА 2. *Если вариации кривых $\mathfrak{L}_i$ для везде плотного множества направлений сходятся к вариации спрямляемой кривой $\mathfrak{L}$, то длины кривых $\mathfrak{L}_i$ сходятся к длине $\mathfrak{L}$.* При этом сходимость самих кривых не предполагается.

Доказательство. Из п.2 следует, что длины $\mathfrak{L}_i$, начиная с некоторых значений i, ограничены в совокупности. Тогда из п. 4 следует, что сходимость вариаций имеет место для всех направлений $\bar{e}$ (и даже равномерно для всех e). Но тогда сходятся и интегралы этих вариаций по поверхности единичной сферы и, в силу теоремы 1, длины кривых $\mathfrak{L}_i$ сходятся к длине $\mathfrak{L}$.

§ 2. Индикатриса вариаций

Индикатрисой вариаций $P(\mathfrak{L})$ спрямляемой кривой $\mathfrak{L} = X(s)$ длины l назовем совокупность концов векторов $\bar{R}$, представимых в виде:

$$\bar{R} = \int_0^l \mu(s)\,\bar{t}(s)\,ds,$$

где $\bar{t}(s)$ — единичный вектор касательной к $\mathfrak{L}$ в точке, отвечающей длине s, а $\mu(s)$ — произвольная измеримая функция, по абсолютной величине не превосходящая единицы.

ТЕОРЕМА 3. *Индикатриса вариаций есть центрально-симметричное выпуклое тело с центром в начале координат, опорная функция которого (расстояние от начала координат до опорной плоскости с нормалью $\bar{e}$) совпадает с вариацией кривой $V_{\bar{e}}(\mathfrak{L})$.*

Действительно, во-первых, совокупность концов указанных векторов $\bar{R}$ образует выпуклое множество, поскольку из принадлежности к этой совокупности концов $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ следует принадлежность к ней всякого вектора $\lambda\bar{R}_1 + (1-\lambda)\bar{R}_2$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Во-вторых, соблюдается неравенство

$$\bar{R}\bar{e} \leqslant \int_0^l |\bar{e}\bar{t}|\,ds = V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}).$$

Наконец, равенство $\bar{R}\bar{e} = V_{\bar{e}}(\mathfrak{L})$ достигается для $\bar{R}$, отвечающего функции

$$\mu(s) = \operatorname{sign} \bar{e}\bar{t}(s).$$

Замечание 1. Если кривая $\mathfrak{L}$ состоит из участков $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, то индикатриса $P(\mathfrak{L})$ получается как тело, зачерчиваемое параллельно переносимым телом $P(\mathfrak{L}_1)$, когда его центр перемещается в $P(\mathfrak{L}_2)$. В теории смешанных объемов это построение называется сложением выпуклых тел:

$$P(\mathfrak{L}) = P(\mathfrak{L}_1) + P(\mathfrak{L}_2).$$

Замечание 2. Можно рассматривать $P(\mathfrak{L})$ с точностью до параллельного переноса и в этом смысле называть индикатрисой вариаций $\mathfrak{L}$ тело $P(\mathfrak{L})$, центр которого не находится в начале координат.

Замечание 3. Для ломаной, состоящей из векторов $\bar{r}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, индикатриса вариаций заполняется концами векторов $\bar{R}$, представимых в виде

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \bar{r}_i, \quad |\theta_i| \leqslant 1. \tag{1}$$

Отсюда непосредственно следует

ЛЕММА 1. *Для того чтобы вектор $\bar{R}$ был представим через заданные векторы $\bar{r}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ в виде (1), необходимо и достаточно, чтобы проекция $\bar{R}$ на любое направление не превосходила вариации в том же направлении ломаной L, составленной из векторов $\bar{r}_i$.*

Необходимость очевидна. Достаточность следует из того, что если бы вектор $\bar{R}$ не был представим в указанной форме, то его конец не принадлежал бы индикатрисе вариаций $P(L)$ и отделялся от выпуклого тела $P(L)$ некоторой опорной плоскостью с нормалью $\bar{e}$. Но тогда проекция R на $\bar{e}$ была бы больше расстояния от центра до этой опорной плоскости:

$$V_e(L) < |\bar{R}\bar{e}|,$$

вопреки предположению. Лемма 1 понадобится нам в § 3.

Индукцией по числу звеньев можно проверить, что для ломаной индикатриса вариаций представляет собой выпуклый многогранник $P(L)$, все грани которого (всех измерений) центрально-симметричны. Ребра $P(L)$ параллельны звеньям ломаной L и равны по длине удвоенной сумме длин параллельных этому направлению звеньев L. С точки зрения теории смешанных объемов, тело $P(L)$ с точностью до параллельного переноса есть удвоенная сумма ребер ломаной L.

На плоскости, конечно, всякая центрально-симметричная выпуклая фигура есть индикатриса вариаций некоторой кривой, например, подобно уменьшенного вчетверо контура этой фигуры.

Для всякой спрямляемой кривой существует последовательность вписанных ломаных L_n, вариации которых равномерно по всем направлениям сходятся к вариации самой кривой. Поскольку из сходимости опорных функций следует сходимость* самих выпуклых тел, то всякое тело P, являющееся индикатрисой вариаций некоторой кривой $\mathfrak{L}$, необходимо должно быть пределом выпуклых многогранников $P(L_n)$ с центрально-симметричными гранями.

Для трехмерных многогранников мы можем формулировать необходимое и достаточное условие:

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы выпуклый многогранник был индикатрисой вариаций некоторой кривой, необходимо и достаточно, чтобы его грани имели центры симметрии.*

Достаточность. Если каждая грань многогранника P имеет центр симметрии, то, начав с произвольного ребра $\bar{r}_1$ и переходя каждый раз к следующему, симметричному с предыдущим в одной из прилегающих граней, мы получим на многограннике P пояс из параллельных друг другу ребер r_1. Удаляя из многогранника весь этот пояс и сдвигая две оставшиеся части многогранника, мы получим вновь многогранник с центрально-симметричными гранями. Продолжая эту операцию, мы исчерпаем наш многогранник и получим ряд векторов $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_m$. Следуя по индукции в обратном порядке, легко заключить, что исходный многогранник заполняется концами векторов R, представимых в виде:

$$R = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{r_i}{2}, \quad |\theta_i| \leqslant 1.$$

* Имеется в виду сходимость тел в смысле топологического предела. (Множества M_n сходятся к M, если в любую окрестность каждой точки $X \in M$ попадают точки всех M_n, начиная с некоторого n, и если никакая точка $X \bar{\in} M$ этим свойством не обладает.)

Таким образом, P есть индикатриса вариаций ломаной, составленной из звеньев $\frac{\bar{r}_1}{2}, \frac{\bar{r}_2}{2}, \ldots, \frac{\bar{r}_m}{2}$. (Попутно лишний раз доказана элементарно стереометрическая теорема А. Д. Александрова о том, что всякий многогранник с центрально-симметричными гранями имеет центр симметрии.)

Для установления необходимости условия достаточно показать, что замкнутый многогранник, являющийся пределом выпуклых многогранников с центрально-симметричными гранями, сам имеет центрально-симметричные грани. Это утверждение есть частный случай следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Если замкнутое выпуклое тело F является пределом выпуклых многогранников с центрально-симметричными гранями, то общая часть Q произвольной опорной плоскости M с границей тела F имеет центр симметрии* *.

Доказательство. Пусть $P(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$ — многогранник, являющийся индикатрисой вариаций ломаной, состоящей из звеньев $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n$. Из определения $P(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$ легко заключить, что его грань с нормалью n заполняется векторами вида:

$$\sum_{i=1}^{p} \theta_i \bar{r}_i + \sum_{i=p+1}^{n} \operatorname{sign}(\bar{n}\bar{r}_i)\cdot \bar{r}_i, \quad |\theta_i| \leqslant 1,$$

где $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_p$ — векторы, ортогональные $\bar{n}$.

Выделим из векторов $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n$ те векторы $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_k$, которые образуют с опорной плоскостью M угол, не превосходящий фиксированного $\varepsilon > 0$, и рассмотрим многогранник P_ε, заполняемый концами векторов вида:

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i \bar{r}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \operatorname{sign}(\bar{n}\bar{r}_i)\,.\,\bar{r}_i, \quad |\theta_i| \leqslant 1.$$

Нетрудно проследить, что всякая грань многогранника $P(r_1, \ldots, \bar{r}_n)$, нормаль которой образует с $\bar{n}$ угол $< \varepsilon$, является одновременно и гранью P_ε. Наглядно, P_ε есть индикатриса $P(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_k)$, сдвинутая в направлении $\bar{n}$ до «плотного прилегания» изнутри к поверхности $P(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$.

Пусть теперь $P^n = P^n(\bar{r}_1^n, \ldots, \bar{r}_{m_n}^n)$ — многогранники, сходящиеся к F, и пусть Q — общая часть F и его опорной плоскости M с нормалью $\bar{n}$. Очевидно, Q выпукло и если Q есть точка или отрезок, то теорема тривиальна. Пусть Q — плоская область.

Зададимся последовательностью $\varepsilon_m \to 0$ и рассмотрим все многогранники $P_{\varepsilon_m}^n$. При каждом фиксированном ε_m из них можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому телу $\Phi(\varepsilon_m)$, а из тел $\Phi(\varepsilon_m)$ выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому телу Φ.

---

* Для бесконечных тел F это не так. Трехгранный угол, например, есть предел подобно увеличивающихся параллелепипедов, но его грани не имеют центров симметрии.

Конечно, уже некоторые из тел $P^n_{\varepsilon_m}$, $\Phi(\varepsilon_m)$ могут вырождаться в точку, отрезок или плоскую область, а для Φ это даже обязательно. Существенно, что все это — центрально-симметричные, выпуклые фигуры. Мы докажем, что Φ совпадает с Q.

Все многогранники $P^n_{\varepsilon_m}$ содержат те точки многогранников P^n, через которые проходят опорные плоскости с нормалью $\bar{n}$. Эти точки могут сходиться лишь к точкам Q, а потому Φ имеет с Q хоть одну общую точку. Из замкнутости F следует, что для больших n ограничены все суммы $\sum_{i=1}^{m_n} \left| \bar{r}_i^n \right|$, а потому при малых ε_m малы толщины тел $P^n_{\varepsilon_m}$ в направлении $\bar{n}$. В пределе заключаем, что Φ — плоская фигура.

Итак, $\Phi \subset M$. Кроме того, очевидно, $\Phi \subset F$, откуда следует:

$$\Phi \subset Q.$$

Пусть X — внутренняя точка области Q, а X_n — сходящиеся к ней точки на поверхностях многогранников P^n. Очевидно, при больших n точки X_n могут принадлежать лишь тем граням P^n, которые образуют с плоскостью Q угол, меньший ε_m. Но тогда точки X_n принадлежат и $P^n_{\varepsilon_m}$, а с ними и $\Phi(\varepsilon_m)$. Предел же точек X_n должен принадлежать Φ.

Итак, Φ содержит все внутренние точки Q; добавляя к этому замкнутость Φ как предела, заключаем:

$$\Phi \supset Q,$$

что вместе с предыдущим включением доказывает совпадение $\Phi = Q$, а с ним и теорему.

§ 3. Общая связь вариаций сходящихся кривых и предельной кривой

Мы хотим показать, что на плоскости связь вариаций сходящихся кривых и предельной кривой в некотором смысле исчерпывается неравенством:

$$V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}) \leqslant \varliminf_{\mathfrak{L}_i \to \mathfrak{L}} V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}_i).$$

ТЕОРЕМА 6. *Если на плоскости заданы спрямляемые кривые $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$, причем во всяком направлении $\bar{e}$ кривая $\mathfrak{L}_1$ имеет вариацию, не меньшую чем кривая $\mathfrak{L}$, то существует последовательность кривых $\mathfrak{L}_n$, сходящихся к $\mathfrak{L}$, в то время как их вариации во всех направлениях сходятся к вариациям $\mathfrak{L}_1$*. В трехмерном пространстве это не так.*

---

* Соблюдение во всяком направлении $\bar{e}$ неравенства $V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}_1) \leqslant V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}_2)$ эквивалентно тому, что индикатриса вариаций первой кривой содержится в индикатрисе вариаций второй кривой: $P(\mathfrak{L}_1) \subset P(\mathfrak{L}_2)$.

Мы докажем несколько большее: *кривые $\mathfrak{L}_n$ могут быть получены из кривой $\mathfrak{L}_1$ простой перестановкой ее участков. При этом их вариации будут все время просто совпадать с вариациями $\mathfrak{L}_1$.*

Помимо доказанной в § 2 леммы 1, нам понадобится еще следующая

ЛЕММА 2. *Пусть на плоскости* даны две ломаные: L_1, состоящая из векторов $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_m$, и L_2, состоящая из векторов $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_n$, причем*

$$P(L_1) \subset P(L_2);$$

тогда ломаная L_2 может быть перегруппирована в две ломаные L_2' и L_2'', состоящие соответственно из векторов $\theta_i \bar{R}_i$ и $(1-\theta_i)\bar{R}_i$, где $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, таким образом, что будут одновременно соблюдены условия:

$$P(\bar{r}_1) \subset P(L_2')$$

и

$$P(\bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_m) \subset P(L_2'').$$

Доказательство. Рассмотрим содержащиеся друг в друге центрально-симметричные выпуклые многоугольники $P(L_1) \subset P(L_2)$ (рис. 1). Звену $\bar{r}_1$ соответствуют равные $2\bar{r}_1$ участки AB и CD на противоположных сторонах многоугольника $P(L_1)$. Построим параллельные $\bar{r}_1$ прямые так, что их отрезки EF и GH, проходящие внутри или на сторонах многоугольника $P(L_2)$, будут равны $2\bar{r}_1$.

Частям EF и GH контура многоугольника $P(L_2)$ соответствует часть L_2' ломаной L_2, которая, очевидно, имеет во всяком направлении вариацию, не меньшую чем звено $\bar{r}_1$. Остальная часть контура многоугольника $P(L_2)$ соответствует части L_2'' ломаной L_2, которая имеет в каждом направлении вариацию, не меньшую чем оставшаяся часть ломаной L_1, состоящая из векторов $\bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_m$. Чтобы убедиться в последнем утверждении, достаточно вырезать из обоих многоугольников $P(L_1)$ и $P(L_2)$ полосу, заключенную между $EACG$ и $FBDH$, и сдвинуть оставшиеся части, что непосредственно приводит к заключению:

$$P(\bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_m) \subset P(L_2'').$$

Рис. 1

Обратимся теперь к доказательству теоремы 6.

1. Переход к ломаным. Если кривая $\mathfrak{L}$ является прямолинейным отрезком, то последующие рассуждения лишь упростятся (достаточно будет преобразований кривой $\mathfrak{L}_1$ такого типа, как проводимые ниже в п. 3).

---

* В пространстве большего числа измерений, как это следует из приводимого ниже примера, утверждение, подобное лемме 2, будет, вообще говоря, неверным.

Пусть $\mathfrak{L}$ отлична от прямой. Впишем в $\mathfrak{L}$ отличную от прямой ломаную, которую затем подобно уменьшим с центром подобия в начале кривой $\mathfrak{L}$ и с коэффициентом подобия, близким к единице. Мы получим таким образом ломаную L, близкую* к кривой $\mathfrak{L}$, причем будет соблюдено неравенство

$$\min_{\bar{e}} [V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}) - V_{\bar{e}}(L)] > 0.$$

В силу п. 4 § 1, можно выбрать конечное множество направлений $\bar{e}_j$ и такое $\delta > 0$, что всякая ломаная, имеющая ту же длину l_1, что и кривая $\mathfrak{L}_1$, и имеющая в избранных направлениях $\bar{e}_j$ вариации, отличающиеся от вариаций $\mathfrak{L}_1$, не более чем на δ, имеет во всех направлениях вариации, отличные от вариаций кривой $\mathfrak{L}_1$, не более чем на $\min_{\bar{e}} [V_{\bar{e}}(\mathfrak{L}) - V_{\bar{e}}(L)]$.

Чтобы доказать теорему 6 в усиленной формулировке, перейдем от кривой $\mathfrak{L}$ к ломаной посредством «геометризации» лебеговых сумм для интегралов

$$V_{\bar{e}_j}(\mathfrak{L}_1) = \int_0^l |\bar{e}_j \bar{t}|\, ds. \tag{1}$$

Разобьем область изменения единичных векторов $\bar{t}(s)$ на m столь мелких частей и выберем в каждой из них по вектору $\bar{t}_i$ таким образом, чтобы, во-первых, в пределах каждой части соблюдалось неравенство

$$|\bar{t}(s) - \bar{t}_i| < \frac{\varepsilon}{l_1} \tag{2}$$

и, во-вторых, чтобы лебеговы суммы

$$\sum_{i=1}^{m} |\bar{e}_j \bar{t}_i| \operatorname{mes} M_i$$

(где M_i — множество значений параметра s кривой $\mathfrak{L}_1$, при которых существует касательная с направлением $\bar{t}(s)$, принадлежащим к i-ой группе направлений), приближали с точностью δ интегралы (1) для всех направлений $\bar{e}_j$.

Теперь построим ломаную L_1, состоящую из звеньев $\bar{t}_i \operatorname{mes} M_i$. Для нее будут соблюдены неравенства

$$V_{\bar{e}}(L) < V_{\bar{e}}(L_1). \tag{3}$$

---

* Близкую в том смысле, что точки, отвечающие одному значению параметра, за который можно принять относительную длину дуги, удалены друг от друга менее, чем на заданное $\varepsilon > 0$.

2. Узловое совмещение ломаных. Разобьем ломаную L точками X_k на N частей L^k равной длины, меньшей ε. Пользуясь леммой 2, можно разбить L_1 на участки и перегруппировать их в N групп, образующих ломаные $L_1{}^k$ таким образом, что каждая из них порознь будет по вариации в любом направлении не меньше соответствующего участка ломаной L.

Применяя затем к каждому участку L^k и соответствующему участку $L_1{}^k$ лемму 1, мы можем разбить ломаную $L_1{}^k$, состоящую из звеньев $\bar{R}_i$, на участки

$$\frac{1+\theta_i}{2}\bar{R}_i, \qquad \frac{1-\theta_i}{2}\bar{R}_i,$$

$$0 \leqslant \theta_i \leqslant 1,$$

таким образом, что, последовательно проходя участки $\frac{1+\theta_i}{2}\bar{R}_i$ в прямом, а участки $\frac{1-\theta_i}{2}\bar{R}_i$ — в обратном направлениях, мы получим ломаную, имеющую с L^k общие начало и конец.

Таким образом, простой перестановкой кусков ломаной L_1 мы превратим ее в ломаную L_ε, совпадающую с L во всех точках деления X_k.

3. Общее сближение ломаных. На каждом участке X_kX_{k+1} ломаная L заведомо не выходит из прямоугольника размером 2ε на 3ε. Если на некотором участке ломаная L_ε выходит из пределов такого прямоугольника (рис. 2), то это можно устранить, несколько видоизменив ломаную L_ε. Пусть, например, L_ε пересекает граничную прямую прямоугольника в точках A и C и максимально удаляется за нее в точке B. Переставляя участки ломаной L_ε в последовательности X_kA, BC, AB, CX_{k+1}, заставим участок AC проходить по другую сторону граничной прямой. Конечным числом подобных операций добиваемся того, что каждый участок X_kX_{k+1} измененной ломаной L_ε' проходит в соответствующем прямоугольнике, и поэтому всякая точка участка X_kX_{k+1} ломаной L_ε' удалена от любой точки участка X_kX_{k+1} ломаной L менее чем на 4ε.

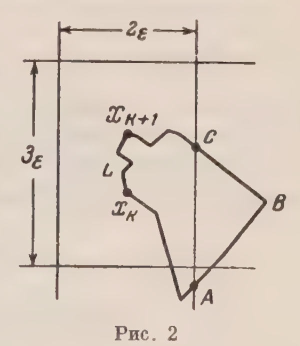


Рис. 2

4. Преобразование кривой $\mathfrak{L}_1$ соответственно ломаной L_ε'. Каждому звену $\bar{t}_i \operatorname{mes} M_i$ ломаной L_1 соответствовало на $\mathfrak{L}_1$ множество точек, в которых касательная $\bar{t}(s)$ близка (2) к $\bar{t}_i$. Каждому из звеньев $\bar{r}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ ломаной L_ε', полученной перестановкой участков L_1, можно поставить в соответствие множество m_j меры $\operatorname{mes} m_j = |\bar{r}_j|$ значений параметра s, при которых опять-таки касательные $\bar{t}(s)$ будут близки по направлению к $\bar{r}_j$. При этом m_j будут непересекающимися частями множеств M_i.

Обычная теория линейной меры Лебега позволяет показать, что найдутся непересекающиеся конечные системы τ_j неналегающих интервалов, каждая из которых покрывает почти целиком соответствующее множество m_j, оставляя непокрытым лишь его часть меры не более $\frac{\varepsilon}{2n}$, и покрывая часть точек, не принадлежащих m_j, также меры, не большей $\frac{\varepsilon}{2n}$, причем меры каждой системы τ_j будет совпадать с мерой m_j.

Наконец, разобьем кривую $\mathfrak{L}_1$ на участки, соответствующие каждому из избранных интервалов и переставим их, проходя поочередно участки, соответствующие системам $\tau_1, \ldots, \tau_n$. При этом каждый участок проходится в том же, что и в $\mathfrak{L}_1$, направлении или в противоположном, смотря по тому, совпадает или нет направление соответствующего звена r_j ломаной L_ε' с направлением, которое оно имело в составе ломаной L_1. Получим некоторую кривую $\mathfrak{L}_\varepsilon$.

5. Выбор параметра. Выражая вектор, идущий в точку спрямляемой кривой, как интеграл Лебега от касательного вектора по длине дуги, нетрудно убедиться, что каждая точка полученной кривой $\mathfrak{L}_\varepsilon$ удалена менее чем на 2ε от соответствующей (по параметру s) точки ломаной L_ε':

$$\rho(X_{\mathfrak{L}_\varepsilon}(s), X_{L_\varepsilon'}(s)) = \left|\int_0^s [\bar{t}_{\mathfrak{L}_\varepsilon}(s) - \bar{t}_{L_\varepsilon'}(s)]\, ds\right| < \int_0^{l_1} \frac{\varepsilon}{l_1}\, ds + n\int_0^{\frac{\varepsilon}{2n}} 2ds = 2\varepsilon.$$

Если теперь на $\mathfrak{L}_\varepsilon = X_{\mathfrak{L}_\varepsilon}(s(x))$ выбрать параметр $0 \leqslant x \leqslant 1$ так, чтобы значениям $x = \frac{k}{N}$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$ соответствовали точки кривой $\mathfrak{L}_\varepsilon$, отвечающие по параметру s точкам X_k ломаной L_ε', между этими точками заставить параметр изменяться, например, пропорционально длине, а на кривой $\mathfrak{L}$ в качестве параметра взять отнесенную длину дуги, то мы получаем требуемую близость соответствующих точек кривых $\mathfrak{L}_\varepsilon$ и $\mathfrak{L}$ *:

$$\rho(X_{\mathfrak{L}_\varepsilon}, X_{\mathfrak{L}}) \leqslant \rho(X_{\mathfrak{L}_\varepsilon}, X_{L_\varepsilon'}) +$$

$$+ \rho(X_{L_\varepsilon'}, X_L) + \rho(X_L, X_{\mathfrak{L}}) < 2\varepsilon + 4\varepsilon + \varepsilon.$$

При $\varepsilon_i \to 0$ кривые $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_{\varepsilon_i} \to \mathfrak{L}$. В то же время все кривые $\mathfrak{L}_i$ получены из $\mathfrak{L}_1$ простой перестановкой участков и потому имеют в каждом направлении те же вариации, что и $\mathfrak{L}_1$.

Теорема доказана для плоскости. В пространстве большего числа измерений соответствующее утверждение, вообще говоря, неверно, как это показывает следующий пример.

---

* Добиться, чтобы на всем протяжении кривых параметрами сходимости были отнесенные длины, вообще говоря, нельзя. Это можно проследить на ломаных L и L_1, составленных из векторов (0,1), (1,1), и (0,2), (1,0).

Пример. Пусть в трехмерном пространстве даны: составленная из четырех звеньев

$$\bar{R}_1(\sqrt{2},\ 0{,}1);$$
$$\bar{R}_2(-\sqrt{2},\ 0{,}1);$$
$$\bar{R}_3\ (0,\sqrt{2},1);$$
$$\bar{R}_4\,(0,\ -\sqrt{2},1)$$

ломаная L_1, имеющая индикатрисой вариаций ромбический додекаэдр $P(L_1)$, и ломаная L, состоящая из звеньев:

$$\bar{r}_1\,(0,0,1);$$
$$\bar{r}_2\ (0,\sqrt{2},0);$$
$$\bar{r}_3\,(\sqrt{2},0,0);$$
$$\bar{r}_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right);$$
$$\bar{r}_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),$$

имеющая индикатрисой вариаций восьмигранную призму $P(L)$, вложенную в ромбический додекаэр $P(L_1)$, как это изображено на рис. 3.

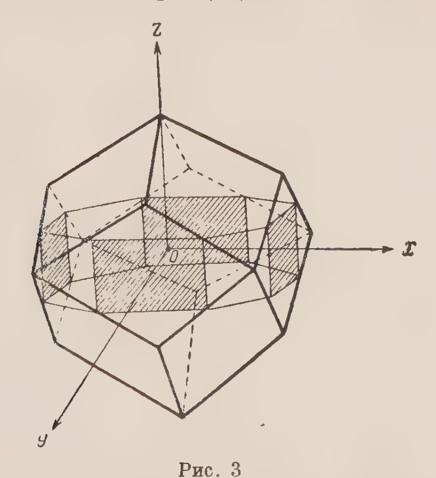


Рис. 3

Включение $P(L)\subset P(L_1)$ обеспечивает соблюдение неравенства:

$$V_{\bar{e}}\ (L)\leqslant V_{\bar{e}}\ (L_1).$$

Тем не менее, не может существовать последовательности кривых, сходящихся к ломаной L, в то время как все их вариации сходились бы к вариациям ломаной L_1 (или, что то же самое, индикатрисы вариаций которых топологически сходились бы к $P(L_1)$).

Действительно, допустим, что такого рода последовательность кривых $\mathfrak{L}_n$ существует. Разделим ломаную L на отрезок $L' = \bar{r}_1$ и плоскую ломаную L'', состоящую из звеньев $\bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4, \bar{r}_5$. Соответственно разделим кривые $\mathfrak{L}_n$ на участки $\mathfrak{L}_n'$ и $\mathfrak{L}_n''$, сходящиеся порознь к L' и L'', и выберем (что возможно по компактности ограниченной совокупности выпуклых тел) подпоследовательность, для которой индикатрисы вариаций $P(\mathfrak{L}_n')$ и $P(\mathfrak{L}_n)''$ сходятся к некоторым телам P_1 и P_2.

Тело P_1 во всяком случае содержит отрезок $2\bar{r}_1$ (от $-\bar{r}_1$ до $+\bar{r}_1$), а тело P_2 — восьмиугольное сечение призмы $P(L)$. Если располагать центр тела P_1 в различных точках тела P_2, то они должны заполнять как раз общую предельную индикатрису $P(L_1)$. Но это невозможно по следующим соображениям. Если бы тело P_1 состояло только из одного отрезка $2\bar{r}_1$, то у многогранника $P(L_1)$ был бы целый пояс из ребер $2\bar{r}_1$, которого нет. Если же P_1 содержит хоть одну точку X помимо отрезка $2\bar{r}_1$, то при расположении центра тела P_1 на контуре восьмиугольника, заведомо содержащегося в P_2, точка X непременно выйдет из $P(L_1)$, когда центр P_1 ложится в один из заштрихованных на рис. 3 прямоугольников на поверхности $P(L_1)$, общих с поверхностью $P(L)$.

Поступило
21 IV. 1950

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 477—502

И. Н. САНОВ

О НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЕ СООТНОШЕНИЙ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С ПЕРИОДОМ СТЕПЕНЬЮ ПРОСТОГО ЧИСЛА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе выводятся, в некотором смысле, простейшие соотношения между повторными коммутаторами элементов периодических групп с периодом p^a, где p — простое, а a — натуральное число. При выводе этих соотношений используются связи между группами и кольцами Ли.

Пусть $\mathfrak{G}$ — свободная группа, порожденная свободными образую щими $G_1, G_2, \ldots$:

$$\mathfrak{G} = \{G_1, G_2, \ldots\}.$$

Будем обозначать элементы $\mathfrak{G}$ большими латинскими буквами.

Обозначим члены убывающего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$ через $\mathfrak{G}_i$:

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G}_i = (\mathfrak{G}_{i-1}, \mathfrak{G}), \quad i = 2,3,\ldots$$

Введем еще следующие обозначения:

$\mathfrak{G}(p^a)$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, порожденная всеми p^a-ми степенями элементов группы $\mathfrak{G}$.

Для S и $T \in \mathfrak{G}$

$$(S, T) = STS^{-1}T^{-1}$$

— коммутатор элементов S и T.

Далее, определяем последовательно для $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathfrak{G}$ обозначение

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n) = ((S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}), S_n)$$

— повторный коммутатор элементов $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Вводим еще обозначение:

$$(S, \overbrace{T, T, \ldots, T}^{n \text{ раз}}) \equiv (S, T, n).$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$. Будем говорить, что для элементов S и $T \in \mathfrak{G}$ имеет место сравнение $S \equiv T \pmod{\mathfrak{A}}$ или просто $(\mathfrak{A})$, если $S = TA$, где $A \in \mathfrak{A}$, т. е. S и T принадлежат одному и тому же классу фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$.

Для теории периодических групп и теории p-групп большое значение имеют соотношения между элементами убывающего центрального ряда и элементами группы $\mathfrak{G}(p^a)$. В работах Цассенхауза ([1]) и Грюна ([2]) доказано существование таких соотношений вида

$$(S_m, T, n(m, a, \nu))^{p^{a-\nu}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{G}(p^a) \cdot \mathfrak{G}_{r(m, a, \nu, n)}), \tag{1}$$

где $S_m \in \mathfrak{G}_m$ — произвольный элемент $\mathfrak{G}_m$, $T \in \mathfrak{G}$, $n(m, a, \nu)$ и $r(m, a, \nu, n)$ — целые положительные числа, зависящие от m, a, ν и n, причем $r \geqslant m + n + 1$.

Наиболее существенные результаты в этом направлении получены Грюном. Исходя из соотношений типа (1), Грюн развивает еще целый ряд других соотношений между повторными коммутаторами и степенями элементов.

При выводе соотношений типа (1) Грюн действует в групповых кольцах конечных p-групп. Каждый элемент этого кольца удовлетворяет алгебраическим соотношениям. Грюн применяет к этим кольцам результаты, доказанные пока еще лишь для свободных колец, не обосновывая достаточно законности этого. Кроме того, в некоторых выводах Грюна из основных результатов содержатся прямые ошибки [см. ([3]), реферат доклада]. Неизвестно также, будут ли соотношения, полученные Грюном, наилучшими.

Все эти недостатки предыдущих исследований побудили автора настоящей работы развить другой метод, основанный на представлении элементов свободной группы в виде формальных степенных рядов от свободных некоммутативных переменных. Новый метод позволяет получить в некотором смысле все соотношения типа (1) и более точные значения $\min n(m, a, \nu)$ и $\max(r - n - m - 1)$.

1. Введение

Будем рассматривать формальные степенные ряды с произвольными рациональными коэффициентами от нескольких свободных ассоциативных некоммутативных переменных $x, y, \ldots$, располагая всегда ряд по возрастающим степеням произведений $x, y, \ldots$:

$$z = c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy + c_4yx + c_5x^2 + c_6y^2 + c_7xyx + \cdots.$$

Формальные суммы, произведения и степени рядов этого вида будут опять рядами такого же типа.

Более того, если ряд

$$t = c_1x + c_2y + c_3xy + \cdots$$

не имеет свободного члена, то формальные функции

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots, \tag{2}$$

$$\lg(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots \tag{3}$$

будут опять рядами от $x, y, \ldots$ такого же типа.

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — элементы какого-то ассоциативного кольца K. Мы можем ввести тогда операцию $\circ$ в этом кольце; для любых двух элементов a и $b \in K$ определим

$$a \circ b = ab - ba.$$

Доказано ([4]), что если $x_1, x_2, \ldots x_m$ — свободные образующие свободной ассоциативной алгебры K над полем рациональных чисел, то путем операции сложения и операции $\circ$ элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ порождают в K

подмодуль L, являющийся свободной алгеброй Ли со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_m$ над полем рациональных чисел. Любой элемент L представляется в виде линейной комбинации последовательных произведений элементов $x_1, x_2, \ldots$ операцией $\circ$.

Мы будем обозначать последовательное произведение k элементов операцией $\circ$ так:

$$((\cdots(((x_{i_1}\circ x_{i_2})\circ x_{i_3})\cdots)\circ x_{i_k}) = [x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}].$$

Будем говорить, что произведение $[x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}]$ имеет степень k.

Для последовательных произведений, например, $[xyyyxxyyy]$ будем вводить сокращение $[xy^3x^2y^3]$ и т. д. ($[xy^3x^2y^3]$ не надо путать с произведением $[x(y^3)(x^2)(y^3)]$, где каждая степень рассматривается как самостоятельный элемент).

Пусть x и y — две свободные ассоциативные переменные. Имеется известное тождество в формальных степенных рядах от некоммутативных переменных $e^x e^y = e^z$, где

$$z = \ln(e^x e^y) = \ln(1+u),$$

$$u = e^x e^y - 1 = x + y + xy + \cdots;$$

отсюда для z получается выражение в виде формального степенного ряда от x и y;

$$z = x + y + \frac{1}{2}(xy - yx) + \cdots = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots, \tag{4}$$

где P_k — однородный полином от x и y k-й степени.

Замечателен факт, доказанный Хаусдорфом (5) и Дынкиным (6), что однородные члены степени $k \geqslant 1$ в ряде z являются элементами свободной алгебры Ли над полем рациональных чисел, порожденной элементами x и y и операциями $\circ$ и сложением. Отметим, что

$$P_1 = x + y.$$

Пользуясь результатом (4), можно показать, что любое произведение $e^{z_1}e^{z_2}\ldots e^{z_k}$, где z_i — формальные степенные ряды без свободных ассоциативных переменных $x, y, \ldots$, можно снова представить в виде $e^{z'}$, где z' — опять формальный степенной ряд такого же типа.

Если z_1 и z_2 коммутируют $z_1z_2 = z_2z_1$, то формула (4) дает для формальных степенных рядов z_1 и z_2 следующее соотношение:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Отсюда легко получаем

$$(e^z)^{-1} = e^{-z} \text{ и } (e^z)^n = e^{nz} \text{ для } n \gtrless 0. \tag{5}$$

Магнус (7) доказал, что если $x_1, x_2, \ldots$ — свободные образующие свободной ассоциативной алгебры K, то группа $\mathfrak{G}$, порожденная элементами $G_i = e^{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, будет свободной со свободными образующими G_i.

Если элемент $S \in \mathfrak{G}$,

$$S = \prod_{k=1}^{d} G_{i_k}^{\alpha_k} = e^z,$$

имеет свой логарифм z в виде степенного ряда

$$z = P_k + P_{k+1} + \cdots,$$

где P_l — однородный полином от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ степени l, причем $P_k \neq 0$, то тогда $S \in \mathfrak{G}_k$, но $S \overline{\in} \mathfrak{G}_{k+1}$. В частности,

$$(G_1, G_2, \ldots, G_{i_d}) = e^{[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_d}] + P_{d+1} + \cdots} \in \mathfrak{G}_d.$$

Это представление свободной группы и будет использовано в настоящей работе.

Сделаем еще одно замечание:

$$[xy] = xy - yx,$$

$$[xy^2] = [[xy]\, y] = [(xy - yx)\, y] = xy^2 - 2yxy + y^2x.$$

Продолжая таким образом, можно индукцией доказать, что

$$[xy^n] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu\, y^\nu x y^{n-\nu}.$$

Отсюда получается:

$$e^{-y} x e^{y} = x + (xy - yx) + \frac{1}{2!}(xy^2 - 2yxy + y^2x) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu y^\nu x y^{n-\nu} + \cdots =$$

$$= x + [xy] + \frac{1}{2!}[xy^2] + \frac{1}{3!}[xy^3] + \cdots + \frac{1}{n!}[xy^n] + \cdots . \tag{6}$$

Введем в алгебре Ли $L(x, y)$, порожденной элементами x и y, линейное преобразование $\bar{y}$, определяемое равенством:

$$u\bar{y} = [uy] \text{ для } u \in L(x, y).$$

Тогда, очевидно, $u\bar{y}^n = [uy^n]$. В частности, получаем формулу

$$e^{-y} x e^{y} = x(\bar{1} + \bar{y} + \frac{1}{2!}\bar{y}^2 + \frac{1}{3!}\bar{y}^3 + \cdots) = xe^{\bar{y}}.$$

Если $f(x)$ — любая аналитическая функция от x (формальный степенной ряд с рациональными коэффициентами), то мы получаем

$$e^{-y} f(x)\, e^{y} = e^{-y}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)\, e^{y} =$$

$$= c_0 + c_1(e^{-y} x e^{y}) + c_1 (e^{-y} x e^{y})^2 + \cdots = f(e^{-y} x e^{y}) = f(xe^{\bar{y}}).$$

Итак, для формального степенного ряда $f(x)$ от x с рациональными коэффициентами имеем соотношение:

$$e^{-y} f(x)\, e^{y} = f(xe^{\bar{y}}). \tag{7}$$

В частности,

$$e^{-y} e^{x} e^{y} = e^{xe^{\bar{y}}}. \tag{8}$$

Для получения соотношений (1) будут использованы формулы (4), (5) и (8).

2. Получение исходных соотношений

Для любого элемента группы $\mathfrak{G} = \{e^x, e^y\}$ мы получим вполне определенный формальный ряд — логарифм этого элемента. Расположим этот ряд по степеням буквы x (по числу входящих в произведение x).

Если $S = e^z \in \mathfrak{G}$, то

$$z = P_{0,x} + P_{1,x} + P_{2,x} + \cdots,$$

где $P_{k,x}$ — степени k в x.

Очевидно, что $P_{0,x} = cy$, где c — целое число.

Нас будет интересовать совокупность таких элементов группы $\mathfrak{G}$, логарифм которых будет иметь $P_{0,x} = 0$. Это будет совокупность элементов $\mathfrak{G}_x$, входящих в нормальный делитель $\mathfrak{G}$, порожденный $w = e^x$ [см. (8)].

Если e^z, $e^{z'} \in \mathfrak{G}_x$ и $e^{z''} = e^z e^{z'}$, где

$$z = P_{1,x} + P_{2,x} + \cdots,$$
$$z' = P'_{1,x} + P'_{2,x} + \cdots,$$
$$z'' = P''_{1,x} + P''_{2,x} + \cdots,$$

то из формулы (4) сразу следует, что

$$P''_{1,x} = P_{1,x} + P'_{1,x}.$$

Пусть $e^z \in \mathfrak{G}_x$; соответствие

$$e^z \to P_{1,x} \tag{9}$$

есть гомоморфизм $\mathfrak{G}_x$ на аддитивную группу $\mathfrak{P}$ степенных рядов $P_{1,x}$.

Нас будет интересовать при гомоморфизме (9) образ $\mathfrak{P}_a$ группы $\mathfrak{G}(p^a) \cap \mathfrak{G}_x = \mathfrak{G}_{x,p^a}$.

Очевидно, что $\mathfrak{G}_x$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_{xp^a}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}(p^a)$, и мы имеем полупрямые произведения:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_x \cdot \{e^y\},$$
$$\mathfrak{G}(p^a) = \mathfrak{G}_{x,p^a} \cdot \{e^{p^a y}\}.$$

Будем всегда обозначать $P_{2,x} + P_{3,x} + \cdots = Q_{2,x}$ с различными индексами и штрихами.

Рассмотрим произвольный элемент $S \in \mathfrak{G}$. Его можно записать в виде

$$S = e^{\alpha_1 x} e^{\beta_1 y} e^{\alpha_2 x} e^{\beta_2 y} \ldots e^{\alpha_k x} e^{\beta_k y},$$

где k — любое, а $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_k$ — не нули. На основании (4), имеем:

$$S = e^{\alpha_1 x} \cdot (e^{\beta_1 y} e^{\alpha_2 x} e^{-\beta_1 y}) \cdot (e^{(\beta_1+\beta_2) y} e^{\alpha_3 x} e^{-(\beta_1+\beta_2) y}) \ldots$$
$$\ldots (e^{(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1}) y} e^{\alpha_k x} e^{-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1}) y}) \cdot e^{(\beta_1+\cdots+\beta_k) y} =$$
$$= e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 x e^{-\beta_1 \bar{y}}} e^{\alpha_3 x e^{-(\beta_1+\beta_2)\bar{y}}} \ldots e^{\alpha_k x e^{-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1})\bar{y}}} \cdot e^{\beta y} =$$
$$= e^{x[\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\beta_1 \bar{y}} + \alpha_3 e^{-(\beta_1+\beta_2)\bar{y}} + \cdots + \alpha_k e^{-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k)\bar{y}}] + Q_{2,x}} \cdot e^{\beta y}.$$

Обозначим $P(e^{-y}) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-\beta_1 \bar{y}} + \cdots + \alpha_k e^{-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1})\bar{y}}$.

Здесь очевидно, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; $\beta_1, (\beta_1 + \beta_2), \ldots, (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1})$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k$ могут быть произвольными целыми числами.

Итак, произвольный элемент $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$S = e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}} \cdot e^{\beta y},$$

где $P(v)$ — произвольный полином от v с целыми коэффициентами и положительными и отрицательными степенями v, а β — произвольное целое число.

Любой элемент $T \in \mathfrak{G}(p^a)$ состоит из произведений p^a-х степеней элементов $\mathfrak{G}$:

$$T = S_1^{p^a} S_2^{p^a} \dots S_l^{p^a}. \tag{10}$$

Изучим p^a-ю степень элемента S.

$$S^{p^a} = \left(e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}}e^{\beta y}\right)^{p^a} = e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}}e^{\beta y}e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}}e^{\beta y} \dots$$

$$\dots e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}}e^{\beta y} = e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}} \cdot \left(e^{\beta y}e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}}e^{-\beta y}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(e^{2\beta y}e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}}e^{-2\beta y}\right) \dots \left(e^{(p^a-1)\beta y} \cdot e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}}e^{-(p^a-1)\beta y}\right)e^{p^a\beta y} =$$

$$= e^{xP(e^{-\overline{y}})+Q_{2,x}}e^{xP(e^{-\overline{y}})\cdot e^{-\beta\overline{y}}+Q'_{2,x}} \cdot e^{xP(e^{-\overline{y}})\cdot e^{-2\beta\overline{y}}+Q''_{2,x}} \dots$$

$$\dots e^{xP(e^{-\overline{y}})\cdot e^{-(p^a-1)\beta\overline{y}}+Q_{2,x}^{(p^a-1)}} \cdot e^{p^a\beta y} =$$

$$= e^{xP(e^{-\overline{y}})[1+e^{-\beta\overline{y}}+e^{-2\beta\overline{y}}+\dots+e^{-(p^a-1)\beta\overline{y}}]+\widetilde{Q}_{2,x}} \cdot e^{p^a\beta y} =$$

$$= e^{xP(e^{-\overline{y}})\cdot\frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-p\overline{y}}-1}+\widetilde{Q}_{2,x}} \cdot e^{p^a\beta y}.$$

Так как за S^{p^a} в произведении (10) может стоять множитель $e^{p^a\beta_1 y}$, то, вообще говоря, можно считать, что любой элемент группы $\mathfrak{G}(p^a)$ является произведением элементов такого вида:

$$T = \Pi\left[e^{xP(e^{-\overline{y}})\cdot\frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1}+\widetilde{Q}_{2,x}} \cdot e^{p^a\gamma y}\right]. \tag{11}$$

Здесь γ и β — произвольные целые числа $\Big($в случае $\beta = 0$ считаем, что неопределенность $\frac{e^{-p^a 0\overline{y}}-1}{e^{-0\overline{y}}-1} = p^a\Big)$, а $P(v)$ — полином от v с целыми коэффициентами вида

$$P(v) = d_{-m}v^{-m} + d_{-m+1}v^{-m+1} + \dots + d_0 + d_1 v + \dots d_l v^l, \tag{12}$$

причем $P(v)$ может быть произвольным полиномом такого типа (т. е. l и m — любые числа, d_i — тоже любые целые числа).

В произведении (11) все множители типа $e^{p^a\gamma y}$ можно перевести направо, делая, как и выше, несколько сопряжений остальных множителей элементами типа $e^{p^a\gamma y}$. Это может изменить лишь полиномы $P(e^{-y})$ при домножении их на $e^{-p^a\gamma\overline{y}}$. Но так как полиномы P произвольные, то и после домножения на $e^{-p^a\gamma\overline{y}}$ они останутся произвольными (т. е. могут для какого-то элемента $T \in \mathfrak{G}(p^a)$ быть любыми наперед заданными полиномами).

Итак, произвольный элемент $T \in \mathfrak{G}(p^a)$ всегда имеет вид

$$T = \left[\Pi e^{xP(e^{-\overline{y}}) \cdot \frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1} + \widetilde{Q}_{2,x}}\right] \cdot e^{p^a\mu y};$$

здесь в произведении взято конечное число множителей, μ и β — произвольные целые числа. Следовательно, произвольный элемент $T \in \mathfrak{G}(p^a)$ имеет вид

$$T = e^{x\left[P_0(e^{-\overline{y}}) \cdot p^a + \sum\limits_{\beta \neq 0} P_\beta(e^{-\overline{y}}) \cdot \frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1}\right] + \widetilde{\widetilde{Q}}_{2,x}} \cdot e^{p^a\mu y}, \tag{13}$$

где $\mu, \beta, \ldots$ — произвольные целые числа, а $P_0(v)$, $P_\beta(v), \ldots$ — произвольные полиномы типа (12) и сумма может иметь любое конечное число слагаемых.

Отсюда мы видим, что модуль $\mathfrak{P}_a$ состоит из всех степенных рядов вида

$$x\left[P_0(e^{-\overline{y}})\, p^a + \sum_{\beta \neq 0} P(e^{-\overline{y}}) \cdot \frac{e^{p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1}\right]. \tag{14}$$

Любой элемент $\mathfrak{P}_a$ равен результату действия на x линейного преобразования $u(\overline{y})$, являющегося таким степенным рядом от линейного преобразования $\overline{y}$, который принадлежит некоторому идеалу $\mathfrak{R}$ в кольце O всех полиномов $P(e^{-\overline{y}})$, где $P(v)$ типа (12), а $\mathfrak{R}$ порождается в этом кольце базисом, состоящим из всех полиномов от $e^{-\overline{y}}$ вида $\frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1}$ и p^a.

3. Постановка задачи

Изучим строение идеала $\mathfrak{R}$. Во-первых, базис можно упростить, отбросив в нем зависимые элементы. Прежде всего, для $\beta > 0$ имеем

$$\frac{e^{-p^a(-\beta)\overline{y}}-1}{e^{-(-\beta)\overline{y}}-1} = e^{(p^a-1)\beta\overline{y}} \cdot \frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1} = \left(e^{-\overline{y}}\right)^{-(p^a-1)\beta} \cdot \frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1},$$

т. е. элементы базиса для отрицательных β зависят от элементов с положительными β, и первые элементы в базисе можно отбросить.

Итак, для получения базиса достаточно взять полиномы

$$\frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1}$$

с $\beta > 0$.

Далее, посмотрим, когда $\frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1}$ делится в кольце O на $\frac{e^{-p^a\overline{y}}-1}{e^{-\overline{y}}-1}$? Для этого определим, для каких целых $\beta > 0$ полином $\frac{v^{p^a\beta}-1}{v^\beta-1}$ делится на полином $\frac{v^{p^a}-1}{v-1}$. Корни последнего полинома все простые и являются корнями $\rho_l = e^{\frac{2\pi i l}{p^a}}$ p^a-й степени из 1, за исключе-

нием 1. Для вышеуказанной делимости необходимо и достаточно, чтобы любой корень ρ_l был корнем полинома $\frac{v^{p^a\beta}-1}{v^\beta-1}$. Очевидно, что $\rho_l^{p^a\beta}-1=0$ для всех l. Если $\rho_l^\beta-1 \neq 0$, то тогда ρ_l будет действительно корнем полинома $\frac{v^{p^a\beta}-1}{v^\beta-1}$, если же для какого-то ρ_l будет $\rho_l^\beta-1=0$, то вышеуказанная делимость не будет иметь места.

Очевидно, каждый корень ρ_l $(l=1, 2, \ldots, p^a-1)$ будет принадлежать показателю p^{d_l}, $d_l>0$, и ρ_l^β будет равен единице тогда и только тогда, когда $p^{d_l} \mid \beta \cdot d_l$ могут быть целыми числами, начиная от 1; таким образом, хотя бы для одного корня ρ_l $\rho_l^\beta=1$ тогда и только тогда, когда $p \mid \beta$. Таким образом, если p не делит β, то имеет место делимость

$$\frac{e^{-p^a\overline{y}}-1}{e^{-\overline{y}}-1} \Bigg| \frac{e^{-p^a\beta\overline{y}}-1}{e^{-\beta\overline{y}}-1},$$

если же $p \mid \beta$, то этой делимости нет.

Итак, мы опускаем все элементы базиса идеала $\mathfrak{N}$ с β, не делящимися на p, за исключением $\beta=1$. Если же $\beta=p^c\beta_1$, то тогда из вышеприведенного рассуждения следует, что

$$\frac{e^{-p^a p^c \beta_1\overline{y}}-1}{e^{-p^c\beta_1\overline{y}}-1}$$

делится без остатка на

$$\frac{e^{-p^{a+c}\overline{y}}-1}{e^{-p^c\overline{y}}-1}.$$

Итак, в качестве элементов базиса $\mathfrak{N}$ можно взять такие полиномы от $e^{-\overline{y}}$:

$$p^a, \frac{e^{-p^a\overline{y}}-1}{e^{-\overline{y}}-1}, \frac{e^{-p^{a+1}\overline{y}}-1}{e^{-p\overline{y}}-1}, \frac{e^{-p^{a+2}\overline{y}}-1}{e^{-p^2\overline{y}}-1}, \ldots, \frac{e^{-p^{a+c}\overline{y}}-1}{e^{-p^c\overline{y}}-1}, \ldots. \quad (15)$$

Базис состоит пока из бесконечного числа полиномов от $e^{-\overline{y}}$ неограниченной степени. Теперь мы можем произвести дальнейшие упрощения, после которых оставим в базисе конечное число полиномов от $e^{-\overline{y}}$. Именно, поделим любой полином

$$B_c(v)=\frac{v^{p^{a+c}}-1}{v^{p^c}-1}$$

на полином

$$B_0(v)=\frac{v^{p^a}-1}{v-1}$$

с остатком. Без особого труда получим, что

$$\left.\begin{aligned} B_c(v) &= B_0 v Q_c(v) + P_c(v), \\ P_c(v) &= \begin{cases} p^c \dfrac{v^{p^a}-1}{v^{p^c}-1} & \text{для} \quad c \leqslant a, \\ p^a & \text{для} \quad c \geqslant a, \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $Q_c(v)$ — полином от v с целыми коэффициентами.

Формула (16) показывает, что любое $B_c(e^{-\overline{y}})$ в базисе (15) может быть заменено остатком $P_c(e^{-\overline{y}})$ и $B_0(e^{-\overline{y}}) = P_0(e^{-\overline{y}})$.

Итак, окончательно, в качестве базиса идеала $\mathfrak{R}$ можно взять базис, состоящий из $a+1$ полиномов от $e^{-\overline{y}}$, именно из полиномов $P_c(e^{-\overline{y}})$,

$$P_c(e^{-\overline{y}}) = p^c \cdot \frac{e^{-p^a\overline{y}}-1}{e^{-p^c\overline{y}}-1}, \qquad (c = 0, 1, \ldots a)$$

$$\mathfrak{R} = \left\{ \sum_{c=0}^{a} Q_c(e^{-\overline{y}})\, p^c \cdot \frac{e^{-p^a\overline{y}}-1}{e^{-p^c\overline{y}}-1} \right\},$$

где $Q_c(e^{-\overline{y}})$ — произвольные полиномы типа (12).

Доказательство существования соотношений типа (1) в нашей записи будет равносильно нахождению в идеале $\mathfrak{R}$ полинома $P(e^{-\overline{y}})$ такого, что после разложения в ряд по возрастающим степеням $\overline{y}$:

$$P(e^{-\overline{y}}) = f_l \overline{y}^l + f_{l+1}\overline{y}^{l+1} + \cdots \tag{17}$$

первый отличный от нуля коэффициент f_l будет делить $p^{a-\nu}$, т. е.

$$f_l = p^\mu, \qquad \mu \leqslant a - \nu.$$

То, что действительно задача (17) будет эквивалентна задаче нахождения соотношений (1), мы подробно докажем в последнем разделе работы.

Сейчас для решения задачи (17) перейдем к эквивалентным ей более простым задачам. А именно, в равенстве (17)

$$\sum_{c=0}^{a} Q_c(e^{-\overline{y}}) \cdot p^c \frac{e^{-p^a\overline{y}}-1}{e^{-p^c\overline{y}}-1} = f_l \overline{y}^l + f_{l+1}\overline{y}^{l+1} + \cdots,$$

$$f_l = p^\mu, \qquad \mu \leqslant a - \nu,$$

можно сделать замену переменных:

$$e^{-\overline{y}} = 1 - u, \quad e^{\overline{y}} = (1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots$$

$$\overline{y} = -\log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots,$$

$$u = 1 - e^{-\overline{y}} = \overline{y} - \frac{\overline{y}^2}{2!} + \frac{\overline{y}^3}{3!} - \cdots,$$

После этой замены получим:

$$\sum_{c=0}^{a} Q_c(1-u)\,p^c\cdot\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^c}-1} = f_l u^l + f'_{l+1}u^{l+1} + \cdots \tag{18}$$

с тем же самым коэффициентом f_l, что и в формуле (17). Так как и от формулы (18) обратной заменой можно перейти к формуле (17), то, очевидно, задачи нахождения полиномов $Q_c(v)$ в формулах (17) и (18) эквивалентны:

$$(17) \rightleftarrows (18).$$

Отметим, что в равенстве (18) коэффициенты $f_l, f'_{l+1}, \ldots$ — всегда целые числа, а потому и в формуле (17) первый отличный от нуля коэффициент f_l — всегда целое число.

Нахождение полиномов $Q_c(v)$ затруднено тем обстоятельством, что $Q_c(1-u)$ будет не полиномом от u, а, вообще говоря, бесконечным целочисленным рядом от u. Но если уже равенство (18) установлено для рядов $Q_c(1-u)$, то в этих рядах можно заменить всюду $(1-u)^{-1}$ на $1+u+u^2+\cdots+u^{l+1}$, после чего коэффициент при u^l не изменится, а могут измениться лишь другие коэффициенты $f_{l+1}, f_{l+2}, \ldots$.

Итак, задача (18) эквивалентна задаче нахождения f_l в равенстве

$$\sum_{c=0}^{\alpha} Q_c(u)\,p^c\,\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^c}-1} = f_l u^l + f_{l+1}u^{l+1} + \cdots, \tag{19}$$

$$f_l = p^\mu, \qquad \mu \leqslant a-\nu,$$

(где $Q_c(u)$ — обыкновенные целочисленные полиномы.

Если f_l найдено в задаче (19), то, делая замену $u = 1 - e^{-\overline{v}}$, мы перейдем к равенству (17).

Таким образом, задача (17) эквивалентна задаче (19). Решая задачу (19), мы одновременно и более глубоко изучим строение модуля $\mathfrak{P}_a$. Решение этой задачи будем искать на пути построения ступенчатого базиса идеала

$$I_a = \left\{\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)-1},\, p\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^p-1},\ \ldots,\ p^{a-1}\,\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^{a-1}}-1},\ p^a\right\}$$

в кольце всех полиномов $Q(u)$ с целыми коэффициентами.

Интересно отметить, что Грюн все свои результаты получает совершенно другим методом, но центральным местом его работы является исследование ступенчатого базиса идеала, сводящегося к идеалу

$$I = \{(1-u)^{p^a}-1,\ p^a\}$$

в кольце целочисленных полиномов. Очевидно, что $I \subset I_a$.

Мы покажем, что ни один из полиномов

$$P_c(u) = p^c\cdot\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^c}-1} \qquad (c = 0, 1, \ldots a)$$

не является линейной комбинацией остальных с множителями, являющимися целочисленными полиномами. Это означает, что каждый из элементов базиса $P_c(u)$ $(c = 0, 1, \ldots, a)$ дает существенно новые результаты, выражаемые соотношениями (1), и для получения наилучших соотношений (1) надо использовать все элементы базиса $P_c(u)$ $(c = 0, 1, \ldots a)$. Естественно ожидать, что точные соотношения будут отличаться от соотношений Грюна, так как идеал I является только частью идеала I_a.

Предварительно произведем разложение полиномов $P_c(u)$, образующих базис I_a на неприводимые в кольце целочисленных полиномов множители. Очевидно, что

$$P_c(u) = p^c \cdot \frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^c}-1} =$$

$$= p^c \cdot \frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^{a-1}}-1} \cdot \frac{(1-u)^{p^{a-1}}-1}{(1-u)^{p^{a-2}}-1} \cdots \frac{(1-u)^{p^{c+1}}-1}{(1-u)^{p^c}-1}.$$

Если мы обозначим неприводимый полином

$$\frac{(1-u)^{p^\nu}-1}{(1-u)^{p^{\nu-1}}-1} = T_\nu(u),$$

то получим соотношения

$$P_c(u) = T_a T_{a-1} \ldots T_{c+1} p^c, \tag{20}$$

$$I_a = \{T_a T_{a-1} \ldots T_2 T_1, T_a T_{a-1} \ldots T_2 p, \ldots, T_a T_{a-1} \ldots T_{c+1} p^c, \ldots, T_a p^{a-1}, p^a\}. \tag{21}$$

Из этого представления идеала нетрудно заметить соотношение между I_a и I_{a-1}:

$$I_a = \{T_a I_{a-1}, p^a\}, \tag{22}$$

которое понадобится нам в дальнейшем.

4. Линейная независимость элементов базиса I_a

Пусть имеются целочисленные полиномы $R_0(u)$, $R_1(u)$, ..., $R_a(u)$ такие, что выполнено равенство

$$P_0(u) R_0(u) + P_1(u) R_1(u) + \cdots + P_a(u) R_a(u) = 0. \tag{23}$$

Что тогда можно сказать о полиномах $R_0(u)$, $R_1(u)$, ..., $R_a(u)$?

$$P_c(u) = T_a T_{a-1} \ldots T_{c+1} p^c, \quad P_0(u) = T_a T_{a-1} \ldots T_1$$

— примитивный полином (общий наибольший делитель его коэффициентов равен 1). Из равенства (23) следует, что

$$P_0(u) R_0(u) \equiv 0 \pmod p;$$

так как $P_0(u)$ — примитивный полином, то получаем, что

$$R_0(u) \equiv 0 \pmod p. \tag{a}$$

Далее, (23) дает сравнение

$$T_aT_{a-1}\ldots T_1R_0(u)+T_aT_{a-1}\ldots T_2pR_1(u)\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Так как $T_aT_{a-1}\ldots T_2$ — примитивный полином, то

$$T_1R_0(u)+pR_1(u)\equiv 0 \pmod{p^2}$$

или

$$T_1\frac{1}{p}R_0(u)+R_1(u)\equiv 0 \pmod{p},$$

или

$$R_1(u)\in\{T_1, p\}=I_1,$$

т. е.

$$R_1(u)\equiv 0 \pmod{I_1}. \qquad (б)$$

Далее,

$$T_aT_{a-1}\ldots T_1R_0(u)+T_aT_{a-1}\ldots T_2pR_1(u)+T_a\ldots T_3p^2R_2(u)\equiv 0 \pmod{p^3},$$

Так же, как и выше, получаем

$$T_2T_1\frac{1}{p}R_0(u)+T_2R_1(u)+pR_2(u)\equiv 0 \pmod{p^2},$$
$$T_2T_1\in I_2, \quad p^2\in I_2, \quad T_2I_1\in I_2,$$

а потому $T_2R_1(u)\in I_2$, так как $R_1(u)\in I_1$, т. е. мы получаем соотношение

$$pR_2(u)\equiv 0 \pmod{I_2}. \qquad (в)$$

Продолжая процесс последовательно, мы, таким образом, получим соотношения

$$p^{k-1}R_k(u)\equiv 0 \pmod{I_k} \quad (k=1, 2, \ldots, a). \qquad (г)$$

Допустим, что какой-то элемент выбранного базиса идеала I_a $P_k(u)$ выражается в виде линейной комбинации через все остальные $P_l(u)$:

$$P_k(u)=\sum_{l\neq k}P_l(u)\cdot R_l(u),$$

где $R_l(u)$ — целочисленные полиномы. Тогда

$$P_k(u)\cdot 1-\sum_{l\neq 0}^{k}P_l(u)R_l(u)=0$$

будет равенством типа (23) и из вышеприведенного рассуждения следует, что если $k=0$, то $1\equiv 0 \pmod{p}$ [сравнение (а)], что, конечно: невозможно.

Итак, $k>0$, а тогда из (г) следует:

$$p^{k-1}\cdot 1\equiv 0 \pmod{I_k}.$$

т. е.

$$p^{k-1}\in I_k=\left\{\frac{(1-u)^{p^k}-1}{(1-u)-1},\ p\frac{(1-u)^{p^k}-1}{(1-u)^p-1},\ \ldots,\ p^{k-1}\frac{(1-u)^{p^k}-1}{(1-u)^{p^{k-1}}-1},\ p^k\right\}.$$

Нетрудно проверить, что все свободные члены полиномов базиса I_k равны p^k, а потому все свободные члены полиномов I_k делятся на p_k. Это дает

$$p^{k-1}\equiv 0 \pmod{p^k},$$

т. е. мы получаем противоречие, которое доказывает, что наше предположение неправильно, и элементы базиса $P_c(u)$ линейно независимы, а потому идеал $I_{a,k} = \{P_0(u), \ldots, P_{k-1}(u), P_{k+1}(u) \ldots P_a(u)\}$ является при всяком k только действительной частью идеала I_a и для получения соотношений (1) существенны все полиномы $P_c(u)$ $(c=0, 1, \ldots, a)$.

5. Выбор некоторой ступенчатой последовательности полиномов в I_a

Пусть O_1 — кольцо всех целочисленных полиномов, а J — некоторый идеал этого кольца такой, что $p^a O_1 \subset J$. Тогда в J наверное можно выбрать базис относительно кольца целых чисел, состоящий из последовательности полиномов

$$Q_0(u), Q_1(u), Q_2(u), \ldots, Q_\nu(u), \ldots \tag{24}$$

таких, что

$$Q_\nu(u) = p^{a-\rho(\nu)} u^\nu + a_{\nu,\nu+1} u^{\nu+1} + \cdots + a_{\nu, r_\nu} u^{r_\nu}, \quad r_\nu \geqslant \nu,$$
$$0 \leqslant \rho(0) \leqslant \rho(1) \leqslant \cdots \leqslant \rho(\nu) \leqslant a \quad \text{для} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Последовательность целочисленных полиномов будем называть ступенчатой последовательностью, если она обладает свойствами последовательности полиномов (24).

Может оказаться, что какой-либо подмодуль $\mathfrak{M}$ кольца O_1 имеет в качестве базиса ступенчатую последовательность полиномов типа (24). Тогда любой полином, входящий в $\mathfrak{M}$,

$$Q(u) = a_l u^l + a_{l+1} u^{l+1} + \cdots + a_m u^m$$

такой, что $a_l \neq 0$, будет обладать тем свойством, что $p^{a-\rho(l)} \mid a_l$.

Доказательство этого положения предоставим читателю.

Совершенно очевидно, что решение задачи (17) и эквивалентной ей задачи (19) будет равносильно нахождению в идеале I_a ступенчатой последовательности в качестве базиса.

Сначала мы найдем некоторую ступенчатую последовательность в I_a, а затем докажем, что подмодуль $\mathfrak{M}$, порожденный этой ступенчатой последовательностью, совпадает с I_a. Для этого выберем сначала в I_a некоторую последовательность элементов, из которой мы потом сконструируем ступенчатую последовательность.

Отметим, что

$$T_\nu(u) = \frac{(1-u)^{p^\nu} - 1}{(1-u)^{p^{\nu-1}} - 1} = \frac{((1-u)^{p^{\nu-1}})^p - 1}{(1-u)^{p^{\nu-1}} - 1}.$$

Обозначим

$$(1-u)^{p^{\nu-1}} - 1 = U, \quad (1-u)^{p^{\nu-1}} = U + 1,$$

$$T_\nu(u) = \frac{(1+U)^p - 1}{U} = \sum_{k=1}^{p} C_p^k U^{k-1} \equiv U^{p-1} \pmod p,$$

$$U = (1-u)^{p^{\nu-1}} - 1 = \sum_{k=1}^{p^{\nu-1}} (-1)^k C_{p^{\nu-1}}^k u^k.$$

При $0 < k < p^{\nu-1}$

$$C_{p^{\nu-1}}^k = \frac{p^{\nu-1}}{k} \cdot \frac{(p^{\nu-1}-1)(p^{\nu-1}-2)\cdots(p^{\nu-1}-k+1)}{1 \quad 2 \quad \cdots \quad (k-1)}.$$

Нетрудно заметить, что в произведение $(p^{\nu-1}-1)(p^{\nu-1}-2)\cdots$ $\cdots(p^{\nu-1}-k+1)$ множитель p входит точно столько же раз, сколько и в $(k-1)!$, а потому в $C^k_{p^{\nu-1}}$ p входит множителем точно в такой степени, в какой p входит множителем в числитель дроби $\frac{p^{\nu-1}}{k}$ после всех сокращений. Таким образом, при $0<k<p^{\nu-1}$ наверное $p \mid C^k_{p^{\nu-1}}$, а потому

$$U \equiv (-1)^{p^{\nu-1}} u^{p^{\nu-1}} \pmod p.$$

В результате получаем

$$T_\nu(u) \equiv (-1)^{(p-1)p^{\nu-1}} u^{p^\nu - p^{\nu-1}} \equiv u^{p^\nu - p^{\nu-1}} \pmod p,$$
$$T_\nu(u) = pL_\nu(u) + u^{p^\nu - p^{\nu-1}},$$

где $L_\nu(u)$ — целочисленный полином. Из последовательности полиномов $P_0(u), P_1(u) \ldots P_a(u) \in I_a$ можно получить последовательность полиномов такого типа:

$$P_\nu' = P_\nu - L_{\nu+1}P_{\nu+1} = T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+1}p^\nu - T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+2}p^{\nu+1}L_{\nu+1} =$$
$$= T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+2}[T_{\nu+1} - pL_{\nu+1}]\,p^\nu = T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+2}p^\nu u^{p^{\nu+1}-p^\nu} \in I_a$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots a-1), \quad P_a' = P_a.$$

Последовательность полиномов $P_\nu \in I_a$ $(\nu = 0, 1, \ldots, a)$. Далее, строим последовательность полиномов

$$P_\nu'' = P_\nu' u^{p^{\nu+2}-p^{\nu+1}-(p^{\nu+1}-p^\nu)} - P'_{\nu+1}L_{\nu+2} =$$
$$= T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+2}p^\nu u^{p^{\nu+2}-p^{\nu+1}} - T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+3}p^{\nu+1}u^{p^{\nu+2}-p^{\nu+1}}L_{\nu+2} =$$
$$= T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+3}u^{p^{\nu+2}-p^{\nu+1}}p^\nu[T_{\nu+2} - pL_{\nu+2}] =$$
$$= T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+3}p^\nu u^{2(p^{\nu+2}-p^{\nu+1})} \in I_a$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, a-2;\ P''_{a-1} = P'_{a-1},\ P_a'' = P_a').$$

Так же получим:

$$P_\nu''' = P_\nu'' u^{2(p^{\nu+3}-p^{\nu+2}-p^{\nu+2}+p^{\nu+1})} - P''_{\nu+1}L_{\nu+3} =$$
$$= T_aT_{a-1}\ldots T_{\nu+4}p^\nu \cdot u^{3(p^{\nu+3}-p^{\nu+2})} \in I_a$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, a-3;\ P_\nu''' = P_\nu'' \text{ для } \nu > a-3)$$

и т. д.

Нас интересует

$$P_0^{(a)} = P_0^{(a-1)} u^{(a-1)(p^a-2p^{a-1}+p^{a-2})} - P_1^{(a)}L_a = u^{a(p^a-p^{a-1})} \in I_a$$

и вообще

$$P_\nu^{(a)} = p^{a-\nu} u^{\nu(p^a-p^{a-1})} \in I_a.$$

Итак, доказано важное соотношение:

$$p^{a-\nu}u^{\nu(p^a-p^{a-1})} \equiv 0 \pmod{I_a} \quad (\nu = 0, 1, \ldots a). \tag{25}$$

В частности, если $a = \nu$, то мы получим соотношение

$$u^{\nu(p^\nu-p^{\nu-1})} \equiv 0 \pmod{I_\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{26}$$

Последовательным применением формулы (22) получаем

$$T_a T_{a-1} \ldots T_{\nu+1} I_\nu \subset I_a.$$

Отсюда находим еще одно основное соотношение:

$$T_a T_{a-1} \ldots T_{\nu+1} u^{\nu (p^\nu - p^{\nu-1})} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, I_a) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, a), \tag{27}$$

$$T_a T_{a-1} \ldots T_{\nu+1} = \frac{(1-u)^{p^a} - 1}{(1-u)^{p^\nu} - 1} = p^{a-\nu} + l_1 u + l_2 u^2 + \cdots + u^{p^a - p^\nu}$$

— целочисленный полином. Отсюда видно, что соотношение (27) имеет такой вид:

$$p^{a-\nu} u^{\nu (p^\nu - p^{\nu-1})} + l_1 u^{\nu (p^\nu - p^{\nu-1})+1} + \cdots + u^{p^a + (\nu-1) p^\nu - \nu p^{\nu-1}} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, I_a). \tag{28}$$

На основании полученных соотношений выберем в I_a ступенчатую последовательность таким образом: сначала возьмем

$$Q_0 = T_a T_{a-1} \ldots T_1, Q_{p-1} = T_a T_{a-1} \ldots T_2 u^{p-1},$$
$$Q_{2(p^2-p)} = T_a T_{a-1} \ldots T_3 u^{2(p^2-p)}, \ldots, Q_{\nu (p^\nu - p^{\nu-1})} =$$
$$= T_a T_{a-1} \ldots T_{\nu+1} u^{\nu (p^\nu - p^{\nu-1})}, \ldots Q_{a (p^a - p^{a-1})} = u^{a (p^a - p^{a-1})}. \tag{29}$$

Здесь $Q_{\nu (p^\nu - p^{\nu-1})} \in I_a$ и $\rho(\nu(p^\nu - p^{\nu-1})) = \nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots, a)$.

Далее, дополним выбранные полиномы Q_μ таким образом: если ν_1 — наибольшее ν из решений неравенства $\nu(p^\nu - p^{\nu-1}) \leqslant \mu$ и $\nu_2 = \min(\nu_1, a)$, то полагаем

$$Q_\mu(u) = u^{\mu - \nu_2 (p^{\nu_2} - p^{\nu_2 - 1})} \cdot Q_{\nu_2 (p^{\nu_2} - p^{\nu_2 - 1})}, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Очевидно, что для данного μ в последовательности Q_0, Q_1, $Q_2, \ldots$

$$\rho(\mu) = \nu_2 \text{ и } Q_\mu \in I_a.$$

Последовательность полиномов

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots \tag{31}$$

будет ступенчатой последовательностью полиномов, состоящей из полиномов, принадлежащих I_a.

Рассмотрим модуль $\mathfrak{M}$, порожденный элементами ступенчатой последовательности (порожденный как аддитивная группа):

$$\mathfrak{M}\{Q_0, Q_1, Q_2, \ldots\}. \tag{32}$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{M} \subseteq I_a. \tag{33}$$

Далее, мы докажем, что $\mathfrak{M} = I_a$, и ступенчатая последовательность (31) будет базисом, а потому на основании замечания, сделанного выше, мы будем иметь полное решение задачи (19).

6. Доказательство равенства $\mathfrak{M} = I_a$

Для доказательства равенства $\mathfrak{M} = I_a$ нам потребуется ввести одно вспомогательное понятие.

Мы знаем, что фактор-модули $O_1 / \mathfrak{M}$ и O_1 / I_a конечны. Назовем по-

рядок O_1 / I_a нормой идеала I_a и обозначим $N(I_a)$. Мы знаем, что $\mathfrak{M} \subseteq I_a$; отсюда следует, что

$$\text{порядок } O_1 / \mathfrak{M} \geqslant N(I_a). \tag{34}$$

Если в (34) имеем равенство, то равенство будет и в включении (33).

Порядок $O_1 / \mathfrak{M}$ подсчитывается просто.

Нам известен в $\mathfrak{M}$ базис, состоящий из ступенчатой последовательности, поэтому полная система невычетов по $\operatorname{mod} \mathfrak{M}$ будет состоять из полиномов

$$l_0 + l_1 u + l_2 u^2 + \cdots + l_{a(p^a - p^{a-1}) - 1} u^{a(p^a - p^{a-1}) - 1},$$

где каждое l_μ независимо одно от другого пробегает полную систему вычетов по $\operatorname{mod} p^{a - \rho(\mu)}$. Мы знаем, что

$$\rho(0) = \rho(1) = \cdots = \rho(p-2) = 0,$$
$$\rho(p-1) = \rho(p) = \cdots = \rho(2(p^2 - p) - 1) = 1,$$
$$\rho(2(p^2 - p)) = \rho(2(p^2 - p) + 1) = \cdots = \rho(3(p^3 - p^2) - 1) = 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho((a-1)(p^{a-1} - p^{a-2})) = \cdots = \rho(a(p^a - p^{a-1}) - 1) = a - 1,$$

поэтому порядок

$$O_1 / \mathfrak{M} = p^{a(p-1)} \cdot p^{(a-1)[2(p^2-p) - (p-1)]} \cdot p^{(a-2)[3(p^3-p^2) - 2(p^2-p)]} \cdots$$
$$\cdots p^{[a(p^a - p^{a-1}) - (a-1)(p^{a-1} - p^{a-2})]} =$$
$$= p^{(p-1) + 2(p^2-p) + 3(p^3-p^2) + \cdots + a(p^a - p^{a-1})} =$$
$$= p^{-1-p-p^2-\cdots-p^{a-1} + ap^a} = p^{ap^a - \frac{p^a - 1}{p-1}}.$$

Для вычисления $N(I_a)$ используем равенство (22):

$$I_a = \{T_a I_{a-1}, p^a\}.$$

Выведем рекуррентную формулу, выражающую $N(I_a)$ через $N(I_{a-1})$. Пусть полином Γ_{a-1} пробегает полную систему представителей классов $O_1 / I_{a-1} = \{\Gamma_{a-1} + I_{a-1}\}$. Берем произвольный полином $Q(u) \in O_1$ и делим его с остатком на T_a:

$$Q(u) = T_a Q_1 + R,$$

где степень $R <$ степени T_a. Для какого-то одного Γ_{a-1}

$$Q_1 = \Gamma_{a-1} + L_1, \quad L_1 \in I_{a-1}.$$

Среди всех полиномов степени $<$ степени $T_a = p^a - p^{a-1}$ выберем полную систему полиномов, не сравнимых по $\operatorname{mod} p^a$. Пусть R_1 пробегает эту полную систему полиномов. Тогда для какого-то одного полинома R_1 будет

$$R = R_1 + p^a L_2,$$

где L_2 — целочисленный полином. Теперь

$$Q = T_a \Gamma_{a-1} + R_1 + (T_a L_1 + p^a L_2).$$

Так как $L_1 \in I_{a-1}$, то $T_a L_1 + p^a L_2 \in I_a$.

Таким образом, любой полином $Q \in O_1$ сравним по $\operatorname{mod} I_a$ хотя бы с одним полиномом

$$\Gamma_a = T_a \Gamma_{a-1} + R_1. \tag{35}$$

Так как Γ_{a-1} и R_1 пробегают конечные числа значений, то Γ_a принимает конечное число значений. Каждой паре (Γ_{a-1}, R_1) соответствует один вполне определенный класс вычетов по $\operatorname{mod} I_a$, именно, класс $\Gamma_a + I_a$, где Γ_a определяется из (35).

Посмотрим, могут ли две различные пары (Γ_{a-1}, R_1) давать один и тот же класс $\Gamma_a + I_a$? Или могут ли два Γ_a, соответствующие разным парам (Γ_{a-1}, R_1), быть сравнимы по $\operatorname{mod} I_a$? Исследуем эту возможность. Допустим, что

$$\left.\begin{aligned} T_a \Gamma_{a-1} + R_1 &\equiv T_a \Gamma'_{a-1} + R_1' \pmod{I_a}, \\ T_a (\Gamma_{a-1} - \Gamma'_{a-1}) + (R_1 - R_1') &\equiv 0 \pmod{I_a}, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$I_a = \{T_a I_{a-1}, \ p^a\};$$

отсюда следует:

$$R_1 - R_1' \equiv 0 \operatorname{mod} \{T_a, \ p^a\}$$

или

$$R_1 - R_1' = T_a Q + p^a L,$$

где Q и L — целочисленные полиномы. Мы знаем, что $T_a = u^{p^a - p^{a-1}} + pM$ — целочисленный полином. Пусть наивысшая степень p, на которую делится Q, будет p^k. Если $k \geqslant a$, то $R_1 - R_1' \equiv 0 \pmod{p^a}$ и, на основании их выбора, должно быть $R_1 = R_1'$. Пусть теперь $k < a$, тогда

$$Q = p^k Q_k + p^{k+1} Q_{k+1} + \cdots,$$

где $Q_k \not\equiv 0 \pmod{p}$; $Q_k, \ Q_{k+1}, \ldots$ — целочисленные полиномы,

$$\begin{aligned} R_1 - R_1' = (pM + u^{p^a - p^{a-1}})(p^k Q_k + p^{k+1} Q_{k+1} + \cdots) + p^a L \equiv \\ \equiv p^k u^{p^a - p^{a-1}} Q_k \pmod{p^{k+1}}. \end{aligned}$$

Это сравнение показывает, что степень $(R_1 - R_1') \geqslant p^a - p^{a-1}$, что при данном выборе R_1 и R_1' наверное невозможно, так как их степени $< p^a - p^{a-1}$. Итак, остается только одна возможность: $k \geqslant a$ и $R_1 = R_1'$. Теперь из сравнения (36) следует

$$T_a (\Gamma_{a-1} - \Gamma'_{a-1}) \equiv 0 \pmod{I_a}.$$

На основании (22) это означает, что

$$T_a (\Gamma_{a-1} - \Gamma'_{a-1}) = T_a L' + p^a L'',$$

где L' и L'' — целочисленные полиномы, причем $L' \in I_{a-1}$. Это можно переписать так:

$$T_a (\Gamma_{a-1} - \Gamma'_{a-1} - L') = p^a L'',$$

где T_a — примитивный полином. Так как произведение двух полиномов, из которых первый примитивный, делится на p^a, то второй полином также делится на p^a, т. е.

$$\begin{aligned} &\Gamma_{a-1} - \Gamma'_{a-1} - L' \equiv 0 \pmod{p^a}, \\ &\Gamma_{a-1} - \Gamma_{a-1} - L' = p^a L''', \\ &\Gamma_{a-1} - \Gamma'_{a-1} = L' + p^a L''' \in I_{a-1} \end{aligned}$$

или $\Gamma_{a-1} \equiv \Gamma'_{a-1} \pmod{I_{a-1}}$, а потому, на основании выбора Γ_{a-1} и Γ'_{a-1}, мы получим

$$\Gamma_{a-1} = \Gamma'_{a-1}.$$

Итак, доказано, что разные пары (Γ_{a-1}, R_1) дают разные классы $\Gamma_a + I_a$. Отсюда следует, что

$$N(I_a) = N(I_{a-1}) \cdot \text{число полиномов } R_1,$$

а число полиномов $R_1 = (p^a)^{\text{ст. полинома } T_a} = p^{a(p^a - p^{a-1})}$.

Итак, имеем формулу:

$$N(I_a) = N(I_{a-1}) \cdot p^{a(p^a - p^{a-1})}. \tag{37}$$

Отсюда очевидно, что

$$N(I_a) = N(I_{a-2}) \cdot p^{(a-1)(p^{a-1}-p^{a-2}) + a(p^a - p^{a-1})} =$$

$$= \cdots = N(I_1) \cdot p^{2(p^2-p)+3(p^3-p^2)+\cdots+a(p^a-p^{a-1})} =$$

$$= N(\{p, T_1\})\, p^{\sum\limits_{\nu=2}^{a} \nu(p^\nu - p^{\nu-1})} =$$

$$= N(\{p, u^{p-1}\})\, p^{\sum\limits_{\nu=2}^{a} \nu(p^\nu - p^{\nu-1})} = p^{p-1+\sum\limits_{\nu=2}^{a} \nu(p^\nu - p^{\nu-1})} = p^{\sum\limits_{\nu=1}^{a} \nu(p^\nu - p^{\nu-1})},$$

т. е. $N(I_a) = p^{ap^a - \frac{p^a - 1}{p-1}} =$ порядку $O_1/\mathfrak{M}$. Отсюда, как указано выше, следует, что $I_a = \mathfrak{M}$ и ступенчатая последовательность (31) будет базисом идеала I_a. Теперь задача (19) получает полное решение.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *В равенстве*

$$\sum_{\nu=0}^{a} Q_\nu(u)\, p^\nu \cdot \frac{(1-u)^{p^a} - 1}{(1-u)^{p^\nu} - 1} = f_l u^l + f_{l+1} u^{l+1} + \cdots$$

при фиксированном l и произвольных $Q_\nu(u)$ наименьшее положительное значение f_l будет $p^{a-\rho(l)}$, т. е. для $f_l > 0$

$$\min f_l = \begin{cases} p^a, & l < p-1, \\ p^{a-1}, & p-1 \leqslant l < 2(p^2-p), \\ p^{a-2}, & 2(p^2-p) \leqslant l < 3(p^3-p^2), \\ \dots\dots\dots & \\ p^{a-\nu}, & \nu(p^\nu - p^{\nu-1}) \leqslant l < (\nu+1)(p^{\nu+1} - p^\nu), \\ \dots\dots\dots & \\ 1, & a(p^a - p^{a-1}) \leqslant l, \end{cases} \tag{38}$$

а всякое другое значение f_l будет делиться на наименьшее положительное.

ТЕОРЕМА 2. *Имеем следующие серии сравнений:*

$$p^{a-\nu} u^{\nu(p^a-p^{a-1})} \equiv 0 \pmod{I_a} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, a), \tag{39}$$

$$T_a T_{a-1} \ldots T_{\nu+1} u^{\nu(p^\nu - p^{\nu-1})} = \frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^\nu}-1} u^{\nu(p^\nu-p^{\nu-1})} \equiv 0 \pmod{I_a}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, a) \tag{40}$$

7. Соотношения в группах

Мы уже получили базис модуля $\mathfrak{P}_a$. Посмотрим, какие теоретико-групповые соотношения соответствуют полученным результатам.

Мы показали, что если полином $P(u) \in I_a$, то, делая замену $u = 1 - e^{-\bar{v}}$, мы получим ряд $P_1(e^{-\bar{v}}) = P(1-e^{-\bar{v}})$ такого типа, что для любого целого m

$$xP_1(e^{-\bar{v}}) e^{my} \in \mathfrak{P}_a.$$

Наоборот, если для какого-либо полинома $P_2(v)$ типа (12) мы имеем

$$xP_2(e^{-\bar{v}}) \in \mathfrak{P}_a \tag{41}$$

(а мы знаем, что любой элемент $\mathfrak{P}_a$ можно представить таким образом), то наверное найдутся такой полином $P(u) \in I_a$ и положительное число m, что

$$P_2(e^{-\bar{v}}) = P(1-e^{-\bar{v}}) \cdot e^{m\bar{v}}.$$

Итак, $\mathfrak{P}_a$ состоит из совокупности всех степенных рядов вида

$$xP(1-e^{-\bar{v}}) e^{m\bar{v}}, \tag{42}$$

где $P(u) \in I_a$.

Идеал $\mathfrak{R}$ кольца полиномов $P(e^{-\bar{v}})$, где $P(v)$ типа (12), очевидно порождается в этом кольце совокупностью полиномов $P(1-e^{-\bar{v}})$, где $P(u) \in I_a$. Отсюда видно, что если $P_\nu(u)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, a)$ — базис I_a, то $P_\nu(1-e^{-\bar{v}})$ $(\nu = 0, 1, \ldots, a)$ будет базисом идеала $\mathfrak{R}$.

Мы знаем, что I_a имеет базис трех типов:

$$p^a, \ \frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)-1}, \ \frac{(1-u)^{p^{a+1}}-1}{(1-u)^p-1}, \ \frac{(1-u)^{p^{a+2}}-1}{(1-u)^{p^2}-1}, \ldots, \frac{(1-u)^{p^{2a-1}}-1}{(1-u)^{p^a}-1}, \tag{43}$$

$$\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)-1}, \ p\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^p-1}, \ p^2\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^2}-1}, \ldots, \ p^a\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^a}-1}, \tag{44}$$

$$T_a T_{a-1} \ldots T_1, T_a T_{a-1} \ldots T_2 u^{p-1}, T_a T_{a-1} \ldots T_3 u^{2(p^2-p)}, \ldots, u^{a(p^a-p^{a-1})}; \tag{45}$$

последний базис можно переписать в виде:

$$\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)-1}, \ \frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^p-1} u^{p-1},$$

$$\frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^2}-1} u^{2(p^2-p)}, \ldots, \frac{(1-u)^{p^a}-1}{(1-u)^{p^a}-1} u^{a(p^a-p^{a-1})}. \tag{45'}$$

Эти три базиса I_a дают соответственно три базиса идеала $\mathfrak{N}$:

$$p^a, \ \frac{e^{-p^a\bar{y}}-1}{e^{-\bar{y}}-1}, \ \frac{e^{-p^{a+1}\bar{y}}-1}{e^{-p\bar{y}}-1}, \ \frac{e^{-p^{a+2}\bar{y}}-1}{e^{-p^2\bar{y}}-1}, \ \ldots, \ \frac{e^{-p^{2a-1}\bar{y}}-1}{e^{-p^{a-1}\bar{y}}-1}, \tag{46}$$

$$\frac{e^{-p^a\bar{y}}-1}{e^{-\bar{y}}-1}, \ p\frac{e^{-p^a\bar{y}}-1}{e^{-p\bar{y}}-1}, \ p^2\frac{e^{-p^a\bar{y}}-1}{e^{-p^a y}-1}, \ \ldots, \ p^a\frac{e^{-p^a y}-1}{e^{-p^a\bar{y}}-1}, \tag{47}$$

$$\frac{e^{-p^a\bar{y}}-1}{e^{-\bar{y}}-1}, \ (1-e^{-\bar{y}})^{p-1}\cdot\frac{e^{-p^a\bar{y}}-1}{e^{-p\bar{y}}-1},$$

$$(1-e^{-\bar{y}})^{2(p^2-p)}\frac{e^{-p^a\bar{y}}-1}{e^{-p^2\bar{y}}-1}, \ \ldots, \ (1-e^{-\bar{y}})^{a(p^a-p^{a-1})}. \tag{48}$$

Перейдем теперь к элементам групп $\mathfrak{G}(p^a)$ и $\mathfrak{G}_{x,\,p^a}$, дающим указанные элементы базиса $\mathfrak{N}$ в методе получения исходных соотношений.

Предварительно введем еще одну группу. Именно, обозначим через $\mathfrak{G}_{l,\,x}$ совокупность всех таких элементов e^z группы $\mathfrak{G}$, что в равенстве

$$z = P_{0,\,x} + P_{1,\,x} + P_{2,x} + \cdots$$

$P_{0,x} = 0, P_{1,x} = 0, P_{2,\,x} = 0, \ \ldots, \ P_{l-1,\,x} = 0$. Очевидно, что эта совокупность — группа и, кроме того, нормальный делитель $\mathfrak{G}$. Из того, что $\mathfrak{N}$ имеет базис (46), выводим, что мы получим в $\mathfrak{P}_a$ все элементы, если будем рассматривать лишь гомоморфные образы следующих элементов при гомоморфизме (9):

$$T_0{}^{p^a}\cdot(T_1e^y)^{p^a}\cdot e^{-p^a y}\cdot(T_2e^{py})^{p^a}\cdot e^{-p^{a+1}y}\cdot(T_3e^{p^2y})^{p^a}e^{-p^{a+2}y}\ldots$$
$$\cdots(T_ae^{p^{a-1}y})^{p^a}e^{-p^{2a-1}y}, \tag{49}$$

где $T_0, T_1, \ldots, T_a$ — произвольные элементы $\mathfrak{G}_x$. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 3. *Для любого элемента $S\in\mathfrak{G}_{x,\,p^a}$ найдется $a+1$ элементов $\mathfrak{G}_x$ — $T_0, T_1, \ldots, T_a$ таких, что*

$$S \equiv T_0{}^{p^a}(T_1e^y)^{p^a}e^{-p^a y}\cdot(T_2e^{py})^{p^a}e^{-p^{a+1}y}\ldots(T_{\nu+1}e^{p^\nu y})^{p}e^{-p^{a+\nu}y}\ldots$$
$$\cdots(T_ae^{p^{a-1}y})^{p^a}e^{-p^{2a-1}y}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{G}_{2x}). \tag{50}$$

Из того, что $\mathfrak{N}$ имеет базис (47), следует

ТЕОРЕМА 4. *Для любого элемента $S\in\mathfrak{G}_{x,\,p^a}$ найдутся $a+1$ таких элементов $\mathfrak{G}_x$ — $T_0, T_1, \ldots, T_a$, что будет иметь место сравнение*

$$S \equiv T_0{}^{p^a}(T_1e^y)^{p^a}e^{-p^a y}\cdot(T_2{}^pe^{py})^{p^a-1}e^{-p^a y}\ldots(T^{p^\nu}_{\nu+1}e^{p^\nu y})^{p^a-\nu}e^{-p^a y}\ldots$$
$$\cdots(T_a{}^{p^{a-1}}e^{p^{a-1}y})^{p}e^{p^a\bar{y}}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{G}_{2,\,x}). \tag{51}$$

Для того чтобы сделать выводы из существования базиса (48), нам надо рассмотреть, чему в группах соответствует множитель $1-e^{\bar{y}}$? Нетрудно заметить, что

$$(e^x,\ e^y) = e^x e^y e^{-x}e^{-y} = e^x e^{-xe^{-\bar{y}}} = e^{x(1-e^{-\bar{y}})+Q_{2,\,x}}. \tag{52}$$

Применяя соотношение (52) несколько раз, получим

$$(e^x, e^y, n) = e^{x(1-e^{-\bar{y}})^n+Q'_{2,\,x}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{53}$$

Пользуясь этим обстоятельством и существованием у $\mathfrak{M}$ базиса (48), сразу получаем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 5. *Для любого элемента* $S \in \mathfrak{G}_{x,\, p^a}$ *найдутся* $a+1$ *таких элементов* $\mathfrak{G}_x$ — $T_0, T_1, \ldots, T_a$, *что будет иметь место сравнение*

$$S \equiv (T_0 e^y)^{p^a} e^{-p^a y} \cdot [(T_1, e^y, p-1)\, e^{py}]^{p^{a-1}} e^{-p^a y} \ldots$$

$$\ldots [(T_\nu, e^y, \nu(p^\nu - p^{\nu-1}))\, e^{p^\nu y}]^{p^{a-\nu}} e^{-p^a y} \ldots (Ta, e^y, a(p^a - p^{a-1}))\, (\mathfrak{G}_{2,\, x}). \quad (54)$$

Очевидно, для теорем 3, 4 и 5 имеют место и обратные теоремы. Именно, в каждой из теорем по произвольному выбору $T_0, T_1, \ldots, T_a$ $a+1$ элементов $\mathfrak{G}_x$ найдется элемент $S \in \mathfrak{G}_{x,\, p^a}$, удовлетворяющий соответственному сравнению.

Так как $\mathfrak{G} = \{e^x, e^y\}$ — свободная группа с двумя свободными образующими e^x и e^y, то, очевидно, мы можем сформулировать теоремы 3, 4, 5 и им обратные как теоремы абстрактной теории групп, если только вместо e^x взять G_1, вместо e^y взять G_2 (свободные образующие $\mathfrak{G}$), $\mathfrak{G}_x$ считать нормальным делителем, порожденным $W = G_1$, а $\mathfrak{G}_{2,\, x} = (\mathfrak{G}_x)_2$. Вопрос о свободе в выборе $T_0, T_1, \ldots, T_a$ остается открытым.

Сделаем несколько замечаний о возможности выбора S в формуле (54).

Пусть $T_0, T_1, \ldots, T_a$ — произвольные из $\mathfrak{G}_x$, тогда правая часть (54) будет представлять собой выражение вида $e^{P_{1,\, x} + P_{2,\, x} + \cdots}$, а

$$S = e^{P_{1,\, x} + P'_{2,\, x} + P'_{3,\, x} + \cdots},$$

т. е. $P_{1,\, x}$ одинаковы у левой и правой частей сравнения (54); в этом суть теоремы, обратной теореме 5.

Теперь посмотрим, какими могут быть элементы $P'_{2,\, x}, P'_{3,\, x}, \ldots$. Оказывается, что при выборе элемента S можно добиться совпадения некоторых слагаемых и в этих членах за счет некоторой свободы в выборе S. Действуем таким образом: пусть выбрано какое-нибудь $S \in \mathfrak{G}_{x,\, p^a}$, удовлетворяющее сравнению (54). Правую часть его обозначим через A:

$$S \equiv A \pmod{\mathfrak{G}_{2,\, x}},$$

$S \in \mathfrak{G}(p^a)$, т. е. $S = S_1^{p^a} S_2^{p^a} \ldots S_k^{p^a}$ для каких-то элементов $S_1, S \ldots S_k$,

$$S = e^{P_{1,\, x} + P'_{2,\, x} + P'_{3,\, x} + \cdots}.$$

Возьмем в группе $\mathfrak{G} = \{e^x, e^y\}$ эндоморфизм, определяемый отображением

$$\left.\begin{aligned} e^x &\to (e^x)^g \\ e^y &\to e^y \end{aligned}\right\}, \quad (55)$$

где g — первообразный корень по $\operatorname{mod} p$; $\mathfrak{G}(p^a)$ — вполне характеристическая группа, поэтому после этого эндоморфизма будем иметь:

$$S \to S' \in \mathfrak{G}(p^a).$$

Эндоморфизм равносилен замене x на gx, y на y, т. е.

$$S' = e^{gP_{1,x} + g^2 P'_{2,x} + g^3 P'_{3,x} + \cdots} \in \mathfrak{G}(p^a).$$

Составим теперь

$$S_1 = S^{g^2} S'^{-1} = e^{(g^2-g) P_{1,x} + P''_{3,x} + P''_{4,x} + \cdots} \in \mathfrak{G}(p^a). \tag{56}$$

Далее, снова делаем эндоморфизм

$$S_1 \to S_1' = e^{(g^2-g) gP_{1,x} + g^3 P'''_{3,x} + \cdots} \in \mathfrak{G}(p^a). \tag{55}$$

Составим

$$S_2 = S_1^{g^3} S_1'^{-1} = e^{(g^2-g)(g^3-g) P_{1,x} + P'''_{4,x} + \cdots} \in \mathfrak{G}(p^a). \tag{57}$$

Продолжая эту конструкцию, придем к

$$S_{p-2} = S_{p-3}^{g^{p-1}} S'^{-1}_{p-3} = e^{\prod\limits_{\nu=2}^{p-1} (g^\nu - g) P_{1,x} + \widetilde{P}_{p,x} + \widetilde{P}_{p+1,x} + \cdots} \in \mathfrak{G}(p^a).$$

Число

$$\lambda = \prod_{\nu=2}^{p-1} (g^\nu - g) \not\equiv 0 \pmod p,$$

а потому найдется положительное число λ_1 такое, что

$$\mu = \lambda\lambda_1 \equiv 1 \pmod{p^a}.$$

Обозначим

$$\widetilde{S} = S_{p-2}^{\lambda_1} = e^{\mu P_{1,x} + P^*_{p,x} + P^*_{p+1,x} + \cdots} \in \mathfrak{G}(p^a).$$

Тогда

$$\widetilde{S} A^{-\mu} = e^{P^{**}_{2,x} + P^{**}_{3,x} + \cdots + P^{**}_{p-1,x} + P^{**}_{\alpha,x} + \cdots}.$$

При этом, если

$$A = e^{P_{1,x} + P_{2,x} + P_{3,x} + \cdots} \in \mathfrak{G}_{2,x} \tag{58}$$

и наименьшая степень слагаемых $P_{\nu,x} \geqslant m$ $(\nu = 2, 3, \ldots, p-1)$, то, на основании формулы (4), имеем, что

$$\text{наименьшая степень слагаемых } P^{**}_{\nu,x} \geqslant m \quad (\nu = 2, 3, \ldots, p-1), \tag{59}$$

т. е. во всяком случае, если

$$m > \text{наименьшей степени слагаемых } P_{1,x}, \tag{60}$$

то наименьшая степень слагаемых $P^{**}_{\nu,x} \geqslant l+1$ $(\nu = 2, 3, \ldots, p-1)$, где l — наименьшая степень слагаемых $P_{1,x}$.

В этом случае $\mu - 1 = p^a\rho$, ρ — целое,

$$A^{-\mu} = (A^{-\rho})^{p^a} \cdot A^{-1},$$

и (58) дает

$$\widetilde{S}(A^{-\rho})^{p^a} A^{-1} \equiv 1 \mod (\mathfrak{G}_{2,x} \cap \mathfrak{G}_{l+1} \cdot \mathfrak{G}_{p,x}), \tag{61}$$

т. е. имеем

$$A \equiv S^* = \widetilde{S}(A^{-\rho})^{p^a} \mod (\mathfrak{G}_{2,x} \cap \mathfrak{G}_{l+1} \cdot \mathfrak{G}_{p,x}), \tag{62}$$

где $S^* \in \mathfrak{G}(p^a)$.

Из теоремы, обратной теореме 5, получаются соотношения, аналогичные соотношениям, полученным Грюном, но более точные.

Пусть $\mathfrak{A}$ — свободная группа, порожденная свободными образующими $G_1, G_2, \ldots$. Будем считать, что она задана уже в изоморфном представлении $G_\nu = e^{x_\nu}$, где $x_1, x_2, \ldots$ — свободные ассоциативные переменные.

Формула (54) имеет место для любых ассоциативных x и y, являющихся степенными рядами от $x_1, x_2 \ldots$ без свободных членов. Возьмем $U_m \in \mathfrak{A}_m$, $V \in \mathfrak{A}$, тогда

$$U_m = e^{P_m + P_{m+1} + \cdots},$$
$$V = e^{P_1' + P_2' + \cdots}.$$

Обозначим

$$x = P_m + P_{m+1} + \cdots,$$
$$y = P_1' + P_2' + \cdots.$$

Положим в (54)

$$e^y = V, \quad e^x = U_m, \ T_0 = 1, \ T_1 = 1, \ldots,$$
$$T_{\nu-1} = 1, T_\nu = e^x, \ T_{\nu+1} = 1, \ldots, T_a = 1.$$

Тогда

$$A = [(e^x, e^y, \nu(p^\nu - p^{\nu-1}))\, e^{p^\nu y}]^{p^a - \nu} e^{-p^a y} =$$
$$= e^{[xy^{\nu(p^\nu - p^{\nu-1})}] + P_{\nu(p^\nu - p^{\nu-1})+2} + \cdots},$$

т. е. выполнены условия (60), при которых можно применить улучшение (62). Сравнение (62) выполняется в свободной группе $\mathfrak{G} = \{e^x, e^y\}$. Но если e^x, e^y выбраны, как указано выше, в группе $\mathfrak{A}$, то (62) верно уже при замене x на $P_m + P_{m+1} + \cdots$ и y на $P_1' + P_2' + \cdots$. Нетрудно подсчитать, что $l = \nu(p^\nu - p^{\nu-1}) + 1$ и при выбранных x и y

$$\mathfrak{G}_{2,x} \cap \mathfrak{G}_{l+1} \cdot \mathfrak{G}_{p,x} \subset \mathfrak{A}_q,$$

где

$$q = \min(pm + 1, \ l + 2m - 1),$$

т. е.

$$q = \min(pm + 1, \ 2m + \nu(p^\nu - p^{\nu-1})). \tag{63}$$

Все это доказывает, что для $U_m \in \mathfrak{A}_m$ и $V \in \mathfrak{A}$ имеет место соотношение

$$[(U_m, V, \nu(p^\nu - p^{\nu-1}))\, V^{p^\nu}]^{p^{a-\nu}} V^{-p^a} \equiv 1 \mod (\mathfrak{A}(p^a) \cdot \mathfrak{A}_q),$$

т. е. справедлива

ТЕОРЕМА 6. *В любой группе* $\mathfrak{A}$ *для* $U_m \in \mathfrak{A}_m$ *и* $V \in \mathfrak{A}$ *будет*

$$[(U_m, V, \nu(p^\nu - p^{\nu-1}))\, V^{p^\nu}]^{p^{a-\nu}} \equiv 1\ (\mathfrak{A}(p^a)\cdot\mathfrak{A}_q)\ (\nu = 0, 1, \ldots, a), \quad (64)$$
$$q = \min(pm+1,\ 2m + \nu(p^\nu - p^{\nu-1}))$$

и

$$(U_m,\ V,\ \nu(p^a - p^{a-1}))^{p^{a-\nu}} \equiv 1\,(\mathfrak{A}(p^a)\cdot\mathfrak{A}_{q_1}) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, a), \quad (65)$$
$$q_1 = \min(pm+1,\ 2m + \nu(p^a - p^{a-1})).$$

Формула (64) непосредственно следует из вышеприведенных рассуждений. Аналогично формула (65) следует из соотношения (25).

Заметим, что соотношение (64) становится нетривиальным, лишь если

$$q > m + \nu(p^\nu - p^{\nu-1}),$$
$$2m + \nu(p^\nu - p^{\nu-1}) > m + \nu(p^\nu - p^{\nu-1}) \text{ всегда.}$$

Поэтому наименьшее m такое, начиная с которого (64) будет нетривиальным соотношением, получится при условии

$$pm + 1 > m + \nu(p^\nu - p^{\nu-1})$$

или

$$pm \geqslant m + \nu(p^\nu - p^{\nu-1}),$$
$$m \geqslant \frac{p^\nu - p^{\nu-1}}{p-1} = \nu p^{\nu-1}. \quad (69)$$

Такое же значение m_1 для сравнения (65) получается из неравенства

$$m_1 \geqslant \nu p^{a-1}. \quad (67)$$

В частности, из формулы (64) получаем при $m \geqslant \nu p^{\nu-1}$ соотношение

$$[(U_m, V, \nu(p^\nu - p^{\nu-1}))\, V^{p^\nu}]^{p^{a-\nu}} \equiv$$
$$\equiv 1\,(\mathfrak{A}(p^a)\cdot\mathfrak{A}_{m+\nu(p^\nu - p^{\nu-1})+1}).$$

Нетрудно преобразовать это выражение и привести его к виду

$$(U_m, V, \nu(p^\nu - p^{\nu-1}))^{p^{a-\nu}} \equiv$$
$$\equiv 1\,(\mathfrak{A}(p^a)\cdot\mathfrak{A}_{m+\nu(p^\nu - p^{\nu-1})+1}). \quad (68)$$

В частности, если положить

$$U_m = (U, V, \nu p^{\nu-1} - 1),$$

где $U \in \mathfrak{A}$, то из (68) получим соотношение:

$$(U, V, \nu p^\nu - 1)^{p^{a-\nu}} \equiv 1\ (\mathfrak{A}(p^a)\cdot\mathfrak{A}_{\nu p^\nu + 1}). \quad (69)$$

Все эти соотношения оказываются более точными, чем соответствующие соотношения Грюна.

Для сравнения достаточно посмотреть соотношение (68), верное при $m \geqslant \nu p^{-1}$.

Если искать такие n, чтобы имело место сравнение

$$(U_m, V, n)^{p^{a-\nu}} \equiv 1 \; (\mathfrak{A}(p^a) \cdot \mathfrak{A}_{m+n+1}), \tag{70}$$

то в соотношении (68) будет даваться минимальное значение $n = \nu(p^\nu - p^{\nu-1})$. Улучшить его нельзя.

У Грюна в этой задаче для n найдено значение

$$\nu p^\nu - (\nu - 1) p^{\nu-1} - 1 =$$
$$= \nu(p^\nu - p^{\nu-1}) + p^{\nu-1} - 1,$$

и сравнение (70) начинает действовать при бо́льших номерах m, чем в настоящей работе.

Сравним также, в виде примера, наименьшие значения n, найденные для сравнения

$$(U, V, n) \equiv 1 \quad (\mathfrak{A}(p^a) \cdot \mathfrak{A}_{n+2}) \tag{71}$$

при $a = 2$ в работе Грюна и настоящей работе. Приведем также нижнюю границу n, которую нельзя принципиально уменьшить.

Наименьшие значения n, найденные для сравнения (71) в работе Грюна и настоящей работе при $a = \nu = 2$ для различных простых чисел p

p	2	3	5	7	11	13	17
В работе Грюна	11	29	89	181	461	649	1121
В настоящей работе . . .	7	17	49	97	241	337	577
Нижняя граница	4	12	40	84	220	312	544

Этот пример показывает точность полученных соотношений.

Поступило
4. I. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Zassenhaus H., Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 13 (1939), 1—100.

[2] Grün O., Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung, J. reine und angew. Math., 182 (1940), 158—177.

[3] Санов И. Н., Применение теории колец Ли к теории периодических p-групп (реферат доклада), Успехи матем. наук, т. 4, № 3 (1949), 180.

[4] Witt E., Treue Darstellung Liesche Ringe, J. reine und angew. Math., 177 (1937), 152—160.

[5] Hausdorf F., Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie, Bericht d. König. Sächs. Ges. der Wiss., Math.-Phys. Klasse, 58 (1906), 19—48.

[6] Дынкин Е. Б., О представлении ряда $\log(e^x e^y)$ от некоммутирующих x и y через коммутаторы, Матем. сб, 25 : 67, № 1 (1949), 155—162.

[7] Magnus W., Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe, J. reine und angew. Math., 182 (1940), 142—149.

[8] Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., 1944.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 503—532

Н. Я. ВИЛЕНКИН

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ СПЕКТРЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП И ИХ ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРОВ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе рассматриваются прямые спектры топологических абелевых групп с заданной ограниченностью. Строится предельная группа такого спектра и изучаются связи построенной группы с предельной группой сопряженного обратного спектра.

В приложениях теории топологических групп к комбинаторной топологии видное место занимают понятия прямых и обратных спектров. При этом обычно рассматриваются обратные спектры бикомпактных групп и прямые спектры дискретных групп.

За последнее время, в связи с построением гомологической теории незамкнутых подмножеств и теорем двойственности для незамкнутых подмножеств, возникла необходимость рассмотрения прямых спектров бикомпактных групп и обратных спектров дискретных групп. При этом возникли трудности, связанные с тем, что теория характеров достаточно полно разработана лишь для локально бикомпактных абелевых групп, а операция образования предельных групп прямых спектров бикомпактных групп, равно как и операция образования предельных групп обратных спектров дискретных групп, выводит за пределы класса локально бикомпактных групп. Ввиду этого Г. С. Чогошвили в работах (1), (2) ввел новое определение предельных групп в упомянутых случаях, причем предельная группа прямого спектра бикомпактных групп является при таком определении бикомпактной группой, а предельная группа обратного спектра дискретных групп — дискретной группой. Г. С. Чогошвили получил при помощи своего определения ряд теорем двойственности для незамкнутых подмножеств (1), (3). Теория Чогошвили существенно употребляется и в работе П. С. Александрова (4), в которой устанавливается закон двойственности, применимый к любым подмножествам эвклидова пространства.

К недостаткам определения Г. С. Чогошвили следует отнести тот факт, что предельная группа спектра определяется различным образом в зависимости от того, являются ли группы дискретными или бикомпактными. Поэтому, например, для обратного спектра, состоящего из конечных абелевых групп, мы имеем два определения его предельной

группы: одно получится, если взять обычное определение предельной группы, т. е. рассматривать наши группы как бикомпактные, а другое, — если взять определение Г. С. Чогошвили, т. е. рассматривать эти группы как дискретные. С этим связана невозможность перенесения определения Г. С. Чогошвили на общий случай спектра, состоящего из локально бикомпактных абелевых групп.

В связи с этим автором этой статьи было предложено другое определение предельной группы прямого спектра топологических абелевых групп ([5]), подробному изложению которого и посвящена эта статья. При этом используется построенная в ([6]) теория характеров топологических абелевых групп с заданной ограниченностью.

В первом параграфе работы излагается теория обратных спектров топологических групп с заданной ограниченностью. Большинство результатов приведено без доказательства, так как они доказываются точно так же, как для обратных спектров топологических групп, теория которых с достаточной полнотой изложена в ([7]) и ([8]). Мы ограничиваемся лишь некоторыми дополнениями, вызванными наличием ограниченности. Кроме того, в этом параграфе исследуется вопрос об условиях инволюционности предельной группы обратного спектра инволюционных групп.

Во втором параграфе определяется предельная группа прямого спектра топологических абелевых групп с заданной ограниченностью и показывается, что эта предельная группа обладает свойствами, аналогичными свойствам предельной группы прямого спектра дискретных групп, причем в случае, когда все группы спектра дискретны, мы получаем обычное определение предельной группы. В частности, доказывается, что предельная группа конфинального частичного спектра изоморфна предельной группе всего спектра, а также, что если все группы спектра изоморфны между собой, причем гомоморфизмы спектра являются изоморфизмами «на», то предельная группа изоморфна всем группам спектра.

Далее устанавливается, что, так же как понятие предельной группы обратного спектра связано с аппроксимацией группы фактор-группами, понятие предельной группы прямого спектра связано с аппроксимацией группы ее замкнутыми подгруппами.

Рассматривается также вопрос о спектральном разложении подгрупп и фактор-групп предельной группы.

Третий параграф посвящен теории сопряженных спектров. Устанавливается, что при некоторых условиях, выполняющихся во всяком случае для спектров локально бикомпактных групп, предельная группа сопряженного спектра является группой характеров предельной группы данного спектра.

В четвёртом параграфе устанавливаются связи с определениями предельных групп прямых спектров, данными Фрейденталем и Чогошвили. В частности, показано, что существует непрерывное алгебраически изоморфное отображение определенной нами предельной группы в предельную группу Чогошвили и что спектры, обладающие изоморфными предельными группами в данном нами смысле, обладают изоморфными группами в смысле Чогошвили, и обратно.

§ 1. Теория обратных спектров

1.1. Определение 1. Частично упорядоченное множество Δ называется *неограниченным справа* (или *направленным справа*), если для двух его элементов α и β найдется такой элемент $\gamma \in \Delta$, что $\alpha < \gamma$ и $\beta < \gamma$.

Аналогично определяется *неограниченность слева*.

1.2. Определение 2. Пусть Δ — частично упорядоченное неограниченное справа множество, и пусть $M = [G_\alpha]$ — множество топологических абелевых групп с заданными ограниченностями, индексы которых принадлежат Δ. Предположим, что для любой пары индексов α и β, $\alpha < \beta$, задано непрерывное гомоморфное отображение $\varphi_{\alpha\beta}$ (соответственно $\varphi^{\beta\alpha}$) группы G_α в G_β (соответственно G_β в G_α), причем $\varphi_{\alpha\beta}\,\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$, если $\alpha < \beta < \gamma$ (соответственно $\varphi^{\gamma\beta}\varphi^{\beta\alpha} = \varphi^{\gamma\alpha}$, если $\alpha < \beta < \gamma$). Тогда совокупность групп G_α с заданными гомоморфизмами $\varphi_{\alpha\beta}$ (соответственно $\varphi^{\beta\alpha}$) называется *прямым* (соответственно *обратным*) *спектром групп*. Прямой (соответственно обратный) спектр групп мы будем обозначать $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ (соответственно $\{G_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$).

Если все гомоморфизмы спектра открыты (соответственно ограничены, ограничивающие, биограничены), то спектр называется *открытым* (соответственно *ограниченным*, *ограничивающим*, *биограниченным*).

Относительно определения всех понятий, связанных с ограниченностью в группах, см. ([6]).

1.21. Определение 3. *Предельной группой обратного спектра* $\{G_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ топологических абелевых групп с заданной ограниченностью называется подгруппа H группы $G = \underset{\alpha\in\Delta}{S}\, G_\alpha$ (мы придерживаемся в этой статье тех же обозначений, что и в ([12])), состоящая из всех таких элементов $g = [g_\alpha]$, $g_\alpha \in G_\alpha$, что при $\alpha < \beta$ имеем $g_\alpha = \varphi^{\beta\alpha} g_\beta$.

1.22. Отметим, что H является замкнутой подгруппой группы G. Согласно 1.23 из ([6]), ограниченными множествами в G называются все множества, проекции которых в каждую из групп G_α ограничены в G_α. Тем самым определяется ограниченность в H. Топология в H может быть определена также при помощи множеств $H \cap V_{\alpha_0}$, где через V_{α_0} обозначена совокупность всех элементов $g = [g_\alpha]$ группы G, для которых g_{α_0} лежит в фиксированной окрестности нуля U_{α_0} группы G_{α_0}. Относительно эквивалентности этой топологии с топологией, индуцируемой в H топологизацией G как прямой топологической суммы, см. ([8]), стр. 34.

1.3. Пусть M — неограниченное справа подмножество множества Δ. Тогда $\{G_\lambda;\ \varphi^{\mu\lambda}\}$, где λ, μ лежат в M, называется частью спектра $\{G_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$. Пусть H' — предельная группа для спектра $\{G_\lambda;\ \varphi^{\mu\lambda}\}$, и пусть $g = [g_\alpha] \in G$. Отбирая координаты g_α элемента g, для которых $\alpha \in M$, получим однозначно определенный элемент g' группы $\underset{\alpha\in M}{S}\, G_\alpha$. Очевидно, что из $g \in H$ следует $g' \in H'$. Отображение $\theta: g \to g'$ назовем проекцией H в H'. Эта проекция является непрерывным ограниченным гомоморфным отображением группы H в H'. Если Δ упорядочено по типу натурального ряда чисел и все отображения $\varphi^{\beta\alpha}$ — ограничивающие, то и проек-

ция θ является ограничивающим отображением. Если множество M конфинально множеству Δ и все отображения $\varphi^{\beta\alpha}$ ограничены, то θ является вполне изоморфным отображением группы H на H'.

Если положить $M = \alpha$, то мы получаем, что при любом α_0 отображение $\varphi^{\alpha_0}: g \to g_{\alpha_0}$ является гомоморфным ограниченным отображением H в G_{α_0}. При этом, если при всех $\beta > \alpha_0$ гомоморфизмы $\varphi^{\beta\alpha_0}$ являются вполне изоморфными отображениями G_β на G_{α_0}, то и φ^{α_0} является вполне изоморфным отображением H на G_{α_0}.

1.4. Пусть $\{G_\alpha; \varphi^{\beta\alpha}\}$ — обратный спектр, и пусть в каждой группе G_α, $\alpha \in \Delta$, задано бикомпактное подмножество H_α, причем при $\beta > \alpha$ имеем

$$\varphi^{\beta\alpha}(H_\beta) \in H_\alpha.$$

Тогда существует такой элемент $g = [g_\alpha]$ предельной группы H этого спектра, что при всех α

$$g_\alpha \in H_\alpha.$$

Отсюда вытекает, что если обратный спектр $\{G_\alpha; \varphi^{\beta\alpha}\}$ таков, что при всех $\beta > \alpha$ ядро $Q^{\beta\alpha}$ гомоморфизма $\varphi^{\beta\alpha}$ бикомпактно, и x_γ — такой элемент группы G_γ, что при всех $\beta > \gamma$ имеем

$$x_\gamma \in \varphi^{\beta\gamma} G_\beta,$$

то в предельной группе H этого спектра существует элемент $g = [g_\alpha]$, γ-координата которого равна x_γ.

1.5. Пусть $\{G_\alpha; \varphi^{\beta\alpha}\}$ и $\{G_\alpha'; \psi^{\beta\alpha}\}$ — два обратных спектра топологических абелевых групп с заданной ограниченностью, обозначенных индексами из одного и того же множества Δ, предельными группами которых являются соответственно H и H'. Предположим, что для каждого $\alpha \in \Delta$ установлен непрерывный ограниченный гомоморфизм τ_α группы G_α в G_α', причем при $\beta > \alpha$ имеем

$$\psi^{\beta\alpha} \tau_\beta = \tau_\alpha \varphi^{\beta\alpha}.$$

Тогда, ставя в соответствие элементу $g = [g_\alpha]$ из H элемент $g' = [\tau_\alpha g_\alpha]$ из $\mathrm{S}\, G_\alpha'$, мы получаем непрерывное ограниченное гомоморфное отображение τ группы H в H'. Если при этом все группы G_α бикомпактны и $H_\alpha' = \tau_\alpha G_\alpha$, то $\{H_\alpha'; \psi^{\beta\alpha}\}$ является обратным спектром. τ является открытым гомоморфизмом группы H на предельную группу H'' этого спектра.

1.6. Определение 4. Обратный спектр $\{G_\alpha; \varphi^{\beta\alpha}\}$ топологических абелевых групп с заданной ограниченностью называется *вполне открытым*, если

1) все $\varphi^{\beta\alpha}$ являются открытыми биограниченными гомоморфными отображениями группы G_β на G_α;

2) при любом α построенное в 1.3. отображение φ^α предельной группы H этого спектра в G_α является непрерывным биограниченным гомоморфным отображением группы H на G_α.

Из условий 1) и 2) определения 4 вытекает, что отображение φ^α открыто. Если при любых α и β ядро $Q^{\beta\alpha}$ гомоморфизма $\varphi^{\beta\alpha}$ бикомпактно и ограничено в G_β, то условие 2) определения 4 вытекает из условия 1). Это следует из 1.4 и из того, что ограниченность ядра

ограничивающего гомоморфизма влечет за собой ограниченность прообразов ограниченных множеств. Отметим еще, что бикомпактность всех $Q^{\beta\alpha}$ является необходимым и достаточным условием бикомпактности ядер Q^{α} гомоморфизмов φ^{α}.

1.7. Дадим теперь внутреннее определение предельной группы обратного спектра топологических групп.

Определение 5. Пусть G — топологическая абелева группа с заданной ограниченностью и $[Q^{\alpha}]$, $\alpha \in \Delta$, — система ее замкнутых подгрупп. Группа G *аппроксимируема фактор-группами* G / Q_{α}, если

1) для любых α и β из Δ найдется такое $\gamma \in \Delta$, что $Q^{\gamma} \subset Q^{\alpha} \cap Q^{\beta}$;

2) какова бы ни была окрестность нуля U группы G, найдется такое $\alpha \in \Delta$, что $Q^{\alpha} \subset U$;

3) любая центрированная система смежных классов по подгруппам Q^{α} имеет непустое пересечение;

4) каковы бы ни были ограниченные множества $A_{\alpha} \subset G$, множество $\bigcap\limits_{\alpha} (A_{\alpha} + Q_{\alpha})$ ограничено в G.

Для установления связи этого понятия с понятием вполне открытого обратного спектра заметим, что если $\{G_{\alpha};\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ — вполне открытый обратный спектр топологических абелевых групп с заданной ограниченностью, H — его предельная группа и Q^{α} — ядро гомоморфного отображения φ^{α} группы H на G_{α}, то система подгрупп Q^{α} удовлетворяет условиям 1) — 4) определения 5.

С другой стороны, если группа G аппроксимируема системой своих фактор-групп G / Q^{α}, то фактор-группы G / Q_{α} естественным образом задают вполне открытый обратный спектр. Именно, мы считаем $\beta > \alpha$, если $Q^{\beta} \subset Q^{\alpha}$, и берем в качестве $\varphi^{\beta\alpha}$ естественное гомоморфное отображение группы G / Q^{β} на группу G / Q^{α}. Предельная группа получающегося спектра вполне изоморфна G. Заметим, что условие 3) определения 5 заведомо выполняется, если хотя бы одна из подгрупп Q^{α} бикомпактна, или если группа G полна в смысле Вейля [(9), n° 13].

Условие 4) определения 5 заведомо выполняется, если хотя бы одна из подгрупп Q^{α} ограничена в G.

1.8. Вполне открытый обратный спектр называется *чистым*, если при $\beta > \alpha$ подгруппа $Q^{\beta\alpha}$ бикомпактна [см. (10)]. Как уже упоминалось, тогда бикомпактна и подгруппа Q^{α}.

Пусть $\{G_{\alpha};\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ — чистый спектр и пусть в каждой из групп G_{α} заданы замкнутые подгруппы L_{α} и M_{α}, причем при $\beta > \alpha$ имеем

$$\varphi^{\beta\alpha}(L_{\beta}) = L_{\alpha}$$

и

$$\varphi^{\beta\alpha}(M_{\beta}) = M_{\alpha}$$

и при каждом α $L_{\alpha} \subset M_{\alpha}$. Тогда при $\beta > \alpha$ гомоморфизм $\varphi^{\beta\alpha}$ индуцирует открытое биограниченное непрерывное гомоморфное отображение $\psi^{\beta\alpha}$ фактор-группы M_{β} / L_{β} на M_{α} / L_{α}. Легко видеть, что предельной группой получающегося чистого обратного спектра $\{M_{\alpha} / L_{\alpha};\ \psi^{\beta\alpha}\}$ будет фактор-группа M / L, где

$$M = \bigcap_{\alpha} (\varphi^{\alpha})^{-1} M_{\alpha}$$

и

$$L = \bigcap_{\alpha} (\varphi^{\alpha})^{-1} L_{\alpha},$$

причем M является замкнутой подгруппой предельной группы H спектра $\{G_{\alpha};\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ и L — замкнутой подгруппой в M.

Обратно, если M — замкнутая подгруппа в H и L — замкнутая подгруппа в M, то, полагая $M_{\alpha} = \varphi^{\alpha}(M)$ и $L_{\alpha} = \varphi^{\alpha}(L)$, получим, что M/L является предельной группой чистого обратного спектра $\{M_{\alpha}/L_{\alpha};\ \varphi^{\beta\alpha}\}$.

Укажем еще, что прямая топологическая сумма групп G_{α} может рассматриваться как предельная группа вполне открытого обратного спектра, образованного конечными прямыми суммами групп G_{α}.

1.9. Пусть H — предельная группа обратного спектра инволюционных групп. Так как H является подгруппой группы $G = \mathop{S} G_{\alpha}$, а последняя инволюционна в силу 4.5 из [6], то, согласно 4.4 из [6], для доказательства инволюционности H достаточно показать, что:

1) любой характер χ, заданный на H, можно распространить на всю группу G;

2) для любого элемента $g \in G$, не лежащего в H, можно найти такой характер χ, что $\chi(H) = 0$ и $\chi(g) \neq 0$ (это условие эквивалентно квазивыпуклости H в G).

Мы покажем, что второе условие выполняется всегда, а первое — в случае, если при любом α можно распространить на всю группу G_{α} характер, заданный на $\varphi^{\alpha}(H)$.

1.91. ЛЕММА 1. *Пусть $G = \mathop{S} G_{\alpha}$, где G_{α} — топологическая абелева группа, и H — замкнутая подгруппа в G. Тогда для любого характера χ, заданного на H, можно найти такое конечное множество индексов $\alpha_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$, что характер χ можно распространить на группу $T + H$, где $T = \mathop{S}\limits_{\alpha \neq \alpha_i}^{1 \leqslant i \leqslant n} G_{\alpha}$.*

Доказательство. Так как характер χ непрерывен на H, то существует такая окрестность нуля U группы G, что

$$|\chi(U \cap H)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Пусть V — такая окрестность нуля в G, что $V^2 \subset U$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — такие индексы, что

$$T = \mathop{S}\limits_{\alpha \neq \alpha_i}^{1 \leqslant i \leqslant n} G_{\alpha} \subset V.$$

Тогда $\chi(T \cap H) = 0$. Поэтому, полагая для любых двух элементов $t \in T$ и $h \in H$

$$\chi_1(t + h) = \chi(t),$$

мы получим однозначно определенное гомоморфное отображение группы $T + H$ в $\mathfrak{R}$ (группу вращений окружности).

Покажем, что это отображение непрерывно на $T+H$. Пусть $g \in V \cap (T+H)$, где $g = t + h$, $t \in T$, $h \in H$, и пусть $|\chi_1(g)| > \frac{1}{4}$. Тогда

$$|\chi(h)| = |\chi_1(g)| > \frac{1}{4},$$

в то время как

$$h = g - t \in (V+T) \cap H \subset V^2 \cap H \subset U \cap H,$$

что противоречит выбору U. Таким образом, из $g \in V \cap (T+H)$ следует $|\chi_1(g)| \leqslant \frac{1}{4}$, чем, в силу п. 4.15 из [6], и доказана непрерывность характера χ_1. Но характер, непрерывный на $T+H$, можно непрерывно продолжить на $\overline{T+H}$, и наша лемма доказана.

1.92. ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\{G_\alpha; \varphi^{\beta\alpha}\}$ — *обратный спектр топологических абелевых групп с заданной ограниченностью и* H — *его предельная группа (рассматриваемая как подгруппа группы* $G = \mathfrak{S}G_\alpha$). *Пусть* U — *некоторая окрестность нуля группы* H. *Тогда существует такой индекс* β, *что любому характеру* χ *группы* H, *для которого* $|\chi(U)| \leqslant \frac{1}{4}$, *соответствует такой характер* χ_β *группы* $\varphi^\beta(H)$, *что* $\chi_\beta(g_\beta) = \chi(g)$ *для любого элемента* $g = [g_\alpha]$ *группы* H.

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — индексы, соответствующие, согласно лемме 1, характеру χ, и пусть V — такая окрестность нуля группы G, что $U \supset V \cap H$. Как уже упоминалось, мы можем считать, что существует такой индекс α_{n+1} и такая окрестность нуля $U_{\alpha_{n+1}}$ в $G_{\alpha_{n+1}}$, что V состоит из всех элементов $g = [g_\alpha]$ группы G, для которых $g_{\alpha_{n+1}} \in U_{\alpha_{n+1}}$. Этот индекс α_{n+1}, равно как и индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, зависят лишь от U, но не от χ. Пусть $\beta = \alpha_{n+2}$ — индекс, больший всех индексов α_k $(1 \leqslant k \leqslant n+1)$.

Так как характер χ можно распространить на $\overline{T+H}$, где $T = \underset{\alpha \neq \alpha_i}{\overset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathfrak{S}}} G_\alpha$, так что

$$\chi_1(t+h) = \chi(h)$$

при $t \in T$ и $h \in H$, то существует характер ψ группы $L = H + Q$, где $Q = \underset{\alpha \neq \alpha_i}{\overset{1 \leqslant i \leqslant n+2}{\mathfrak{S}}} G_\alpha$, такой, что

$$\psi(g+h) = \chi(h)$$

при $q \in Q$ и $h \in H$.

Рассмотрим два элемента $x = [x_\alpha]$ и $y = [y_\alpha]$ из L. Так как

$$x_{\alpha_k} = \varphi^{\beta\alpha_k}(x_\beta) \quad \text{и} \quad y_{\alpha_k} = \varphi^{\beta\alpha_k}(y_\beta),$$

то из $x_\beta = y_\beta$ следует что

$$x_{\alpha_k} = y_{\alpha_k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n+1),$$

а потому $x - y \in Q$ и $\psi(x) = \psi(y)$.

Таким образом, полагая при $x \in L$

$$x = [x_\alpha], \quad \chi_\beta(x_\beta) = \psi(x);$$

мы получаем однозначно определенный гомоморфизм группы $\varphi^{\beta}(H)$ в $\mathfrak{R}$. Покажем, что этот гомоморфизм непрерывен. В самом деле, $Q \subset U$ и потому

$$U \cap L = U \cap H + Q$$

и

$$|\psi(U \cap L)| = |\chi(U \cap H)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Положим

$$V_{\beta} = (\varphi^{\alpha_{n+1}})^{-1} U_{\alpha_{n+1}}.$$

Пусть $x = [x_{\alpha}]$ — такой элемент из H, что $x_{\beta} \in V_{\beta}$. Тогда $x \in U \cap H$ и

$$|\chi_{\beta}(x_{\beta})| = |\psi(x)| = |\chi(x)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$|\chi_{\beta}(V_{\beta} \cap \varphi^{\beta}(H)| \leqslant \frac{1}{4},$$

откуда, в силу 4.15 из ([6]), вытекает непрерывность гомоморфизма χ_{β}. Так как для любого элемента $g = [g_{\alpha}]$ из H имеем $\chi_{\beta}(g_{\beta}) = \chi(g)$, то теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\{G_{\alpha}; \varphi^{\beta\alpha}\}$ и H имеют тот же смысл, что и выше, и пусть при любом α характер, заданный на $\varphi^{\alpha}(H)$, можно распространить на всю группу G_{α}. Тогда любой характер χ, заданный на группе H, можно распространить на всю группу G.*

Доказательство. Найдем, согласно теореме 1 и условию следствия, такой индекс β и такой характер χ_{β} группы G_{β}, что для всех элементов $g = [g_{\alpha}] \in H$ имеем

$$\chi_{\beta}(g_{\beta}) = \chi(g).$$

Положим для любого элемента $g = [g_{\alpha}] \in G$

$$\psi(g) = \chi_{\beta}(g_{\beta}).$$

ψ и будет искомым характером.

В частности, любой характер, заданный на предельной группе H обратного спектра локально бикомпактных групп, можно распространить на G.

1.93. ТЕОРЕМА 2. *Пусть H и $\{G_{\alpha}; \varphi^{\beta\alpha}\}$ имеют тот же смысл, что и выше, причем все группы G_{α} инволюционны. Тогда для любого элемента $x = [x_{\alpha}]$ из G, не принадлежащего H, найдется такой характер χ группы G, что $\chi(H) = 0$ и $\chi(x) \neq 0$.*

Доказательство. Так как $x \bar{\in} H$, то найдутся такие индексы α и β, $\beta > \alpha$, что

$$t_{\alpha} = x_{\alpha} - \varphi^{\beta\alpha} x_{\beta} \neq 0.$$

Так как группа G_{α} инволюционна, то найдется такой характер χ_{α} группы G_{α}, что $\chi_{\alpha}(t_{\alpha}) \neq 0$. Полагая для любого элемента $g = [g_{\gamma}]$ из G

$$\chi(g) = \chi_\alpha(g_\alpha - \varphi^{\beta\alpha} g_\beta),$$

получаем такой характер χ группы G, что $\chi(H) = 0$ и $\chi(x) \neq 0$.

1.94. ТЕОРЕМА 3. *Пусть H и $\{G_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ имеют тот же смысл, что и в следствии, причем все группы G_α инволюционны. Тогда и группа H инволюционна.*

Эта теорема вытекает из теоремы 2 и следствия к теореме 1, в силу замечания, сделанного в 1.9.

Отметим, в частности, что теорема имеет место, если группы G_α инволюционны и все гомоморфизмы φ^α являются гомоморфизмами «на», а также в случае, когда все группы G_α локально бикомпактны, а ограниченными в G_α называются подмножества с бикомпактными замыканиями.

§ 2. Теория прямых спектров

2.1. Рассмотрим прямой спектр $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ топологических абелевых групп с заданной ограниченностью. Назовем систему окрестностей нуля $[U_\alpha]$ групп G_α *согласованной*, если при $\alpha < \beta$ имеем

$$U_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}\left[U_\beta \cap \varphi_{\alpha\beta}(G_\alpha)\right].$$

Введем теперь топологию в группу $G = \sum G_\alpha$ следующим образом. Возьмем согласованную систему квазивыпуклых окрестностей нуля $[U_\alpha]$ групп G_α и обозначим через $U^a[U_\alpha]$ совокупность таких элементов $g = [g_\alpha]$ группы G, что все $g_\alpha \in U_\alpha$, причем $\sum g_\alpha / U_\alpha < 1$. Множество всех $U^a[U_\alpha]$, получаемых таким образом, примем за полную систему окрестностей нуля группы G.

Покажем, что при этом выполняются аксиомы GT II — IV из ([8]).

Аксиома GT IV выполняется тривиальным образом, так как группа G абелева. Пусть $U = U^a[U_\alpha]$ — некоторая окрестность нуля в G. Утверждение 2.16 из ([6]) показывает, что система $\left[\frac{1}{2} U_\alpha\right]$ окрестностей нуля группы G_α согласована, а утверждение 2.15 — что все $\frac{1}{2} U_\alpha$ квазивыпуклы. Поэтому существует окрестность нуля $V = U^a\left[\frac{1}{2} U_\alpha\right]$ группы G. Но тогда утверждения 2.12 и 2.13 из ([6]) показывают, что $VV^{-1} \subset U$ и потому удовлетворяется аксиома GT III.

Пусть теперь $U = U^a[U_\alpha]$ и $V = U^a[V_\alpha]$ — две окрестности нуля группы G. Положим

$$W_\alpha = U_\alpha \cap V_\alpha.$$

Из того, что прообраз пересечения равен пересечению прообразов и из утверждения 2.14 ([6]) вытекает, что совокупность всех W_α образует согласованную систему квазивыпуклых окрестностей нуля группы G_α, равно как и совокупность всех $\frac{1}{2} W_\alpha$. Пусть

$$Q = U^a\left[\frac{1}{2} W_\alpha\right].$$

Нетрудно видеть, что тогда $Q \subset U \cap V$. Для доказательства достаточно заметить, что всегда

$$x_\alpha / W_\alpha = \max(x_\alpha / U_\alpha;\ x_\alpha / V_\alpha).$$

Таким образом, выполняется и аксиома GT II.

Аксиома GT I, вообще говоря, не выполняется для построенной нами топологизации группы G, а потому она при этой топологизации превращается в общую топологическую группу ([11]), причем аксиомы отделимости могут и не выполняться.

Будем обозначать топологизированную таким образом группу G через G^*.

Ограниченными множествами в группе G^* назовем множества, проекции которых в каждое G_α ограничены в G_α, причем почти для всех α эти проекции равны нулю. Нетрудно проверить, что совокупность таких множеств удовлетворяет аксиомам 1) — 4) из 1.1 в ([6]).

2.11. Рассмотрим в группе G^* подгруппу H^*, алгебраически порожденную элементами вида $x_\alpha - \varphi_{\alpha\beta} x_\alpha$.

Фактор-группу $F = G^* / \overline{H}^*$ назовем *предельной группой прямого спектра* $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$. Так как F является фактор-группой общей топологической группы по замкнутой подгруппе, то в F выполнена T_2-аксиома отделимости. Легко показать, что если все группы G_α дискретны, то и группа F дискретна, причем она изоморфна обычной предельной группе спектра $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$. В самом деле, в этом случае нуль группы G открыт в G и потому G, а тем самым и F, дискретны. Группа же H^* в этом случае состоит из таких элементов $x = [x_\alpha]$ группы G, что для любого α можно найти β, для которого выполняется соотношение $\varphi_{\alpha\beta} x_\alpha = 0$, и потому F совпадает с обычно рассматриваемой предельной группой ([7]).

2.2. Заметим, что если $U = U^a[U_\alpha]$, то при любом α

$$U \cap G_\alpha = U_\alpha$$

является окрестностью нуля в G_α. Поэтому отображение ψ_α, ставящее в соответствие элементу $x_\alpha \in G_\alpha$ такой элемент $y = [y_\beta]$ группы G^*, что $y_\alpha = x_\alpha$ и $y_\beta = 0$ при $\beta \neq \alpha$, является непрерывным гомоморфным отображением группы G_α в G^*, которое мы будем называть *вложением* группы G_α в G^*. Нетрудно убедиться, что отображение ψ_α биограничено.

Ставя элементу $x_\alpha \in G_\alpha$ в соответствие элемент $x = \theta\psi_\alpha(x_\alpha)$ из F, где через θ обозначено гомоморфное отображение группы G^* на F, мы получим непрерывное биограниченное гомоморфное отображение φ_α группы G_α в F, называемое *вложением* G_α в F. Элемент x_α мы назовем *представителем* элемента x в G_α.

2.21. ЛЕММА 2. *Каково бы ни было множество M, конфинальное с Δ, для любого элемента $x \in F$ найдется представитель x_μ в некоторой группе G_μ, индекс μ которой принадлежит M.*

Доказательство. Выберем в $\theta^{-1}(x)$ некоторый элемент $x' \in G^*$. Элемент x' имеет вид

$$x' = \sum_{k=1}^{n} x_{\alpha_k},$$

где $x_{\alpha_k} \in G_{\alpha_k}$. Пусть μ — такой индекс из множества M, что $\mu > \alpha_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Так как

$$x_{\alpha_k} - \varphi_{\alpha_k \mu}(x_{\alpha_k}) \in H,$$

то

$$x' - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\alpha_k \mu}(x_{\alpha k}) \in H,$$

а это значит, что x имеет своим представителем в G_μ элемент

$$_\mu = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\alpha_k \mu}(x_{\alpha_k}).$$

2.3. Отметим, далее, что H^* состоит из тех и только тех элементов

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_{\alpha_k} \quad (x_{\alpha_k} \in G_{\alpha_k})$$

группы G^*, для которых существует такой индекс $\lambda > \alpha_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, что

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\alpha_k \lambda}(x_{\alpha_k}) = 0.$$

В самом деле, если такой индекс существует, то

$$x = \sum_{k=1}^{n} \left[x_{\alpha_k} - \varphi_{\alpha_k \lambda}(x_{\alpha_k})\right] \in H.$$

Обратно, если $x \in H$, то x имеет вид

$$x = \sum_{k=1}^{n} \left[y_{\alpha_k} - \varphi_{\alpha_k \beta_k}(y_{\alpha_k})\right],$$

$$y_\alpha \in G_{\alpha_k}.$$

Выбирая $\lambda > \beta_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, убеждаемся, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\varphi_{\alpha_k \lambda}(y_{\alpha_k}) - \varphi_{\beta_k \lambda}(\varphi_{\alpha_k \beta_k}(y_{\alpha_k}))\right] = 0.$$

2.31. ЛЕММА 3. *Пусть* $U = U^{\alpha}_{\gamma}[U_\alpha]$, *где* $[U_\alpha]$ — *согласованная система квазивыпуклых окрестностей нуля групп* G_α *и* $x \in U$. *Тогда существует такой индекс* $\lambda \in \Delta$, *что*

$$x = u^\lambda + h,$$

где $u^\lambda \in U_\lambda$ *и* $h \in H^*$.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{k=1}^{n} u_{\alpha_k}$, где $u_{\alpha_k} \in U_{\alpha_k}$ и λ — такой индекс, что $\lambda > \alpha_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Из того, что $\varphi_{\alpha_k\lambda}(U_{\alpha_k}) \subset U_\lambda$, следует, что

$$\varphi_{\alpha_k\lambda}(u_{\alpha_k}) \Big/ U_\lambda \leqslant u_{\alpha_k} \Big/ U_{\alpha_k},$$

а потому

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\alpha_k\lambda}(u_{\alpha_k}) \Big/ U_\lambda \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_{\alpha_k} \Big/ U_{\alpha_k} \leqslant 1$$

и, в силу 2.11 из (⁶),

$$u^\lambda = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\alpha_k\lambda}(u_{\alpha_k}) \in U_\lambda.$$

Но

$$h = u - u^\lambda = \sum_{k=1}^{n} \left[u_{\alpha_k} - \varphi_{\alpha_k\lambda}(u_{\alpha_k}) \right],$$

а потому $h \in H$.

2.32. ЛЕММА 4. *Пусть $U = U^a[U_\alpha]$ имеет тот же смысл, что и в 2.31. Тогда для любого элемента x из $G_\mu \cap (\overline{H^*} + U)$ найдется такой индекс $\rho > \mu$, что $\varphi_{\mu\rho}(x) \in U_\rho$.*

Доказательство. Так как, в силу того что U — окрестность нуля,

$$U + \overline{H^*} = U + H^*,$$

то $x \in U + H^*$ и потому

$$x = u + \sum_{k=1}^{n} y_{\beta_k},$$

где $u \in U$, $y_{\beta_k} \in G_{\beta_k}$ и $\sum_{k=1}^{n} y_{\beta_k} \in H^*$. В силу 2.31, найдется такой индекс λ, что

$$u = u^\lambda + h_1,$$

где $u^\lambda \in U_\lambda$ и $h_1 \in H^*$, причем

$$h_1 = \sum_{k=1}^{m} z_{\gamma_k},$$

где $z_{\gamma_k} \in G_{\gamma_k}$. Пусть ρ — такой индекс, что $\rho > \lambda$, $\rho > \beta_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $\rho > \gamma_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\beta_k\rho}(y_{\beta_k}) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_{\gamma_k\rho}(z_{\gamma_k}) = 0.$$

Тогда

$$\varphi_{\mu\rho}(x) = \varphi_{\lambda\rho}(u^\lambda) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\beta_k\rho}(y_{\beta_k}) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_{\gamma_k\rho}(z_{\gamma_k}) = \varphi_{\lambda\rho}(u^\lambda) \in U_\rho,$$

и наша лемма доказана.

2.33. ЛЕММА 5. *Пусть F — предельная группа прямого ограниченного спектра $\{G_\alpha; \varphi_{\alpha\beta}\}$ и T — ограниченное подмножество в F. Тогда найдется такой индекс β и такое ограниченное подмножество $T_\beta \subset G_\beta$, что $\varphi_\beta(T_\beta) \supset T$.*

Доказательство. Так как отображение θ ограничивающее, то существует такое ограниченное подмножество R в G^*, что $\theta(R) = T$. Лишь для конечного множества индексов α_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ проекция R_α множества R в G_α отлична от нуля. Пусть β — такой индекс, что $\beta > \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Положим

$$T_\beta = \varphi_{\alpha_1\beta}(R_{\alpha_1}) + \cdots + \varphi_{\alpha_n\beta}(R_{\alpha_n}).$$

Так как все множества R_{α_k} ограничены в G_{α_k} и все гомоморфизмы $\varphi_{\alpha_k\beta}$ ограничены, то и T_β ограничено в G_β. Пусть $a \in T$ и $\hat{a}$ — такой элемент из R, что $\theta(\hat{a}) = a$. Тогда

$$\hat{a} = \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_k},$$

где $a_{\alpha_k} \in R_{\alpha_k}$ и

$$\hat{a} - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\alpha_k\beta}(a_{\alpha_k}) \in H.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\alpha_k\beta}(a_{\alpha_k}) \in T_\beta$$

и, таким образом, $a \in \theta(T_\beta)$ и $T \subset \theta(T_\beta)$.

2.34. Отметим, что так как, вообще говоря,

$$H^* \cap G_\alpha \neq \overline{H^* \cap G_\alpha},$$

то может случиться, что при всех $\beta > \alpha$ ядро гомоморфизма $\varphi_{\alpha\beta}$ равно нулю, в то время как ядро гомоморфизма φ_α отлично от нуля.

2.4. Докажем теорему, аналогичную утверждению 1.3.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть M — неограниченное справа подмножество множества Δ и $\{G_\lambda; \varphi_{\lambda\mu}\}$ — прямой спектр, соответствующий подмножеству M, а F' — его предельная группа. Тогда существует непрерывное ограниченное гомоморфное отображение τ группы F' в предельную группу F спектра $\{G_\alpha; \varphi_{\alpha\beta}\}$, $\alpha \in \Delta$, обладающее тем свойством, что если g_μ является представителем элемента $g' \in F'$, то g_μ является и представителем элемента $\tau(g')$. Если при этом подмножество M конфинально Δ и все гомоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}$ ограничены, то τ является полным изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $F' = G^{*\prime} / \overline{H^{*\prime}}$, где $G^{*\prime}$ является группой $\sum_{\mu \in M} G_\mu$, топологизированной согласно 2.1, а $H^{*\prime}$ — ее подгруппой, порожденной элементами $g_\mu - \varphi_{\mu\lambda} g_\mu$. Обозначим через ψ естественным

образом определяемое вложение группы $G^{*\prime}$ в группу G^*. Очевидно, что ψ является непрерывным ограниченным гомоморфным отображением и что

$$\psi(H^{*\prime}) \subset H^*,$$

а потому и

$$\psi(\overline{H^{*\prime}}) \subset \overline{H}^*.$$

Поэтому ψ определяет непрерывное гомоморфное отображение τ группы $F' = G^{*\prime} / \overline{H^{*\prime}}$ в $F = G^* / \overline{H}^*$. Так как отображение ψ ограничено, а отображения $\theta: G^* \to F$ и $\theta': G^{*\prime} \to F'$ биограничены, то отображение τ ограничено.

Пусть теперь множество M конфинально Δ и все гомоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \Delta$, ограничены. Пусть V' — окрестность нуля группы F', определяемая окрестностью нуля $U' = U^a[U_\mu]$ группы $G^{*\prime}$. Для любого $\alpha \in \Delta$ найдется такое $\mu \in M$, что $\mu > \alpha$. Положим тогда

$$V_\alpha = \varphi_{\alpha\mu}^{-1}[U_\mu \cap \varphi_{\alpha\mu}(G_\alpha)].$$

Из того, что система окрестностей $[U_\mu]$, $\mu \in M$, согласована, легко следует, что V_α не зависит от выбора μ. Из непрерывности $\varphi_{\alpha\mu}$ следует, что V_α является окрестностью нуля в G_α. Покажем, что V_α квазивыпукла. Пусть

$$g_\alpha \in G_\alpha \setminus V_\alpha.$$

Тогда

$$\varphi_{\alpha\mu}(g_\alpha) \in U_\mu$$

и потому найдется такой характер χ_μ группы G_μ, что

$$|\chi_\mu(U_\mu)| \leqslant \frac{1}{4},$$

в то время как

$$\frac{1}{4} < |\chi_\mu[\varphi_{\alpha\mu}(g_\alpha)]|.$$

Но тогда $\chi_\alpha = \chi_\mu \varphi_{\alpha\mu}$ будет таким характером группы G_α, что $|\chi_\alpha(V_\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}$, в то время как $|\chi_\alpha(g_\alpha)| > \frac{1}{4}$. Таким образом, при любом α V_α является квазивыпуклой окрестностью нуля в G_α.

Покажем теперь, что система окрестностей нуля $[V_\alpha]$ групп G_α согласована. Пусть $\alpha < \beta$. Тогда найдется такое $\mu \in M$, что $\mu > \alpha$ и $\mu > \beta$. Следовательно,

$$V_\alpha = \varphi_{\alpha\mu}^{-1}[U_\mu \cap \varphi_{\alpha\mu}(G_\alpha)] =$$
$$= \varphi_{\alpha\beta}^{-1}(\varphi_{\beta\mu}^{-1}[U_\mu \cap \varphi_{\beta\mu}(G_\beta)] \cap \varphi_{\alpha\beta}(G_\alpha))] = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}[V_\beta \cap \varphi_{\alpha\beta}(G_\alpha)].$$

Из изложенного следует, что мы можем образовать окрестность нуля $V = U^a[V_\alpha]$ группы G^*. Так как при любом $\mu \in M$ $V_\mu = U_\mu$, то

$$V \cap G^{*\prime} = U'.$$

В силу леммы 3, каждый элемент $y \in V$ может быть записан в виде

$$y = h + u^\rho, \quad \rho \in M,$$

где $h \in H^*$ и $u^\rho \in U_\rho \subset U'$.

Обозначим через T окрестность нуля группы F, определяемую V. Тогда из вышеизложенного вытекает, что

$$T = \theta(V) \subset \theta\psi(U') \subset \tau(V'),$$

а потому отображение τ открыто.

Пусть теперь $\tau(x) = 0$ и x_μ — представитель элемента x в G_μ, $\mu \in M$. Тогда, какова бы ни была окрестность нуля $U = U^a[U_\alpha]$ группы G,

$$x_\mu \in \overline{H^*} \subset H^* + U,$$

и, по лемме 4, найдется такой индекс $\rho \in M$, что

$$\varphi_{\mu\rho}(x_\mu) \subset U_\rho \subset U.$$

Но тогда

$$x_\mu = \varphi_{\mu\rho}(x_\mu) + [x_\mu - \varphi_{\mu\rho}(x_\mu)] \subset U + H^{*\prime},$$

откуда, в силу произвольности U и того, что отображение ψ открыто, мы получаем, что $x_\mu \in \overline{H^{*\prime}}$ и, следовательно, $x = 0$ и $\tau^{-1}(0) = 0$.

Покажем, что τ является отображением на всю группу F. Пусть $x \in F$. Тогда найдется такой индекс $\mu \in M$, что элемент x имеет представителя x_μ в G_μ, откуда следует, что $x = \tau\theta'(x_\mu)$.

Пусть теперь T — ограниченное множество в F. В силу леммы 5, существует такой индекс $\beta \in M$ и такое ограниченное множество $T_\rho \in G_\rho$, что $\theta(T_\rho) \supset T$. Но тогда $\tau\theta'(T_\rho) \supset T$ и потому отображение τ ограничивающее. Теорема доказана.

2.5. ТЕОРЕМА 5. *Если все гомоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}$ ограничены, группа G_{α_0} локально квазивыпукла и при $\beta > \alpha_0$ все отображения $\varphi_{\alpha_0\beta}$ являются полными изоморфизмами, то группа F вполне изоморфна G_{α_0}.*

Доказательство. В 2.2. мы построили непрерывное ограниченное гомоморфное отображение φ_{α_0} группы G_{α_0} в F. Покажем, что в нашем случае оно является вполне изоморфным отображением G_{α_0} на F. По теореме 4, мы можем ограничиться рассмотрением множества M таких индексов μ, что $\mu > \alpha_0$. Пусть $x_{\alpha_0} \in G_{\alpha_0}$, $x_{\alpha_0} \neq 0$. Тогда существует такая квазивыпуклая окрестность нуля U_{α_0} группы G_{α_0}, что $x_{\alpha_0} \bar{\in} U_{\alpha_0}$. Так как все $\varphi_{\alpha_0\beta}$ являются изоморфизмами, то при всех $\beta > \alpha_0$

$$V_\beta \equiv \varphi_{\alpha_0}(U_{\alpha_0})$$

открыты в G_β. Но тогда при любом $\beta > \alpha_0$

$$\varphi_{\alpha_0\beta}(x_{\alpha_0}) \bar{\in} V_\beta,$$

а потому, в силу леммы 4, $x_{\alpha_0} \bar{\in} \overline{H^*}$ (V_α образуют согласованную систему квазивыпуклых окрестностей нуля). Следовательно,

$$\varphi_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) \neq 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{\alpha_0}^{-1}(0) = 0.$$

Пусть $x \in F$ и x_μ — его представитель в G_μ. Так как $\varphi_{\alpha_0\mu}$ является изоморфизмом, то $\varphi_{\alpha_0\mu}^{-1}(x_\mu)$ является представителем x в G_{α_0}. Таким образом, $\varphi_{\alpha_0\mu}$ является отображением на всю группу F. Это отображение открыто, так как если U_{α_0} — квазивыпуклая окрестность нуля в G_{α_0}, $U_\beta = \varphi_{\alpha_0\beta}(U_{\alpha_0})$ и $U = U^a[U_\beta]$, то

$$\theta(U) = \varphi_{\alpha_0}(U_{\alpha_0}).$$

Пусть T — ограниченное множество в F. По лемме 5, существует такой индекс $\mu > \alpha_0$ и такое ограниченное подмножество $T_\mu \subset G_\mu$, что $\theta(T_\mu) \supset T$. Так как $\varphi_{\alpha_0\mu}$ является ограничивающим отображением, то

$$T_{\alpha_0} = \varphi^{-1}_{\alpha_0\mu}(T_\mu)$$

ограничено в G_{α_0}, причем

$$\varphi_{\alpha_0}(T_{\alpha_0}) = \theta\varphi_{\alpha_0\mu}(T_{\alpha_0}) = \theta(T_\mu) \supset T.$$

Поэтому φ_{α_0} является ограничивающим отображением. Проведенные рассуждения показывают, что φ_{α_0} является вполне изоморфным отображением G_{α_0} на F.

2.51. Рассмотрения, приведенные выше, показывают, что введенное нами понятие предельной группы прямого спектра топологических групп обладает теми же свойствами, что и понятие предельной группы прямого спектра дискретных групп [ср. (7)].

2.6. Отметим некоторые частные случаи прямых спектров.

Определение 6. Прямой спектр $\{G_\alpha; \varphi_{\alpha\beta}\}$ локально квазивыпуклых групп G_α называется *замкнутым*, если отображение φ_α группы G_α в предельную группу F этого спектра является вполне изоморфным отображением группы G_α на замкнутую подгруппу группы F.

Отметим, что в этом случае при $\alpha < \beta$ отображение $\varphi_{\alpha\beta}$ является вполне изоморфным отображением группы G_α на замкнутую подгруппу группы G_β.

2.61. Замкнутые прямые спектры тесно связаны с вопросом об аппроксимации топологических групп их замкнутыми подгруппами.

Определение 7. Пусть G — локально квазивыпуклая группа и $[G_\alpha]$ — некоторое множество ее замкнутых подгрупп. Группа G аппроксимируема множеством $M = [G_\alpha]$ своих подгрупп, если:

1) каковы бы ни были α и β, найдется такое γ, что $G_\alpha \cup G_\beta \subset G_\gamma$;

2) для каждого ограниченного множества группы G (в частности, для каждого ее элемента) найдется такое α, что G_α содержит это множество;

3) для того чтобы множество U было квазивыпуклой окрестностью нуля в G, необходимо и достаточно, чтобы при любом α $U \cap G_\alpha$ было квазивыпуклой окрестностью нуля в G_α.

2.62. Прежде чем перейти к изучению связи между этими двумя понятиями, заметим, что пересечение квазивыпуклой окрестности нуля группы с подгруппой H является квазивыпуклой окрестностью нуля в H, а также, что прообраз квазивыпуклой окрестности нуля при гомоморфном отображении является квазивыпуклой окрестностью нуля.

2.63. ТЕОРЕМА 6. *Предельная группа F прямого замкнутого спектра $\{G_\alpha; \varphi_{\alpha\beta}\}$ аппроксимируема множеством $M = [H_\alpha]$ своих замкнутых подгрупп, где положено $H_\alpha = \varphi_\alpha(G_\alpha)$.*

Доказательство. При любых α и β из Δ найдется такое $\gamma \in \Delta$, что $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$. А тогда

$$H_\alpha \cup H_\beta \subset H_\gamma.$$

Далее, пусть T — ограниченное подмножество в F. В силу леммы 5, найдется такой индекс $\alpha \in \Delta$ и такое ограниченное подмножество $T_\alpha \subset G_\alpha$, что $T \subset \theta(T_\alpha)$. Но тогда $T \subset \varphi_\alpha(T_\alpha)$ и потому выполнено условие 2) определения 7.

Пусть теперь при любом α $U \cap H_\alpha$ является квазивыпуклой окрестностью нуля в H_α. Тогда при любом α

$$V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(U \cap H_\alpha)$$

является квазивыпуклой окрестностью нуля в G_α, причем из $\alpha < \beta$ следует

$$V_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}[V_\beta \cap \varphi_{\alpha\beta}(G_\alpha)].$$

Поэтому существует окрестность нуля $V = U^a[V_\alpha]$ группы G^*. Если $x = [x_\alpha] \in V$, то, по лемме 3, существует такой индекс β, что

$$\sum_i \varphi_{\alpha_i\beta}\left(x_{\alpha_i}\right) \in V_\beta,$$

а тогда $x \in V_\beta + H$. Но

$$\theta(V_\beta) = \varphi_\beta(V_\beta) \subset U,$$

а потому из $x \in V$ вытекает, что $\theta(x) \in U$. Таким образом, $\theta(V) \subset U$ и U является окрестностью нуля в F. Теорема доказана.

2.64. ТЕОРЕМА 7. *Если локально квазивыпуклая группа G аппроксимируема множеством $M = [G_\alpha]$ своих замкнутых подгрупп, то эти подгруппы естественным образом задают прямой замкнутый спектр, предельная группа F которого вполне изоморфна группе G.*

Доказательство. Положим $\alpha < \beta$, если $G_\alpha \subset G_\beta$, и обозначим через $\varphi_{\alpha\beta}$ тождественное изоморфное отображение G_α в G_β ($\varphi_{\alpha\beta}(x) = x$, если $x \in G_\alpha$). Условие 1) определения 7 показывает, что множество индексов Δ не ограничено справа. Кроме того, очевидно, что при $\alpha < \beta < \gamma$ имеем

$$\varphi_{\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma},$$

и потому группы G_α с указанными отображениями $\varphi_{\alpha\beta}$ образуют прямой спектр. Отметим, что $\varphi_{\alpha\beta}$ является вполне изоморфным отображением группы G_α на замкнутую подгруппу группы G_β.

Покажем, что предельная группа F прямого спектра $\{G_\alpha; \varphi_{\alpha\beta}\}$ вполне изоморфна группе G. Пусть x — любой элемент группы G. Тогда найдется такое $\alpha \in \Delta$, что $x \in G_\alpha$. Поставим элементу x в соответствие элемент $\psi(x) = \theta\psi_\alpha(x)$ группы F, где через ψ_α обозначено гомоморфное отображение группы G_α в $G^* = \sum G_\alpha$ *, а через θ — гомоморфное отображение группы G^* на $F = G^* / \overline{H^*}$. Нетрудно видеть, что это соответствие не зависит от выбора индекса α, так как если $\beta > \alpha$, то

$$\psi_\beta(x) = \varphi_{\alpha\beta}\psi_\alpha(x) \in \psi_\alpha(x) + H.$$

Очевидно, что отображение ψ является алгебраически гомоморфным отображением группы G в группу F.

* Группа G^* топологизируется согласно 2.1.

Пусть U — некоторая квазивыпуклая окрестность нуля группы F. Положим

$$U_\alpha = U \cap \psi(G_\alpha).$$

Тогда при любом α, в силу непрерывности отображений θ и ψ_α, множество

$$V_\alpha = \psi^{-1}(U_\alpha) \cap G_\alpha = \psi^{-1}(U) \cap G_\alpha$$

является квазивыпуклой окрестностью нуля в G_α. Но тогда, по условию 3) определения 7, множество $\psi^{-1}(U)$ является квазивыпуклой окрестностью нуля в G. Так как группа F является, в силу 3.43, локально квазивыпуклой группой, то в любой ее окрестности нуля содержится квазивыпуклая окрестность нуля. А тогда проведенные выше рассуждения показывают, что отображение ψ непрерывно.

Пусть U — некоторая квазивыпуклая окрестность нуля в G. Положим

$$V_\alpha = \psi_\alpha(U \cap G_\alpha).$$

Очевидно, что при $\alpha < \beta$ имеем

$$V_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}(V_\beta \cap \varphi_{\alpha\beta}(G_\alpha)),$$

а потому система окрестностей нуля $[V_\alpha]$ групп G_α согласована. При этом каждая окрестность нуля V_α квазивыпукла в G_α. Мы можем поэтому образовать окрестность нуля

$$V = U^a[V_\alpha]$$

группы G^*. Если $x \in V + H$, то при некотором β

$$x \in V_\beta + H$$

(см. лемму 3). Но тогда

$$\theta(x) \in \theta(V_\beta) = \psi(U \cap G_\beta).$$

Поэтому из $x \in V + H$ вытекает, что $\theta(x) \in \psi(U)$, а потому $\theta(V) \subset \psi(U)$ и отображение ψ открыто.

Покажем, что ядро гомоморфизма ψ равно нулю. Пусть $x \in G$ и $x \neq 0$. Тогда существует квазивыпуклая окрестность нуля T группы G такая, что $x \bar{\in} T$. Обозначим $\psi_\alpha(T \cap G_\alpha)$ через T_α. Очевидно, что ни при каком α $\psi_\alpha(x)$ не входит в T_β. По лемме 4, это обозначает, что $\psi_\alpha(x) \bar{\in} \overline{H^*}$ и потому $\psi(x) \neq 0$.

Покажем теперь, что ψ является отображением на всю группу F. Пусть $y \in F$. По лемме 2, y имеет представителя $y_\beta \in G_\beta$. Очевидно, что тогда $y = \psi(y_\beta)$.

Так как отображения θ и ψ_α ограничены, а каждое ограниченное множество группы F лежит хотя бы в одной из подгрупп G_α, то отображение ψ ограничено.

Пусть теперь T — ограниченное подмножество в F. По лемме 5, существует такой индекс α и такое ограниченное подмножество $T_\alpha \subset G_\alpha$, что $T \subset \theta(T_\alpha)$. Так как отображение ψ_α — ограничивающее, то T_α можно

рассматривать как подмножество в G, и мы получаем, что отображение ψ — ограничивающее. Таким образом, ψ является вполне изоморфным отображением группы G на F. Нетрудно видеть при этом, что

$$\overline{\psi(G_\alpha)} = \psi(G_\alpha),$$

а потому ψ является вполне изоморфным отображением группы G_α на замкнутую подгруппу группы F. Этим доказывается, что $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ является замкнутым спектром.

2.641. Отметим, что условие 3) определения 7 заведомо выполняется, если хотя бы одна из подгрупп G_α открыта в G.

2.65. Назовем прямой замкнутый спектр локально квазивыпуклых групп $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ *чистым*, если при $\alpha < \beta$ подгруппа $\varphi_{\alpha\beta}(G_\alpha)$ открыта в G_β. Легко показать, что если спектр $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ чистый, то подгруппа $\varphi_\alpha(G_\alpha)$ открыта в F.

Пусть $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ — чистый спектр и пусть в каждой из подгрупп G_α заданы замкнутые подгруппы L_α и M_α такие, что $L_\alpha \subset M_\alpha$ и при $\alpha < \beta$ имеем

$$\varphi_{\alpha\beta}(L_\alpha) \subset L_\beta \text{ и } \varphi_{\alpha\beta}(M_\alpha) \subset M_\beta.$$

Тогда при $\alpha < \beta$ гомоморфизм $\varphi_{\alpha\beta}$ индуцирует открытое гомоморфное отображение $\psi_{\alpha\beta}$ группы M_α / L_α в M_β / L_β. Нетрудно видеть, что при этом получается чистый прямой спектр $\{M_\alpha / L_\alpha;\ \psi_{\alpha\beta}\}$, предельная группа которого вполне изоморфна группе M / L, где

$$M = \bigcup \varphi_\alpha(M_\alpha) \text{ и } L = \bigcup \varphi_\alpha(L_\alpha).$$

Обратно, если M — замкнутая подгруппа в G и L — замкнутая подгруппа в M, то M / L вполне изоморфна предельной группе чистого прямого спектра $\{M_\alpha / L_\alpha;\ \psi_{\alpha\beta}\}$, где

$$M_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(M \cap \varphi_\alpha(G_\alpha))$$

и

$$L_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(L \cap \varphi_\alpha(G_\alpha)).$$

§ 3. Сопряженные спектры

3.1. Пусть G и H — две топологические абелевы группы и φ — непрерывное гомоморфное отображение группы G в H. Тогда каждому характеру χ группы H соответствует характер $\hat{\chi}$ группы G, определяемый равенством

$$\hat{\chi}(g) = \chi(\varphi(g)).$$

Гомоморфное отображение $\hat{\varphi}: \chi \to \hat{\chi}$ группы характеров Φ группы H в группу характеров X группы G мы назовем отображением, *сопряженным* с отображением φ. Если в группах G и H задана ограниченность и группы X и Φ соответственно с этим превращаются в топологические группы с заданной ограниченностью, то имеют место следующие связи между гомоморфизмами φ и $\hat{\varphi}$.

Гомоморфизм $\hat{\varphi}$ всегда ограничен. Если гомоморфизм φ открыт (соответственно ограничен, ограничивающий), то гомоморфизм $\hat{\varphi}$ огра-

ничивающий (соответственно непрерывен, открыт). Ядром гомоморфизма $\hat{\varphi}$ является аннулятор подгруппы $\overline{\varphi(G)}$ в Φ. $\hat{\varphi}(\Phi)$ состоит из таких характеров χ группы G, что $\chi\varphi^{-1}$ является непрерывным характером группы $\varphi(G)$, который можно продолжить до характера всей группы H. В частности, если φ является открытым отображением на всю группу H, то

$$\hat{\varphi}(\Phi) = \varphi^{-1}(0).$$

Доказательство этих утверждений мы предоставляем читателю.

3.2. В соответствии с рассмотрениями, проведенными в 3.1, мы можем каждому обратному (соответственно прямому) спектру $\{G_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ (соответственно $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$) поставить в соответствие сопряженный с ним прямой (соответственно обратный) спектр $\{X_\alpha;\ \hat{\varphi}_{\alpha\beta}\}$ (соответственно $\{X_\alpha;\ \hat{\varphi}^{\beta\alpha}\}$), где X_α — группа характеров для G_α и $\hat{\varphi}_{\alpha\beta}$ (соответственно $\hat{\varphi}^{\beta\alpha}$) — гомоморфизм, сопряженный с $\varphi^{\beta\alpha}$ (соответственно $\varphi_{\alpha\beta}$). При этом для того чтобы гомоморфизм $\hat{\varphi}_{\alpha\beta}$ (соответственно $\hat{\varphi}^{\beta\alpha}$) был непрерывным, необходимо, чтобы $\varphi^{\beta\alpha}$ (соответственно $\varphi_{\alpha\beta}$) был ограниченным гомоморфизмом. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь ограниченные спектры.

3.3. ТЕОРЕМА 8. *Пусть $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ — прямой спектр топологических абелевых групп с заданной ограниченностью, F — его предельная группа, $\{X_\alpha;\ \hat{\varphi}^{\beta\alpha}\}$ — сопряженный с ним обратный спектр и X — предельная группа обратного спектра. Тогда группа X вполне изоморфна группе характеров P группы F.*

Доказательство. Группа F имеет вид $F = G^* / \overline{H^*}$, где G^* — соответственно топологизированная группа $\sum G_\alpha$, а H^* — ее подгруппа, порожденная элементами вида $x_\alpha - \varphi_{\alpha\beta} x_\alpha$ (см. 2.11). Поэтому каждый характер ρ группы F индуцирует характер группы G^*. Характер же группы G^* индуцирует в свою очередь характер группы G_α, который мы будем обозначать

$$\rho_\alpha = \sigma_\alpha(\rho).$$

Так как $\sigma_\alpha(\rho) \in X_\alpha$, то элементу $\rho \in P$ соответствует элемент

$$\rho^* \equiv \lambda(\rho) = [\sigma_\alpha(\rho)]$$

группы $\Psi = \mathrm{S}\, X_\alpha$. Очевидно, что если g_α является представителем элемента g в G_α, а ρ^1 и ρ^2 — характеры группы F, то

$$(\rho^1 - \rho^2)(g) \quad \rho^1_\alpha(g_\alpha) - \rho^2_\alpha(g_\alpha).$$

Поэтому

$$\lambda(\rho^1 - \rho^2) = \lambda(\rho^1) \quad \lambda(\rho^2)$$

и λ является алгебраически гомоморфным отображением группы P в Ψ.

Покажем, что $\lambda(P) = X$. В самом деле, пусть

$$\psi = [\chi_\alpha] \in \lambda(P)$$

и $\psi \in X$. Тогда существуют такие индексы α и β, $\beta > \alpha$, что

$$\chi_\alpha - \hat{\varphi}^{\beta\alpha}\chi_\beta \neq 0.$$

Поэтому найдется такой элемент $g_\alpha \in G_\alpha$, что

$$\chi_\alpha(g_\alpha) \neq \hat{\varphi}^{\beta\alpha}\chi_\beta(g_\alpha) = \chi_\beta\varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha).$$

Но

$$g_\alpha - \varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha) \in H^*,$$

и мы имеем

$$\psi(g_\alpha - \varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha)) = \chi_\alpha(g_\alpha) - \chi_\beta\varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha) \neq 0,$$

что невозможно, так как $\psi(H^*) = 0$. Итак, $\lambda(P) \subset X$. С другой стороны, каждый элемент $\chi = [\chi_\alpha]$ из X определяет алгебраический характер группы G^* по формуле

$$\chi(g) = \sum \chi_\alpha(g_\alpha)$$

для элемента $g = [g_\alpha]$ группы G^*. Очевидно, что для $g \in H^*$ имеем $\chi(g) = 0$. В самом деле, в этом случае существует такой индекс β, что $\sum\varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha) = 0$ (см. 2.3), а тогда

$$\chi(g) = \sum\chi_\alpha(g_\alpha) = \sum\hat{\varphi}^{\beta\alpha}\chi_\beta(g_\alpha) = \chi_\beta(\sum\varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha)) = 0.$$

Далее, характер χ непрерывен на G^*. В самом деле, обозначим через U_α совокупность таких элементов $g_\alpha \in G_\alpha$, что

$$|\chi_\alpha(g_\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

U_α является квазивыпуклой окрестностью нуля в G_α, причем из $\alpha < \beta$ следует

$$\chi_\alpha(g_\alpha) = \chi_\beta\varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha),$$

а потому

$$U_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}[U_\beta \cap \varphi_{\alpha\beta}(G_\alpha)].$$

Но тогда существует окрестность нуля $U = U^a[U_\alpha]$ группы G^*, причем легко видеть, что для любого элемента $u \in U$ имеем

$$|\chi(u)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

В силу 4.15 из ([6]), отсюда вытекает непрерывность характера χ. Так как $\chi(H^*) = 0$, то и $\chi(\bar{H}^*) = 0$, а потому мы можем рассматривать χ как характер группы F и, следовательно,

$$X \subset \lambda(P), \quad X = \lambda(P).$$

Очевидно, что ядро гомоморфизма λ равно нулю. Покажем, что λ является вполне изоморфным отображением P на X. Пусть Φ — окрестность нуля группы X, имеющая вид

$$\Phi = \Phi_1 \cap X,$$

где Φ_1 состоит из таких элементов $\chi = [\chi_\alpha]$ группы Ψ, что

$$\chi_{\alpha_0} \in \Phi_{\alpha_0} \equiv N(T_{\alpha_0}),$$

где T_{α_0} является ограниченным множеством в G_{α_0}. Тогда $\psi_{\alpha_0}(T_{\alpha_0})$ будет ограниченным подмножеством в G^*. Обозначим через θ гомоморфное

отображение G^* на F, через T'_{α_0} — множество $\theta\psi_{\alpha_0}(T_{\alpha_0})$ и через Φ' — множество $N(T'_{\alpha_0})$.

Очевидно, что Φ' является окрестностью нуля в P, причем

$$\lambda(\Phi') \subset \Phi.$$

Поэтому отображение λ непрерывно. Пусть теперь

$$\Phi^* = N(T^*)$$

— окрестность нуля в P, а T^* — ограниченное множество в F. Согласно лемме 7, существует индекс β и ограниченное множество T_β в G_β такие, что $\theta(T_\beta) \supset T^*$. Положим

$$\Phi_\beta = N(T_\beta)$$

и обозначим через Φ окрестность нуля группы Ψ, состоящую из всех элементов $\chi = [\chi_\alpha]$ таких, что $\chi_\beta \in \Phi_\beta$. Очевидно, что

$$\Phi \cap X \subset \lambda(\Phi^*)$$

и потому отображение λ открыто.

Пусть множество Γ ограничено в P и имеет вид

$$\Gamma = N(U),$$

где U — окрестность нуля в F. Существует такая окрестность нуля $U^* = U^a[U_\alpha]$ группы G^*, что $\theta(U^*) \subset U$. Положим

$$\Phi_\alpha = N(U_\alpha).$$

Тогда $X \cap \Phi$, где $\Phi = \mathrm{S}\,\Phi_\alpha$ будет ограниченным множеством в X. Очевидно, что

$$\lambda(\Gamma) \subset X \cap \Phi$$

и, следовательно, отображение λ ограничено.

Пусть Φ — ограниченное множество в X и Φ_α — его проекция в X_α. Тогда Φ_α является ограниченным множеством в X_α, причем из $\alpha < \beta$ вытекает, что

$$\Phi_\alpha = \hat{\varphi}^{\beta\alpha}(\Phi_\beta).$$

Положим

$$U_\alpha = N(\Phi_\alpha).$$

Тогда U_α будет квазивыпуклой окрестностью нуля в G_α, причем из $\alpha < \beta$ следует

$$U_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}[U_\beta \cap \varphi_{\alpha\beta}(G_\alpha)].$$

Но тогда в группе G^* существует окрестность нуля $U = U^a[U_\alpha]$. Положим

$$V = \theta(U) \text{ и } \Gamma = N(V).$$

Очевидно, что Γ является ограниченным множеством в P, причем $\Phi \subset \lambda(\Gamma)$. Поэтому отображение λ—ограничивающее.

Из доказанного вытекает, что λ является вполне изоморфным отображением P на X. Теорема доказана.

3.4. ТЕОРЕМА 9. *Предельная группа F прямого спектра $\{G_\alpha; \varphi_{\alpha\beta}\}$ топологических абелевых групп локально квазивыпукла.*

Доказательство. Группа F имеет, согласно 2.11, вид:

$$F = G^* / \overline{H^*},$$

где G^* — соответственным образом топологизированная группа $\sum G_\alpha$ и H^* — ее подгруппа, порожденная элементами вида $x_\alpha - \varphi_{\alpha\beta} x_\alpha$. Напомним, что естественное гомоморфное отображение G^* на F мы обозначаем через θ. Пусть V — произвольная окрестность нуля группы F. Тогда существует окрестность нуля U группы G^*, имеющая вид

$$U = U^a [U_\alpha],$$

где $[U_\alpha]$ образуют согласованную систему окрестностей нуля групп G_α, такая, что $\theta(U) \subset V$. Положим

$$W = \frac{1}{2} \theta(U)$$

[см. ([6])] и пусть $\widetilde{W}$ — квазивыпуклая оболочка множества W [([6]), 2.1]. Очевидно, что $\widetilde{W}$ является окрестностью нуля в F. Покажем, что $\widetilde{W} \subset V$.

Пусть $x \overline{\in} V$ и x_{α_0} — представитель элемента x в G_{α_0}. Так как при любом α

$$\vartheta(U_\alpha) \subset V,$$

то при любом $\beta > \alpha_0$

$$x_\beta \equiv \varphi_{\alpha_0\beta}(x_{\alpha_0}) \overline{\in} U_\beta.$$

Поэтому, в силу квазивыпуклости U_β, при любом $\beta > \alpha_0$ существует такой характер χ_β группы G_β, что

$$|\chi_\beta(U_\beta)| \leqslant \frac{1}{4},$$

в то время как

$$|\chi_\beta(x_\beta)| > \frac{1}{4}.$$

Пусть X_β — группа характеров для группы G_β, причем ограниченными в G_β считаются вполне ограниченные множества и только они. Тогда, в силу теоремы 9 из ([6]), множество Φ_β таких характеров φ_β группы G_β, что

$$|\varphi_\beta(U_\beta)| \leqslant \frac{1}{4},$$

в то время как

$$|\varphi_\beta(x_\beta)| \geqslant \frac{1}{4}$$

бикомпактно, и, как мы видели, не пусто.

Нетрудно проверить, что при введенной нами в группу G_α ограниченности гомоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}$ ограничены. Поэтому мы можем рассмотреть обратный спектр $\{X_\alpha; \hat{\varphi}^{\beta\alpha}\}$, сопряженный с $\{G_\alpha; \varphi_{\beta\alpha}\}$. Из согласованности системы $[U_\alpha]$ вытекает, что при $\alpha < \beta$

$$\Phi_\alpha \supset \hat{\varphi}^{\beta\alpha} \Phi_\beta.$$

Поэтому, в силу 1.4, существует такой элемент $\psi = [\psi_\alpha]$ из предельной группы Ψ спектра $\{X_\alpha; \hat{\varphi}^{\beta\alpha}\}$, что при $\alpha_0 < \beta$ имеем $\psi_\beta \in \Phi_\beta$. В силу

теоремы 8, мы можем рассматривать ψ как характер группы F. Так как для любого элемента $u \in \theta(U)$ найдется, в силу леммы 4, представитель $u_\alpha \in U_\alpha$, то для любого $u \in \theta(U)$

$$|\psi(u)| = |\psi_\alpha(u_\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

В то же время

$$|\psi(x)| = |\psi_\alpha(x_\alpha)| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Если $|\psi(x)| > \frac{1}{4}$, то наши рассуждения показывают, что $x \overline{\in} \widetilde{W}$. Если же $|\psi(x)| = \frac{1}{4}$, то, в силу того, что

$$|\psi(W)| \leqslant \frac{1}{8},$$

имеем

$$|2\psi(W)| \leqslant \frac{1}{4},$$

в то время как

$$|2\psi(x)| = \frac{1}{2},$$

и потому $x \overline{\in} \widetilde{W}$.

Итак, $\widetilde{W} \subset V$ и потому в любой окрестности нуля группы F содержится квазивыпуклая окрестность нуля. Теорема доказана.

3.5. ТЕОРЕМА 10. *Пусть $\{G_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ — обратный спектр инволюционных топологических абелевых групп с заданной ограниченностью, H — его предельная группа, $\{X_\alpha;\ \hat{\varphi}_{\alpha\beta}\}$ — сопряженный с ним прямой спектр, X — предельная группа прямого спектра. Пусть, далее, при всех α существует в G_α база ограниченности, состоящая из квазивыпуклых бикомпактных множеств, и пусть каждый характер, заданный на подгруппе $\varphi^\alpha(H)$, может быть распространен на всю группу G_α (через φ^α мы обозначаем построенное в 1.3 гомоморфное отображение группы H в G_α). Тогда группа X вполне изоморфна группе характеров Φ группы H.*

Доказательство. Пусть $\Phi^* = \sum X_\alpha$, причем группа Φ^* топологизирована согласно 2.1, и пусть Ψ^* — подгруппа группы Φ^*, порожденная элементами вида

$$\chi_\alpha - \hat{\varphi}_{\alpha\beta}(\chi_\alpha).$$

Каждому элементу $\chi = [\chi_\alpha]$ группы Φ^* соответствует непрерывный характер $\hat{\chi} = \mu(\chi)$ группы $G \equiv \mathrm{S}\, G_\alpha$, определяемый формулой

$$\hat{\chi}(g) = \sum \chi_\alpha(g_\alpha)$$

для элемента $g = [g_\alpha]$.

Пусть $\chi = [\chi_\alpha] \in \Psi^*$ и $g = [g_\alpha] \in H$. Согласно 2.3., найдется такой индекс β, что

$$\sum \hat{\varphi}_{\alpha\beta}(\chi_\alpha) = 0,$$

а тогда

$$\hat{\chi}(g) = \sum \chi_\alpha(g_\alpha) = \sum \chi_\beta(\varphi^{\beta\alpha}(g_\beta)) = (\sum \hat{\varphi}_{\alpha\beta}(\chi_\beta))(g_\beta) = 0.$$

Отметим, что для любого $g=[g_\alpha]$ совокупность Θ_α элементов χ_α группы G_α таких, что

$$|\chi_\alpha(g_\alpha)| \leqslant \frac{1}{4},$$

является квазивыпуклой окрестностью нуля в X_α. Далее, так как

$$g_\alpha = \varphi^{\beta\alpha} g_\beta,$$

то

$$\Theta_\alpha = \hat{\varphi}_{\alpha\beta}^{-1}[\Theta_\beta \cap \hat{\varphi}_{\alpha\beta}(X_\alpha)],$$

а потому при фиксированном $g \in H$ Θ_α образуют согласованную систему квазивыпуклых окрестностей нуля и существует окрестность нуля $\Theta = U^a(\Theta_\alpha)$ группы Φ^*.

Нетрудно видеть, что для любого элемента $\chi \in \Theta$ имеем

$$|\hat{\chi}(g)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Поэтому, если

$$\chi \in \overline{\Psi^*} \subset \Psi^* + \Theta,$$

то

$$|\hat{\chi}(g)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Так как это неравенство имеет место при любом $g \in H$, то $|\hat{\chi}(H)| \leqslant \frac{1}{4}$ и, следовательно, $\hat{\chi}(H) = 0$.

Из проведенных рассуждений вытекает, что каждому элементу группы Φ^* соответствует непрерывный характер группы G, индуцирующий характер группы H, причем два элемента из Φ^*, лежащие в одном смежном классе по $\overline{\Psi^*}$, индуцируют один и тот же характер группы H.

Таким образом, мы получаем алгебраически гомоморфное отображение λ группы $X = \Phi^* / \overline{\Psi^*}$ в Φ.

Так как любой характер χ группы H можно продолжить до характера всей группы G, то λ является отображением на всю группу Φ. Покажем, что $\lambda^{-1}(0) = 0$. Пусть χ — отличный от нуля элемент группы X и χ_α — его представитель в группе X_α. Тогда существует окрестность нуля

$$\Gamma = U^a[\Gamma_a]$$

такая, что $\chi \overline{\in} \theta(\Gamma)$, а потому, согласно 2.32, при любом $\beta > \alpha$

$$\chi_\beta \overline{\in} \Gamma_\beta.$$

Обозначим через T_β такое ограниченное множество из G_β, что

$$N(T_\beta) \subset \Gamma_\beta,$$

и через Θ_β — совокупность таких элементов g_β из G_β, что для всех $\gamma_\beta \in \Gamma_\beta$ имеем

$$|\gamma_\beta(g_\beta)| \leqslant \frac{}{4},$$

в то время как

$$|\chi_\beta(g_\beta)| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Очевидно, что Θ_β лежит в $N(N(T_\beta))$ и замкнуто в G_β*. Так как, по условию, группа G_β обладает базой ограниченности, состоящей из квазивыпуклых бикомпактных множеств, то множество $\overline{N(N(T_\beta))}$ бикомпактно, равно как и Q_β Таким образом строятся множества Q_β для всех $\beta > \alpha$. Из того, что окрестности нуля Γ_β согласованы, вытекает, что при $\beta > \gamma$ имеем

$$\varphi^{\gamma\beta}(Q_\gamma) \subset Q_\beta,$$

а потому (см. 1.4) существует элемент $q = [q_\beta] \in H$ такой, что при любом $\beta > \alpha$ $q_\beta \in Q_\beta$. Очевидно, что $\lambda(\chi)(q) \neq 0$ и потому, в силу произвольности выбора χ, $\lambda^{-1}(0) = 0$.

Пусть Ω — окрестность нуля группы Φ, имеющая вид $\Omega = N(F)$, где F — ограниченное множество в H. Обозначим через F_α проекцию множества F в G_α и положим

$$\Xi_\alpha = N(F_\alpha).$$

Так как при $\alpha < \beta$ имеем

$$F_\alpha = \varphi^{\beta\alpha}(F_\beta),$$

то, очевидно,

$$\Xi_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}[\Xi_\beta \cap \varphi_{\alpha\beta}(X_\alpha)],$$

а потому система квазивыпуклых окрестностей нуля [см. ([6]), 3.2] Ξ_α групп X_α согласована. Поэтому существует окрестность нуля $\Xi^* = U^\alpha[\Xi_\alpha]$ | группы Φ^*. Положим

$$\Xi = \theta(\Xi^*).$$

Очевидно, что тогда $\lambda(\Xi) \subset \Omega$. В самом деле, пусть $\xi \in \Xi$ и ξ_α — его представитель в X_α. Тогда

$$\xi_\alpha \in \Xi^* + \Psi^*$$

и потому, согласно лемме 4, существует такой индекс β, что

$$\xi_\beta = \varphi_{\alpha\beta}(\xi_\alpha) \in \Xi_\beta.$$

Но тогда для любого элемента $g_\beta \in F_\beta$ имеем

$$|\xi_{\alpha\beta}(g_\beta)| \leqslant \frac{1}{4}$$

и, следовательно, для любого элемента $g \in F$ получаем

$$|\lambda(\xi)(g)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\lambda(\xi) \in \Omega$ и $\lambda(\Xi) \subset \Omega$. Отсюда вытекает непрерывность отображения λ.

Пусть теперь Ξ — окрестность нуля группы X, имеющая вид

$$\Xi = \theta(\Xi^*),$$

---

* $Q_\beta \neq \Lambda$ в силу квазивыпуклости Γ_β и инволюционности G_β.

где $\Xi^* = U^\alpha[\Xi_\alpha]$ и $[\Xi_\alpha]$ — согласованная система квазивыпуклых окрестностей групп X_α. Обозначим $N(\Xi_\alpha)$ через F_α. Из того, что группа G_α инволюционна и обладает базой ограниченности, состоящей из квазивыпуклых бикомпактных множеств, вытекает, что множество F_α бикомпактно. В силу согласованности системы окрестностей Ξ_α при $\alpha < \beta$, имеем

$$F_\alpha = \varphi^{\beta\alpha} F_\beta.$$

Обозначим $\mathsf{S} F_\alpha \cap H$ через F. В силу 1.4., для любого элемента $f_\alpha \in F_\alpha$ найдется такой элемент $f \in F$, что $f_\alpha = \varphi^\alpha(f)$.

F является ограниченным множеством в H. Поэтому $N(F) = \Omega$ является окрестностью нуля в Φ. Покажем, что $\Omega \subset \lambda(\Xi)$. Пусть $\omega \in \Omega$. По теореме 1, мы можем распространить характер ω на всю группу G, причем существует такой индекс β и такой характер ω_β группы G_β, что для всех элементов $g = [g_\alpha] \in H$

$$\omega_\beta(g_\beta) = \omega(g).$$

Так как $|\omega(F)| \leqslant \frac{1}{4}$, то $|\omega_\beta(F_\beta)| \leqslant \frac{1}{4}$ и $\omega_\beta \in N(F_\beta)$. Из инволюционности группы G_β вытекает тогда, что $\omega_\beta \in \Xi_\beta$ и $\xi = \theta(\omega_\beta) \in \Xi$. Но $\lambda(\xi) = \omega$, $\Omega \subset \lambda(\Xi)$ и потому отображение λ открыто.

Пусть P — органиченное множество группы X. Согласно лемме 5, существует такой индекс β и такое ограниченное множество $P_\beta \subset X_\beta$, что $\theta(P_\beta) \supset P$. Множество $U_\beta = N(P_\beta)$ является, в силу инволюционности группы G_β, окрестностью нуля в G_β.

Обозначим через U совокупность всех элементов $g = [g_\alpha]$ группы H, для которых $g_\beta \in U_\beta$, и через K — множество $N(U) \subset \Phi$. Очевидно, что множество K ограничено в Φ. Покажем, что $\lambda(P) \subset K$. В самом деле, пусть $\chi \in P$ и χ_β — его представитель в X_β. Так как $P \subset \theta(P_\beta)$, то мы можем выбрать χ_β в P_β. Тогда

$$|\chi_\beta(U_\beta)| \leqslant \frac{1}{4}$$

и потому для любого элемента $g = [g_\alpha]$ группы H такого, что $g_\beta \in U_\beta$, имеем

$$|\lambda(\chi)'g)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Отсюда следует, что $\lambda(\chi) \in K$, $\lambda(P) \subset K$ и потому отображение λ ограничено.

Пусть теперь K — ограниченное множество в Φ, имеющее вид $K = N(U)$, где U — окрестность нуля группы H. В силу теоремы 1, существует такой индекс β, что любому характеру χ группы H, удовлетворяющему неравенству

$$|\chi(U)| \leqslant \frac{1}{4},$$

соответствует характер χ_β группы G_β, удовлетворяющий соотношению

$$\chi_\beta(g_\beta) = \chi(g)$$

для любого элемента $g = [g_\alpha]$ из H. Обозначим $\varphi_\beta(U)$ через U_β, $N(U_\beta)$ — через P_β и $\theta(P_\beta)$ — через P. Очевидно, что P является ограниченным подмножеством в X. Покажем, что $\lambda(P) \supset K$. Пусть $\chi \in K$. Тогда, так как

$$|\chi(U)| \leqslant \frac{1}{4},$$

существует такой характер χ_β группы G_β, что для всех элементов $g = [g_\alpha] \in H$

$$\chi(g) = \chi_\beta(g_\beta).$$

В частности,

$$|\chi_\beta(U_\beta)| \leqslant \frac{1}{4}$$

и потому $\chi_\beta \in P_\beta$ и $\rho = \theta(\chi_\beta) \in P$. Очевидно, что $\lambda(\rho) = \chi$ и потому $K \subset \lambda(P)$.

Таким образом, отображение λ — ограничивающее. Из доказанного следует, что λ является вполне изоморфным отбражением X на Φ.

3.6. Отметим, что если $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ — замкнутый (соответственно чистый) прямой спектр и $\{X_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ — сопряженный с ним обратный спектр, то спектр $\{X_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ сильно открыт (соответственно чист). Обратно, если $\{G_\alpha;\ \varphi^{\beta\alpha}\}$ — сильно открытый (соответственно чистый) обратный спектр и $\{X_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ — сопряженный с ним прямой спектр, то спектр $\{X_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ замкнут (соответственно чист). Доказательство этого утверждения предоставляем читателю.

§ 4. Связь с предельными группами Чогошвили и Фрейденталя

4.1. Как мы уже упоминали во введении, случай прямого спектра бикомпактных групп рассматривался Г. С. Чогошвили в его докторской диссертации ([1]).

Определение Чогошвили сводится к следующему. Пусть $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ — прямой спектр бикомпактных абелевых групп, а $\{X_\alpha;\ \varphi^{\alpha\beta}\}$ — сопряженный с ним обратный спектр дискретных групп и X — предельная группа этого обратного спектра. Назовем ограниченными в X конечные множества. Тогда предельной группой спектра $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ Г. С. Чогошвили называет группу характеров группы X с указанной ограниченностью. (Так как Г. С. Чогошвили не пользуется понятием группы с заданной ограниченностью, то его определение по форме отличается от приведенного выше, но по существу совпадает с ним.)

Так как ограниченность в X такая же, как и у дискретно топологизированной группы X при обычном определении группы характеров, то предельная группа по Чогошвили является всюду плотной подгруппой некоторой бикомпактной абелевой группы G — группы характеров дискретно топологизированной группы X. Эту группу G П. С. Александров называет полной предельной группой спектра $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ и именно для этой группы доказываются различные теоремы двойственности.

Пусть теперь $\hat{G}$ — предельная группа спектра $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ во введенном нами смысле. Тогда, по теореме 8, мы можем найти предельную груп-

пу X сопряженного с ним обратного спектра. Назвав теперь в X ограниченными только конечные множества и найдя группу характеров группы X при такой ограниченности, мы найдем предельную группу по Чогошвили, которая, очевидно, однозначно определяется группой $\hat{G}$.

Обратно, пусть $\widetilde{G}$ — предельная группа спектра $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ в смысле Чогошвили, и пусть в группу $\widetilde{G}$ введена ограниченность как в группу характеров группы X, причем ограниченными в X считаются лишь конечные множества. Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение:

Если топологическая абелева группа G с заданной ограниченностью инволюционна, то будет инволюционной и группа G с любой ограниченностью такой, что множества, ограниченные в новом смысле, ограничены и в старом и что новая ограниченность квазивыпукла [см. ([6]), 4.1].

Нетрудно показать также, что ограниченность, заданная в группе X конечными множествами, квазивыпукла. В самом деле, пусть A — некоторое конечное множество в X и B — квазивыпуклое замыкание A^2 в дискретно топологизированной группе X. Тогда для любого элемента χ из X, не принадлежащего B, найдется такой характер α дискретно топологизированной группы X, что $|\alpha(B)| \leqslant \frac{1}{4}$, в то время как $|\alpha(\chi)| > \frac{1}{4}$. Но тогда $|\alpha(A)| \leqslant \frac{1}{8}$. Следовательно, найдется характер β группы X, отличающийся в точках множества $A \cup \chi$ от α меньше, чем на $\frac{1}{2}\ |\alpha(\chi) - \frac{1}{8}|$. Таким образом, $|\beta(A)| \leqslant \frac{1}{4}$, в то время как $|\beta(\chi)| > \frac{1}{4}$. Поэтому квазивыпуклое замыкание A в X лежит в B и потому конечно, так как квазивыпуклое замыкание конечного множества в дискретной группе конечно.

Из проведенных рассуждений вытекает, что группа X с ограниченностью, заданной конечными множествами, инволюционна (по теореме 3, эта группа с ограниченностью, заданной бикомпактными множествами, инволюционна), а потому она вполне изоморфна группе характеров P группы $\widetilde{G}$. Но, зная группу X, мы можем найти и группу $\hat{G}$, как группу характеров группы X с ограниченностью, заданной бикомпактными множествами. Таким образом, если известна предельная группа по Чогошвили, причем в ней задана ограниченность, то мы можем найти предельную группу в смысле, введенном в данной работе.

Очевидно также, что, так как всякое конечное множество бикомпактно, предельная группа по Чогошвили является алгебраически изоморфным непрерывным образом введенной нами предельной группы.

Для последовательности топологических групп определение предельной группы прямого спектра дал Фрейденталь в ([9]). Г. С. Чогошвили в ([1]) обобщил определение Фрейденталя на случай частично упорядоченного спектра. Это определение сводится к следующему.

Пусть $\{G_\alpha;\ \varphi_{\alpha\beta}\}$ — прямой спектр бикомпактных абелевых групп. Рассмотрим группу $G^* = \sum G_\alpha$ и введем в нее топологию следующим образом: пусть $[U_\alpha]$ — согласованная система окрестностей нуля групп G_α.

Обозначим через $U^F[U_\alpha]$ совокупность всех элементов $g=[g_\alpha]$ группы G^* таких, что существует индекс β, для которого

$$\sum \varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha) \in U_\beta.$$

Совокупность всех $U^F[U_\alpha]$ примем за полную систему окрестностей нуля в G^*. Обозначим через H^* подгруппу группы G^*, порожденную всеми элементами вида $g_\alpha - \varphi_{\alpha\beta}(g_\alpha)$. Тогда предельной группой спектра $\{G_\alpha; \varphi_{\alpha\beta}\}$ будет фактор-группа $G^* / \overline{H^*}$, где замыкание H^* берется в описанной выше топологии. Нетрудно видеть, что определенная нами в 2.11 предельная группа является приведением в смысле 2.3 из ([6]) группы $G^* / \overline{H^*}$.

Примечание при корректуре. После передачи рукописи в редакцию мне стала известна статья С. Каплана «Extensions of the Pontrjagin duality». II, помещенная в Duke Math. Journ., т. 17 (1950), 419—435. Эта статья посвящена вопросам, близким к изучаемым в нашей работе, причем автор рассматривает лишь счетные спектры.

Поступило
9. XII. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чогошвили Г. С., О гомологических аппроксимациях и законах двойственности для произвольных множеств, Матем. сб., 28 : 1 (1951), 89—118.

[2] Чогошвили Г. С., О соотношениях двойственности в топологических пространствах, Доклады Ак. Наук СССР, 46 (1945), 143—145.

[3] Чогошвили Г. С., Закон двойственности для ретрактов, Доклады Ак. Наук СССР, 51 (1946), 87—90.

[4] Александров П. С., Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств, Матем. сб., 21 (1947), 161—232.

[5] Виленкин Н. Я., Прямые спектры топологических абелевых групп и их предельные группы, Доклады Ак. Наук СССР, 72 (1950), 617—620.

[6] Виленкин Н. Я., Теория характеров топологических абелевых групп с заданной ограниченностью, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 15 (1951), 439—462.

[7] Лефшец С., Алгебраическая топология, И. Л., 1950.

[8] Вейль А., Интегрирование в топологических группах, И. Л., 1950.

[9] Граев М. И., Теория топологических групп. I, Успехи матем. наук, т. 5, вып. 2 (1950), 3—56.

[10] Braconier J., Sur les spectres des groupes topologiques, Port., Math. 2—3 (1947), 93—111.

[11] Виленкин Н. Я., К теории общих топологических групп, Доклады Ак. Наук СССР, 71 (1950), 1013—1015.

[12] Виленкин Н. Я., Теория топологических групп. II, Успехи матем. наук, т. 5, вып. 4 (1950), 19—74.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 533—544

Р. Ю. МАЦКИНА

УНИВЕРСАЛЬНОЕ НЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Строится универсальное непрерывное отображение пространства Гильберта H в пространство Гильберта, т. е. такое, что, каково бы ни было A-множество E, в любой окрестности пространства H найдется замкнутое множество F такое, что $f(F)$ гомеоморфно E.

В (4) мы показали, что непрерывный образ пространства Гильберта может содержать замкнутое в нем множество, гомеоморфное произвольному A-множеству.

В настоящей статье мы останавливаемся на изучении непрерывных отображений гильбертова пространства и показываем, что они также могут иметь достаточно сложную структуру. Именно, мы построим непрерывное отображение $f(H)$ гильбертова пространства H в гильбертово пространство H', обладающее следующим свойством: каково бы ни было A-множество E, в каждой окрестности гильбертова пространства H найдется замкнутое подмножество F, образ которого $f(F)$ гомеоморфен множеству E. *

Такое отображение естественно назвать всюду универсальным для A-множеств. **

При построении этой функции используем существование универсального A-множества (для A-множеств, лежащих в любых метрических сепарабельных пространствах), определение которому будет дано ниже.

§ 1. Построение универсального A-множества

Мы назовем *универсальным* A-множество $\mathfrak{A}$, обладающее тем свойством, что, каково бы ни было A-множество E, в $\mathfrak{A}$ найдется замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное множеству E. ***

---

* Мы рассматриваем только абсолютные A-множества, лежащие в метрических сепарабельных пространствах.

** Нами построена на пространстве I_x (бэровском пространстве) непрерывная функция, универсальная в более сильном смысле, а именно, построено такое непрерывное отображение Φ_x пространства I_x на самого себя, что, какова бы ни была непрерывная функция $\varphi(\xi)$, отображающая произвольное полное метрическое сепарабельное нульмерное пространство $\mathfrak{M}$ в бэровское пространство, найдется такое замкнутое подмножество F пространства I_x, гомеоморфное пространству $\mathfrak{M}$, что в соответствующих точках пространства $\mathfrak{M}$ и множества F значения функции $\Phi(x)$ и $\varphi(\xi)$ совпадают.

*** Напомним, что речь идет об A-множествах любой размерности, лежащих в метрических сепарабельных пространствах.

Так как всякое метрическое сепарабельное пространство может быть топологически вложено в гильбертово пространство, то, очевидно, достаточно рассматривать A-множества в гильбертовом пространстве. *

В гильбертовом же пространстве мы построим A-множество $\mathfrak{A}$, обладающее тем свойством, что, каково бы ни было A-множество E, лежащее в гильбертовом пространстве, найдется такая гиперплоскость гильбертова пространства, параллельная некоторой координатной гиперплоскости, что ее пересечение с множеством $\mathfrak{A}$ будет изометрично множеству E.

Это множество $\mathfrak{A}$, очевидно, и будет универсальным A-множеством.

Мы получим множество $\mathfrak{A}$ как проекцию так называемого *универсального G_δ в гильбертовом пространстве*, т. е. такого множества M типа G_δ, что, каково бы ни было множество $\mathcal{E}$ типа G_δ, лежащее в гильбертовом пространстве, найдется гиперплоскость гильбертова пространства, параллельная некоторой координатной гиперплоскости, пересечение которой с множеством M будет изометрично множеству $\mathcal{E}$.

Для построения универсального G_δ в гильбертовом пространстве нам понадобится понятие универсального в данном направлении открытого множества гильбертова пространства.

Назовем открытое множество Q, лежащее в гильбертовом пространстве, *универсальным в направлении* x_i, если, каково бы ни было открытое в гиперплоскости $\{x_i = 0\}$ множество G, найдется такое действительное число a_i, что пересечение гиперплоскости $\{x_i = a_i\}$ с множеством Q есть множество, которое может быть получено параллельным переносом G вдоль оси x_i из гиперплоскости $\{x_i = 0\}$ в гиперплоскость $\{x_i = a_i\}$.

Оказывается, что, каково бы ни было положительное действительное число α, мы можем построить такое универсальное в направлении x_i (i — произвольно) открытое множество, что для любого G a_i найдется среди чисел, по абсолютной величине $< \alpha$.

1. Построение универсального в направлении x_i открытого множества. Пусть α — произвольное действительное число.

Рассмотрим на отрезке $(0, \alpha)$ оси x_i систему бэровских интервалов $\{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$. Их можно получить, отобразив отрезок $(0,1)$ на $(0, \alpha)$ при помощи функции $x_i = \alpha \cdot \xi$, где $\xi \in (0,1)$, и беря образы бэровских интервалов пространства иррациональных точек отрезка $(0, 1)$. **

Тогда каждой последовательности бэровских интервалов отрезка $(0, \alpha)$ вида

$$\delta_{n_1} \supset \delta_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \delta_{n_1 \ldots n_k} \supset \cdots$$

соответствует некоторая единственная, принадлежащая всем этим интервалам, точка a_i отрезка $(0, \alpha)$.

Перенумеруем, далее, окрестности счетной базы гиперплоскости $\{x_i = 0\}$:

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_m, \ldots .$$

---

* См. (1).

** Относительно бэровских интервалов пространства иррациональных точек отрезка (0, 1) см., например, (2).

Каждому интервалу $\delta_{n_1\ldots n_k}$ каждого ранга отрезка $(0, \alpha)$ оси x_i поставим в соответствие множество гильбертова пространства (открытый цилиндр) $\mathscr{E}_{n_1\ldots n_k}$, проектирующееся на ось x_i в интервал $\delta_{n_1\ldots n_k}$ и на гиперплоскость $\{x_i = 0\}$ в окрестность Δ_{n_k}.

Очевидно, что если $a_i \in \delta_{n_1\ldots n_k}$, то пересечение $\mathscr{E}_{n_1\ldots n_k}$ с гиперплоскостью $\{x_i = a_i\}$ есть множество $\Delta_{n_k}^{a_i}$, которое получается параллельным переносом Δ_{n_k} вдоль оси x_i из гиперплоскости $\{x_i = 0\}$ в гиперплоскость $\{x_i = a_i\}$.

Множество $Q = \sum\limits_k \sum\limits_{n_1\cdots n_k} \mathscr{E}_{n_1\cdots n_k}$ является универсальным в направлении x_i открытым множеством.

Действительно, пусть G — произвольное открытое множество гиперплоскости $\{x_i = 0\}$. Тогда его можно представить в виде *счетной* суммы окрестностей счетной базы этой гиперплоскости:

$$G = \sum_{l=1}^{\infty} \Delta_{m_l}.$$

Рассмотрим следующую убывающую последовательность бэровских интервалов на отрезке $(0, \alpha)$: $\delta_{m_1} \supset \delta_{m_1 m_2} \supset \cdots \supset \delta_{m_1\cdots m_l} \supset \cdots$.

Пусть a_i — единственная точка отрезка $(0, \alpha)$, принадлежащая всем этим интервалам.

Тогда, как легко доказать, гиперплоскость $\{x_i = a_i\}$ пересекает Q по множеству G^{a_i}, которое может быть получено параллельным переносом G вдоль x_i из $\{x_i = 0\}$ в $\{x_i = a_i\}$.

Так как G было взято произвольно, то это и значит, что Q является универсальным в направлении x_i открытым множеством.

При этом, так как $a_i \in (0, \alpha)$, то $|a_i| < \alpha$.

Заметим, что в любой бесконечномерной координатной гиперплоскости гильбертова пространства можно построить универсальное в направлении любой из ее осей открытое множество, так как эта гиперплоскость обладает всеми свойствами гильбертова пространства.

2. Построение универсального G_δ. Обозначим через H^0 гиперплоскость гильбертова пространства, образованную точками, у которых все нечетные координаты равны нулю, через H_k — гиперплоскость гильбертова пространства, образованную точками, у которых все нечетные координаты, кроме, может быть, x_{2k+1}, равны нулю, через $H_k^{a_k}$ — гиперплоскость гильбертова пространства, образованную точками, у которых все нечетные координаты, кроме x_{2k+1}, равны нулю, а $x_{2k+1} = a_k$.

В каждой гиперплоскости H_k строим универсальное в направлении x_{2k+1} открытое множество Q_k и притом такое, что упоминаемое в определении универсального открытого множества значение a_k на оси x_{2k+1} для любого открытого множества гиперплоскости H^0 может быть выбрано по абсолютной величине $< \frac{1}{k}$.

Построим в гильбертовом пространстве множество $\widetilde{Q}_k$, состоящее из всех точек, которые проектируются на гиперплоскость H_k в множество Q_k.

Так как каждое Q_k есть открытое множество в гиперплоскости H_k, то каждое $\tilde{Q}_k$ есть открытое множество в гильбертовом пространстве. Но тогда множество $M = \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_k$ есть G_δ в гильбертовом пространстве.

Докажем, что множество M есть универсальное G_δ в гильбертовом пространстве.

Для этого покажем, что множество M обладает тем свойством, что, каково бы ни было множество $\mathscr{E}$ типа G_δ, лежащее в гиперплоскости H^0, найдется такая последовательность (α) чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, что $\{x_{2k+1} = a_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, есть гиперплоскость гильбертова пространства H (обозначим ее через H^α) и что пересечение этой гиперплоскости с множеством M есть множество $\mathscr{E}^\alpha$, которое может быть получено параллельным переносом $\mathscr{E}$ из гиперплоскости H^0 в гиперплоскость H^α. *

Множество $\mathscr{E}$ можно представить в виде

$$\mathscr{E} = \prod_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где каждое G_k есть открытое подмножество гиперплоскости H^0. Для каждого k найдем такое значение $a_k \left(|a_k| < \frac{1}{k} \right)$, что $G_k^{a_k} = Q_k \cdot H_k^{a_k}$,

где через $G_k^{a_k}$ обозначено множество, которое может быть получено параллельным переносом G_k из гиперплоскости H^0 в гиперплоскость $H_k^{a_k}$.

Ряд $\sum a_k^2$ сходится, так как $|a_k| < \frac{1}{k}$, следовательно, $\{x_{2k+1} = a_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, есть гиперплоскость гильбертова пространства, которую можно обозначить через H^α.

Очевидно, что $G_k^{a_k} = \tilde{Q}_k \cdot H_k^{a_k}$ (так как $G_k^{a_k} = Q_k \cdot H_k^{a_k}$)..

Обозначим через $G_k{}^\alpha$ множество, которое получается как пересечение $\tilde{Q}_k$ с H^α и, следовательно, получается параллельным переносом $G_k^{a_k}$ из гиперплоскости $H_k^{a_k}$ в гиперплоскость H^α. Очевидно, что G_k^α может быть получено параллельным переносом G_k из H^0 в H^α, ибо $G_k^{a_k}$ получается параллельным переносом G_k из H^0 в $H_k^{a_k}$.

Покажем теперь, что $M \cdot H^\alpha = \mathscr{E}^\alpha$.

$$M \cdot H^\alpha = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_k \right) \cdot H^\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_k \cdot H^\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} G_k^\alpha,$$

но G_k^α получается параллельным переносом G_k из H^0 в H^α и, значит,

$$\prod_{k=1}^{\infty} G_k^\alpha = \mathscr{E}^\alpha, \text{ т. е. } M \cdot H^\alpha = \mathscr{E}^\alpha,$$

что и требовалось доказать.

---

* Множество M будет в этом случае удовлетворять данному нами определению универсального G_δ, ибо множество $\mathscr{E}^\alpha$ изометрично множеству $\mathscr{E}$ и, с другой стороны, гиперплоскость H^0 изометрична гильбертову пространству.

Теперь для построения универсального A-множества достаточно спроектировать построенное нами универсальное G_δ M на гиперплоскость $\{x_2=0\}$.

§ 2. Построение всюду универсального для A-множеств непрерывного отображения

Определение всюду универсального для A-множеств непрерывного отображения $f(x)$ было дано в начале статьи.

При построении его мы воспользуемся тем, что мы умеем строить универсальное A-множество, которое может быть помещено в гильбертов параллелепипед, а также в любое подмножество гильбертова пространства, состоящее из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \beta_1,\ \alpha_2 \leqslant x_2 \leqslant \beta_2, \dots, \alpha_k \leqslant x_k \leqslant \beta_k$$

и при $n>k$

$$|x_n| < \frac{1}{n} \cdot a$$

где k — любое натуральное число, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k$ — любые действительные, числа, а a — любое действительное положительное число), так как всякое такое подмножество гомеоморфно гильбертову параллелепипеду.

Мы построим в гильбертовом пространстве некоторую всюду плотную в нем систему сферических окрестностей, а в каждой из этих окрестностей поместим замкнутое подмножество гильбертова пространства, гомеоморфное бэровскому пространству *, таким образом, чтобы никакие два из этих замкнутых подмножеств не имели общих точек. Затем мы построим непрерывное отображение $f(H)$ гильбертова пространства в гильбертово пространство, при котором эти замкнутые подмножества отображаются на универсальные A-множества. Тогда можно будет показать, что $f(x)$ и явится искомым отображением.

1. Построение всюду плотной на гильбертовом пространстве системы окрестностей. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$— счетное всюду плотное множество в гильбертовом пространстве H.

Выберем следующим образом первую подпоследовательность точек этой последовательности: $x_1^1 = x_1$; x_1^1 — первая из следующих за x_1^1 точек последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$ отстоящая от x_1^1 на расстоянии $\geqslant 1$. Если определены точки x_1^1, $x_2^1, \dots, x_k^1$ первой подпоследовательности, то точкой x_{k+1}^1 будет первая из следующих за x_k^1 точек последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$ отстоящая от каждой из точек x_1^1, $x_2^1, \dots, x_k^1$ на расстояние $\geqslant 1$.

Сферические окрестности Δ_k^1 радиуса $\frac{1}{4}$ с центрами в точках x_k^1 выбранной нами первой подпоследовательности назовем окрестностями первого ранга.

* Возможность этого вытекает из результатов ([3]); кроме того, в ([4]) такое подмножество было нами построено некоторым специальным образом.

Вообще для каждого натурального числа m следующим образом выбираем m-ую подпоследовательность точек последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$:

$x_1^m = x_1$; если выбраны точки $x_1^m, x_2^m, \ldots, x_k^m$, то в качестве x_{k+1}^m берем первую из следующих за x_k^m точек последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, отстоящую от каждой из точек $x_1^m, x_2^m, \ldots, x_k^m$ на расстояние $\geqslant \frac{1}{m}$.

Сферические окрестности Δ_k^m радиуса $\frac{1}{4m}$ с центрами в точках m-й подпоследовательности точек назовем окрестностями m-го ранга.

Легко видеть, что никакие две окрестности одного ранга не пересекаются.

Покажем, что совокупность окрестностей всех рангов образует всюду плотную на гильбертовом пространстве H систему окрестностей, т. е. что в любой окрестности пространства H найдется целиком в ней лежащая окрестность какого-либо ранга.

Пусть Δ — некоторая окрестность пространства H. Так как последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ всюду плотна на гильбертовом пространстве H, то найдется такой номер n_0, что точка x_{n_0} принадлежит окрестности Δ.

Обозначим расстояние точки x_{n_0} от границы окрестности Δ через λ, а наименьшее из расстояний между двумя точками части $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — через ρ. Выберем число k такое, что $\frac{1}{4k} < \lambda$ и $\frac{1}{k} < \rho$.

Тогда точка x_{n_0} принадлежит k-й подпоследовательности точек и является центром одной из окрестностей k-го ранга, радиус которой равен $\frac{1}{4k}$, и которая, следовательно, целиком лежит внутри окрестности Δ.

Построенная нами система окрестностей, как легко видеть, обладает следующим свойством:

Если в каждую окрестность Δ_k^m m-го ранга (m фиксировано) поместить некоторое замкнутое множество F_k^m, то сумма всех этих замкнутых множеств есть, в свою очередь, множество замкнутое.

2. Построение функции $f(x)$. Поместим в каждой окрестности Δ_k^1 первого ранга замкнутое подмножество F_k^1 гильбертова пространства H, гомеоморфное бэровскому пространству. Сумма

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^1$$

этих множеств есть замкнутое множество.

Каждое F_k^1 можно непрерывно отобразить на любое A-множество, а значит, и на универсальное A-множество, лежащее в параллелепипеде гильбертова пространства, состоящем из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|y_n| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$ *. Такое отображение может быть задано при помощи счетного числа непрерывных действительных

* Точки гильбертова пространства, в которое мы отображаем рассматриваемое гильбертово пространство H, в отличие от точек пространства H обозначаем через $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$.

функций $\varphi^1_{k1}, \varphi^1_{k2}, \ldots, \varphi^1_{kn}, \ldots$, заданных на F_k и удовлетворяющих неравенствам $|\varphi^1_{kn}| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$.

Мы получим счетное число непрерывных действительных функций $\varphi_1{}^1, \varphi_2{}^1, \ldots \varphi_n{}^1, \ldots$, заданных на F_1 и удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi_n{}^1(x)| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2},$$

если на каждом $F_k{}^1$ мы положим $\varphi_n{}^1 = \varphi^1_{kn}$.

Так как множество F_1 замкнуто в H, то каждую непрерывную действительную функцию $\varphi_n{}^1$ можно непрерывно распространить на все пространство H с сохранением неравенства $|\varphi_n{}^1| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$ и получить заданную на всем пространстве H систему функций $f_1{}^1, f_2{}^1, \ldots, f_n{}^1, \ldots$, удовлетворяющих неравенствам

$$|f_n{}^1| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{n},$$

совпадающих на множестве F_1 с функциями $\varphi_n{}^1$, а значит, совпадающих на каждом $F_1{}^k$ с функциями φ^1_{kn}.

В каждой окрестности $\Delta_k{}^2$ второго ранга возьмем некоторую окрестность $\widetilde{\Delta}_k{}^2$, не содержащую точек множества F_1, а в окрестности $\widetilde{\Delta}_k{}^2$ выберем сферическую окрестность $\delta_k{}^2$ такую, что внутри этой окрестности

$$a^2_{k1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \leqslant f_1^1(x) \leqslant a^2_{k1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2},$$

где a^2_{k1} — значение функции $f_1{}^1(x)$ в центре окрестности $\delta_k{}^2$. Затем в каждой окрестности $\delta_k{}^2$ поместим замкнутое подмножество $F_k{}^2$ пространства H, гомеоморфное бэровскому пространству (которое, следовательно, будет лежать в окрестности $\Delta_k{}^2$).

Сумма $F_2 = \sum_{k=1}^{\infty} F_k{}^2$ также будет замкнутым в H множеством, которое не пересекается с множеством F_1.

Отобразим каждое $F_k{}^2$ на универсальное A-множество, лежащее внутри параллелепипеда гильбертова пространства, состоящего из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$a^2_{k1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \leqslant y_1 \leqslant a^2_{k1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}$$

и при $n > 1$

$$|y_n| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}.$$

Это отображение может быть задано на каждом $F_k{}^2$ при помощи счетного числа действительных непрерывных функций $\varphi^2_{k1}, \varphi^2_{k2}, \ldots, \varphi^2_{kn}, \ldots$, удовлетворяющих неравенствам

$$a^2_{k1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \leqslant |\varphi^2_{k1}| \leqslant a^2_{k1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}$$

и при $n > 1$

$$|\varphi^2_{kn}| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}.$$

Обозначим через d_1^2 заданную на $F_1 + F_2$ непрерывную действительную функцию, которая на F_1 равна нулю, а на каждом F_k^2 равна $\varphi_{k1}^2 - f_1^1$.

Так как на каждом F_k^2 (лежащем внутри окрестности δ_k^2)

$$|\varphi_{k1}^1 - f_1^1| = |(\varphi_{k1}^2 - a_{k1}^2) - (f^1{}_1 - a_{k1}^{21})| \leqslant \frac{1}{2^2},$$

а на F_1 $d_1^2 = 0$, то на множестве $F_1 + F_2$ $\quad |d_1^2| < \frac{1}{2^2}$.

Множество $F_1 + F_2$ замкнуто, и мы можем доопределить непрерывно d_1^2 на всем пространстве H с сохранением неравенства $|d_1^2| < \frac{1}{2^2}$.

Положим на пространстве H

$$f_1^2 = f_1^1 + d_1^2.$$

Тогда f_1^2 есть непрерывная на H функция, совпадающая на F_1 с функцией f_1^1 и на каждом F_k^2 — с функцией φ_{k1}^2. При этом

$$|f_1^2 - f_1^1| = |d_1^2| < \frac{1}{2^2}$$

и

$$|f_1^2| \leqslant |f_1^1| + |d_1^2| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} < 1.$$

Положим при $n > 1$ $\varphi_n{}^2 = f_n{}^1$ на F_1 и $\varphi_n^2 = \varphi_{kn}^2$ на F_k^2.

Мы получим систему непрерывных на замкнутом множестве $F_1 + F_2$ действительных функций, удовлетворяющих неравенствам $|\varphi_n^2| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$.

Продолжив каждую из этих функций непрерывно на все пространство H с сохранением неравенства $|\varphi_n{}^2| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$ и добавив к полученной таким образом системе функций построенную нами функцию f_1^2, мы найдем совокупность непрерывных функций $f_1^2, f_2^2, \ldots, f_n^2, \ldots$, удовлетворяющих неравенствам $|f_n^2| < \frac{1}{n}$ и совпадающих на каждом F_k^1 соответственно с функциями φ_{kn}^1, а на каждом F_k^2 — с функциями φ_{kn}^2.

Пусть для каждого $m \leqslant l$ нами построена счетная совокупность непрерывных функций $f_1^m, f_2^m, \ldots, f_n^m, \ldots$, удовлетворяющих неравенствам

$$|f_1^m| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} < 1,$$

$$|f_2^m| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2m} < \frac{1}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|f_i^m| \leqslant \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2^m} < \frac{1}{i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|f_{m-1}^m| \leqslant \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} < \frac{1}{m-1},$$

причем $|f_n^m| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{n}$ при всех $n \geqslant m$, таким образом, что

$$|f_i^m - f_i^{m-1}| < \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2^m}$$

для всех $i \leqslant m-1$ и $m \leqslant l$, и пусть при каждом $m \leqslant l$ совокупность функций $f_1^m, f_2^m, \ldots, f_n^m, \ldots$ отображает каждое F_k^m на некоторое универсальное A-множество и на каждом множестве $F_m = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^m$ каждая функция f_n^j $(m \leqslant j \leqslant l)$ совпадает с функцией f_n^m.

Построим счетную систему функций $f_1^{l+1}, f_2^{l+1}, \ldots, f_n^{l+1}, \ldots$ следующим образом.

В каждой окрестности Δ_k^{l+1} $(l+1)$-го ранга выберем окрестность $\widetilde{\Delta}_k^{l+1}$, не содержащую точек множества $F_1 + F_2 + \cdots + F_l$, а в этой последней — сферическую окрестность δ_k^{l+1}, внутри которой удовлетворяются неравенства:

$$a_{k1}^{l+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{l+1}} \leqslant f_1^l \leqslant a_{k1}^{l+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{l+1}},$$

$$a_{k2}^{l+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{l+1}} \leqslant f_2^l \leqslant a_{k2}^{l+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{l+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{kl}^{l+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2^{l+1}} \leqslant f_l^l \leqslant a_{kl}^{l+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2^{l+1}},$$

где a_{ki}^{l+1} — соответственно значение функции f_i^l в центре окрестности δ_k^{l+1}.

Затем в каждой окрестности δ_k^{l+1} поместим замкнутое подмножество F_k^{l+1} пространства H, гомеоморфное бэровскому пространству.

Очевидно, что

$$F_{l+1} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{l+1},$$

а значит, и $\sum_{i=1}^{l+1} F_i$ есть замкнутое множество.

Отобразим каждое F_k^{l+1} на универсальное A-множество, лежащее внутри параллелепипеда гильбертова пространства, состоящего из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$a_{k1}^{l+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{l+1}} \leqslant y_1 \leqslant a_{k1}^{l+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{l+1}},$$

$$a_{k2}^{l+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{l+1}} \leqslant y_2 \leqslant a_{k2}^{l+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{l+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{kl}^{l+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2^{l+1}} \leqslant y_l \leqslant a_{kl}^{l+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2^{l+1}},$$

$$|y_n| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \text{ при } n > l+1.$$

При этом мы получим на каждом $F_k{}^{l+1}$ счетное число действительных непрерывных функций $\varphi_{k1}^{l+1}, \varphi_{k2}^{l+1}, \ldots, \varphi_{kn}^{l+1}, \ldots$, задающих это отображение и удовлетворяющих неравенствам:

$$a_{k1}^{l+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2^{l+1}} \leqslant \varphi_{k1}^{l+1} \leqslant a_{k1}^{l+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2^{l+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{kl}^{l+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2^{l+1}} \leqslant \varphi_{kl}^{l+1} \leqslant a_{kl}^{l+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2^{l+1}},$$

$$|\varphi_{kn}^{l+1}| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} \text{ при } n \geqslant l+1.$$

Для каждого $i \leqslant l$ обозначим через $d_i{}^{l+1}$ заданную на $\sum\limits_{j=1}^{l+1} F_j$ функцию, которая на $\sum\limits_{j=1}^{l} F_j$ равна нулю, а на каждом $F_k{}^{l+1}$ соответственно равна $\varphi_k^{l+1} - f_i^l$.

На $F_k{}^{l+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$$|d_i^{l-1}| = |\varphi_{ki}^{l+1} - f_i^l| \leqslant \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{l+1}},$$

а на $\sum\limits_{j=1}^{l} F_j$ $d_i^{l+1} = 0$, т. е. на множестве $\sum\limits_{j=1}^{l+1} F_j$

$$|d_i{}^{l+1}| < \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{l+1}}.$$

Так как множество $\sum\limits_{j=1}^{l+1} F_j$ замкнуто, то мы можем доопределить непрерывно каждую $d_i{}^{l+1}$ на все пространство H с сохранением неравенства $|d_i{}^{l+1}| \leqslant \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{l+1}}$.

Положим на пространстве H для $i \leqslant l$ $f_i{}^{l+1} = f_i{}^l + d_i{}^{l+1}$. Очевидно, что каждая $f_i{}^{l+1}$ $(i \leqslant l)$ есть непрерывная на H функция на каждом F_j $(j \leqslant l)$ $f^{l+1} = f_i^l$, а на каждом $F_k{}^{l+1}$ $f_i^{l+1} = \varphi_{ki}^{l+1}$. При этом $|f_i{}^{l+1}| \leqslant |f_i{}^l| + |d_i{}^{l+1}| \leqslant \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^l} + \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{l+1}} < \frac{1}{i}$ $\left(\text{так как } |f_i{}^l| \leqslant \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^l} \text{ при } i \leqslant l-1,\ |f_l{}^l| \leqslant \frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2} \text{ и } |d_i{}^{l+1}| \leqslant \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{l+1}}\right)$ и $|f_i{}^{l+1} - f_i{}^l| \leqslant \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{l+1}}$ для всякого $i \leqslant l$.

Для $i > l$ положим $\varphi_i^{l+1} = f_i^l$ на $\sum\limits_{j=1}^{l} F_j$ и $\varphi_i^{l+1} = \varphi_{ki}^{l+1}$ на каждом множестве F_{ki}^{l+1}.

Легко видеть, что $|\varphi_i^{l+1}| \leqslant \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2}$ на $\sum\limits_{j=1}^{l+1} F_j$.

Распространив непрерывно каждую функцию φ_i^{l+1} $(i \geqslant l+1)$ на все пространство H с сохранением этого неравенства и добавив к полученным функциям f_i^{l+1} $(i \geqslant l+1)$ построенные нами ранее функции f_i^{l+1} $(i < l+1)$, получим совокупность непрерывных функций

$$f_1^{l+1},\ f_2^{l+1},\ \ldots,\ f_n^{l+1},\ \ldots,$$

соответственно совпадающих на каждом F_j $(j \leqslant l)$ с функциями f_i^l (и, значит, с функциями f_i^j), а на каждом F_k^{l+1} — с функциями φ_{ki}^{l+1}, и таких, что при $i \leqslant l$

$$|f_i^{l+1}| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{i} + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2^{l+1}} + \cdots + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2^{l+1}} < \frac{1}{i},$$

а при $i > l$

$$|f_i^{l+1}| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{i} < \frac{1}{i}.$$

При этом для каждого $i \leqslant l$

$$|f_i^{l+1} - f_i^l| < \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2^{l+1}}.$$

Таким образом, мы можем построить совокупность непересекающихся замкнутых подмножеств F_k^m (m и k пробегают все натуральные числа) пространства H и счетное число счетных совокупностей непрерывных функций:

$$\begin{array}{l} f_1^1,\ f_2^1,\ \ldots,\ f_n^1,\ \ldots, \\ f_1^2,\ f_2^2,\ \ldots,\ f_n^2,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1^l,\ f_2^l,\ \ldots,\ f_n^l,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

таких, что

1) при любых l и n

$$|f_n^l| < \frac{1}{n};$$

2) для любого n при $l \geqslant n$

$$|f_n^{l+1} - f_n^l| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{l+1}};$$

3) на каждом F_k^m

$$f_n^l = f_n^m = \varphi_{kn}^m$$

для всех n и $l \geqslant m$.

Рассмотрим для каждого натурального числа n последовательность функций

$$f_n^1,\ f_n^2,\ \ldots,\ f_n^l,\ \ldots.$$

Из свойства 2) построенной системы непрерывных функций следует, что эта последовательность равномерно сходится и предел ее есть непрерывная функция $f_n(x)$.

Из свойства 1) следует, что при всяком n

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n},$$

а следовательно, совокупность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... определяет непрерывное отображение $f(x)$ пространства H в гильбертово же пространство.

Из свойства 3) следует, что при всяком n на каждом F_k^m каждая функция $f_n(x)$ соответственно совпадает с функцией $\varphi_{kn}^m(x)$, а значит, совокупность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... (т. е. отображение $f(x)$) отображает каждое F_k^m на некоторое универсальное A-множество.

Покажем, что отображение $f(x)$ всюду универсально на H для A-множеств.

Действительно, пусть E — произвольное A-множество, а Δ — произвольная окрестность пространства H.

В окрестности Δ лежит хотя бы одна окрестность из построенной нами всюду плотной системы окрестностей и, следовательно, хотя бы одно замкнутое подмножество F_k^m пространства H, гомеоморфное бэровскому пространству, которое отображается при помощи $f(x)$ на какое-то универсальное A-множество $\mathfrak{A}$.

По определению универсального A-множества, существует замкнутое подмножество $\tilde{E}$ множества $\mathfrak{A}$, гомеоморфное множеству E.

Прообраз множества $\tilde{E}$ — множество F — замкнутое в множестве F_k^m, а следовательно, и замкнутое в H (так как F_k^m замкнуто в H) множество, лежащее в окрестности Δ.

Таким образом, для произвольного A-множества E в произвольной окрестности Δ пространства H существует замкнутое подмножество F пространства H, образ которого $\tilde{E}$ гомеоморфен множеству E, и следовательно, непрерывное отображение $f(x)$ всюду универсально для A-множеств.

Заметим, что приведенное построение можно произвести на любом метрическом сепарабельном пространстве, каждая окрестность которого содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное бэровскому пространству, в частности, на всяком однородном A-множестве не F_σ, лежащем в метрическом сепарабельном пространстве.

Поступило
21.II.1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Урысон П., Zum Metrisationsproblem, Math. Ann., 94 (1925), 309—315.

[2] Келдыш Л., Структура B-множеств, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, XVII (1945), 1—75.

[3] Гуревич В., Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A), Fund. math., 12 (1928), 78—109.

[4] Мацкина Р. Ю., О непрерывных образах гильбертова пространства, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 95—103.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 545—562

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

В работе даются достаточные условия применимости преобразования Лапласа для решения смешанной задачи для линейных гиперболических уравнений второго порядка. Насколько известно автору, это сделано для уравнений и областей лишь специального вида. Основные результаты работы опубликованы в Докладах Ак. Наук СССР ([1]).

§ 1. Рассматривается уравнение нормального гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u - \varphi(X,t) \tag{1}$$

при $t \geqslant 0$ и $X = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащей конечной (вообще говоря, многосвязной) области Ω, граница которой Γ состоит из конечного числа гладких поверхностей *.

Коэффициенты $a_{ij}(X)$ обладают в $\overline{\Omega}$ $(\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma)$ непрерывными производными ** по x_i до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$, а $b_i(X)$ и $c(X)$ — до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$.

Далее предполагается выполнение следующих условий (которые назовем условиями (2)):

Функция $\varphi(X,t)$ имеет непрерывные производные

$$\frac{\partial^{k_0+k}\varphi(X,t)}{\partial t^{k_0}\,\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}, \quad 0 \leqslant k_0 + k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+4, \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+2,$$

и существуют такие $\lambda_0 \geqslant 0$ и постоянная $c > 0$, что при $X \in \Omega$ и $t \geqslant 0$

$$\left|\frac{\partial^{k_0+k}\varphi}{\partial t^{k_0}\,\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right| \leqslant ce^{\lambda_0 t}, \quad 0 \leqslant k_0 + k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+4, \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+2.$$

Кроме того, при $t=0$ $\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} = 0$ для $k = 0, 1, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]+3$.

---

* Более подробно условия, налагаемые на область, сформулированы в § 3.

** Можно потребовать лишь существования обобщенных производных до того же порядка, суммируемых с некоторыми степенями по области Ω [см. ([2])].

При перечисленных условиях строится дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(X, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

и нулевому граничному условию. Характер поведения решения на границе будет уточнен ниже.

Переходим к определению функции $u(X, t)$. Для этого воспользуемся хорошо известным приемом — преобразованием Лапласа по переменной t. Обозначая

$$\int_0^\infty u(X, t)\, e^{-\lambda t}\, dt = v(X, \lambda),$$
$$\int_0^\infty \varphi(X, t)\, e^{-\lambda t}\, dt = \psi(X, \lambda) \tag{3}$$
$$(\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \lambda_1 \geqslant \lambda_0' > \lambda_0 \geqslant 0),$$

получим для определения функции v эллиптическое уравнение

$$L(v) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(X)\frac{\partial v}{\partial x_i} + cv = \lambda^2 v + \psi \tag{4}$$

с краевым условием $v|_\Gamma = 0$.

Задача заключается в том, чтобы оправдать формально проведенное преобразование Лапласа. Для этого надо решить уравнение (4), дать оценку v и ее производных двух первых порядков в зависимости от λ и показать, что имеют место формулы обращения для (3).

Благодаря условиям (2), наложенным на функцию φ, функция ψ имеет непрерывные производные по x_i до порядка $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right| \leqslant c_1 |\lambda|^{-\left[\frac{n}{2}\right] - 4 + k} \quad \left(k = 0, 1, \ldots \left[\frac{n}{2}\right] + 2\right). \tag{5}$$

Неравенства (5) получаются простым интегрированием по частям интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} e^{-\lambda t}\, dt.$$

§ 2. Для определения функции v воспользуемся методом конечных разностей.

Заменим уравнение (4) разностным:

$$L_h(v_h) \equiv \sum_{ij} \frac{\overline{\Delta}}{\Delta x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\Delta v_h(X, \lambda)}{\Delta x_j}\right) + \sum_i b_i(X)\frac{\Delta v_h(X, \lambda)}{\Delta x_i} +$$
$$+ c(X)\, v_h(X, \lambda) = \lambda^2 v_h(X, \lambda) + \psi(X, \lambda), \tag{6}$$

где

$$\frac{\Delta v_h(X,\lambda)}{\Delta x_i} = \frac{1}{\Delta x}\left[v_h(x_1, \ldots, x_i + \Delta x, \ldots x_n, \lambda) - v_h(x_1, \ldots x_i, \ldots x_n, \lambda)\right],$$

$$\frac{\bar{\Delta} v_h(X,\lambda)}{\Delta x_i} = \frac{1}{\Delta x}\left[v_h(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n, \lambda) - v_h(x_1, \ldots, x_i - \Delta x, \ldots, x_n, \lambda)\right].$$

Совокупность узлов кубической сети *, лежащих внутри Ω, обозначим через Ω_h. Граничные узлы Ω_h обозначим через Γ_h. Значок «h» у решения v_h уравнения (5) мы будем иногда опускать. Все постоянные, входящие в неравенства, не зависят от h.

Уравнения (6) составляют систему линейных алгебраических уравнений, неизвестными которой являются значения функции v_h во внутренних точках решетки Ω_h; на Γ_h $v_h = 0$. Чтобы установить разрешимость этой системы при любых ψ, достаточно доказать, что однородная система имеет не более одного решения (при достаточно большом λ_0').

Для этого умножим уравнение (6) на комплексно-сопряженное значение $\bar{v}_h$ и просуммируем обе части его по всем внутренним узлам Ω_h. Затем, используя граничное условие $v|_{\Gamma_h} = 0$, произведем суммирование по частям в двойной сумме.

Таким путем легко получим:

$$h^n \sum_{\Omega_h}\left\{-\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\Delta v}{\Delta x_j}\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\Delta v}{\Delta x_i}\bar{v} + c\,|\bar{v}|^2\right\} =$$

$$= h^n \sum_{\Omega_h}\{\lambda^2 |v|^2 + \psi \bar{v}\}. \tag{7}$$

Покажем, что, беря λ_0' достаточно большим, из (7) можно получить оценки:

$$H_{\Omega_h}(v) \equiv h^n \sum_{\Omega_h} |v|^2 \leqslant \frac{c_2}{|\lambda|^2} H_{\Omega_h}(\psi),$$

$$D_{\Omega_h}(v) \equiv h^n \sum_{\Omega_h}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 \leqslant c_3 H_{\Omega_h}(\psi). \tag{8}$$

Для этого отделим в равенстве (7) вещественную и мнимую части, считая $v = v_1 + iv_2$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$:

$$h^n \sum_{\Omega_h}\left\{\sum_{ij} a_{ij}\left(\frac{\Delta v_1}{\Delta x_i}\frac{\Delta v_1}{\Delta x_j} + \frac{\Delta v_2}{\Delta x_i}\frac{\Delta v_2}{\Delta x_j}\right) - \sum_i b_i\left(\frac{\Delta v_1}{\Delta x_i} v_1 + \frac{\Delta v_2}{\Delta x_i} v_2\right) - c\,|v|^2\right\} =$$

$$= h^h \sum_{\Omega_h}\{(\lambda_2{}^2 - \lambda_1{}^2)\,|v|^2 - \psi_1 v_1 - \psi_2 v_2\} \tag{9}$$

и

$$h^n \sum_{\Omega_h}\sum_i b_i\left(\frac{\Delta v_2}{\Delta x i} v_1 - \frac{\Delta v_1}{\Delta x_i} v_2\right) = h^n \sum_{\Omega_h}\{2\lambda_1\lambda_2 |v|^2 + \psi_2 v_1 - \psi_1 v_2\}. \tag{10}$$

---

* Равенство $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = h$ берем лишь для упрощения записи.

Так как уравнение (1) — нормально-гиперболического типа, то квадратичная форма $\sum_{ij} a_{ij}\beta_i\beta_j$ удовлетворяет неравенству:

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\beta_i\beta_j,$$

где β_i вещественны, $\alpha_0 > 0$. Это неравенство мы используем для оценки первой суммы из (9).

Другие члены суммы (9) оценим так:

$$\left| b_i \frac{\Delta v_k}{\Delta x_i} \bar{v}_l \right| \leqslant c_4 \left| \frac{\Delta v_k}{\Delta x_i} \bar{v}_l \right| \leqslant \frac{c_4}{2}\left(\alpha_2 \left|\frac{\Delta v_k}{\Delta x}\right|^2 + \frac{1}{\alpha_2} |v_l|^2\right)$$

при любом $\alpha_2 > 0$.

Пусть $|c(X)| \leqslant c_5$. Разберем два случая: когда $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$ и когда $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$.

а) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$. Перенося в равенстве (9) все члены, кроме первой суммы, направо и оценивая их при помощи вышеуказанных неравенств, получаем:

$$\alpha_0 D_{\Omega_h}(v) \leqslant \frac{c_4}{2}\alpha_2 D_{\Omega_h}(v) + \left(c_5 + \frac{c_4}{2\alpha_2} + \lambda_2^2 - \lambda_1^2\right) H_{\Omega_h}(v) + H_{\Omega_h}(\sqrt{|\psi v|}). \tag{11}$$

Возьмем α_2 столь малым, чтобы $\alpha_0 - c_4\frac{\alpha_2}{2} \geqslant \frac{\alpha_0}{2}$. В свою очередь, $\lambda_0' > \lambda_0$ возьмем столь большим, чтобы для $\lambda_1 \geqslant \lambda_0'$ имело место

$$c_5 + \frac{c_4}{2\alpha_2} - \lambda_1^2 \leqslant -\frac{3}{4}\lambda_1^2,$$

или, что то же,

$$c_5 + \frac{c_4}{2\alpha_2} + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \leqslant -\frac{1}{4}\lambda_1^2.$$

Тогда из (11) будет следовать, что

$$D_{\Omega_h}(v) + \frac{1}{2\alpha_0}\lambda_1^2 H_{\Omega_h}(v) \leqslant \frac{2}{\alpha_0} H_{\Omega_h}(\sqrt{|\psi v|}). \tag{12}$$

Отсюда

$$H_{\Omega_h}(v) \leqslant \frac{4}{\lambda_1^2} H_{\Omega_h}(\sqrt{|\psi v|}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\lambda_1^2}\sqrt{H_{\Omega_h}(v)\cdot H_{\Omega_h}(\psi)} \leqslant \frac{6}{|\lambda|^2}\sqrt{H_{\Omega_h}(v)\cdot H_{\Omega_h}(\psi)}$$

и, следовательно,

$$H_{\Omega_h}(v) \leqslant \frac{36}{|\lambda|^4} H_{\Omega_h}(\psi) \leqslant \frac{c_6}{|\lambda|^2} H_{\Omega_h}(\psi). \tag{13}$$

Из неравенства же (12) получаем:

$$D_{\Omega_h}(v) \leqslant \frac{2}{\alpha_0}\sqrt{H_{\Omega_h}(v)\cdot H_{\Omega_h}(\psi)} \leqslant \frac{12}{\alpha_0|\lambda|^2} H_{\Omega_h}(\psi) \leqslant c_6' H_{\Omega_h}(\psi). \tag{14}$$

Итак, неравенства (8) доказаны для случая, когда $\lambda_2^2 < \frac{1}{2}\lambda_1^2$ (при этом $\lambda_1 \geqslant \lambda_0'$, а λ_0' выбрано так, как указано выше). Осталось разобрать второй случай:

б) $\lambda_2^2 \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1^2$. Из равенства (10) оценим член $2|\lambda_1\lambda_2||v|^2$ через все остальные, используя лишь неравенство Коши:

$$2|\lambda_1\lambda_2| H_{\Omega_h}(v) \leqslant c_7 \{\sqrt{D_{\Omega_h}(v)\cdot H_{\Omega_h}(v)} + \sqrt{H_{\Omega_h}(v) H_{\Omega_h}(\psi)}\}. \tag{15}$$

Из неравенства (11) следует:

$$D_{\Omega_h}(v) \leqslant c_8 \{\lambda_2^2 H_{\Omega_h}(v) + H_{\Omega_h}(\psi)\}. \tag{16}$$

Подставляя это неравенство в (15), получим

$$2|\lambda_1\lambda_2| H_{\Omega_h}(v) \leqslant c_9 \left\{|\lambda_2| H_{\Omega_h}(v) + \sqrt{H_{\Omega_h}(v) H_{\Omega_h}(\psi)}\right\}.$$

Возьмем λ_0' столь большим, чтобы для $\lambda_1 > \lambda_0'$ $2\lambda_1 - c_9 > 1$. Тогда

$$|\lambda_2| H_{\Omega_h}(v) \leqslant c_9 \sqrt{H_{\Omega_h}(\psi) H_{\Omega_h}(v)},$$

откуда

$$H_{\Omega_h}(v) \leqslant \frac{c_9^2}{|\lambda_2|^2} H_{\Omega_h}(\psi). \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), получаем:

$$D_{\Omega_h}(v) \leqslant c_{10} H_{\Omega_h}(\psi).$$

Итак, неравенства (8) доказаны для любого $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_0' > > \lambda_0 \geqslant 0$, лишь бы λ_0' было достаточно велико.

Из первого неравенства (8) сразу следует единственность решения v_h краевой задачи для уравнения (6), а значит, и его существование.

Покажем, что совокупность функций v_h, например, для $h = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, образует вместе с первыми и вторыми разностными отношениями равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций на решетке для каждой внутренней подобласти Ω' области Ω.*

Установим основное неравенство, имеющее место для решений эллиптических уравнений. Именно, покажем, как оценить

$$H^{(m)}_{\Omega_h'}(v) = h^n \sum_{\Omega_h'} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\Sigma k_s = k} \left| \frac{\Delta^k v_h}{\Delta x_1^{k_1} \ldots \Delta x_n^{k_n}} \right|^2$$

через $H^{(i)}_{\Omega_h''}(v)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, где Ω' является строго внутренней подобластью области $\Omega'' \subset \Omega$.

Проведем эту оценку для $m = 1$, так как для $m > 1$ она проводится вполне аналогично. Кроме того, достаточно в качестве Ω' и Ω'' взять

---

* Функции v_h, $\frac{\Delta v_h}{\Delta x_i}$, $\frac{\Delta^2 v_h}{\Delta x_i \Delta x_j}$ можно считать проинтерполированными хотя бы полилинейным способом на всю область Ω_h.

два концентрических куба. Возьмем куб Ω'', который имеет своей вершиной начало координат, лежит в первом координатном углу и имеет сторону длины $l = ph$. Пусть $\Omega' \subset \Omega''' \subset \Omega''$.

Докажем, что для любой функции v_h, заданной на сетке, имеет место неравенство:

$$H^{(1)}_{\Omega'_h}(v) \leqslant c_{11} \left\{ H_{\Omega''_h}(v) + H_{\Omega''_h}\left(\sqrt{|v L_h(v)|}\right) \right\}, \tag{18}$$

где c_{11} безгранично возрастает по мере приближения Ω' к Ω'' или Ω''' к Ω'', но при фиксированных областях может быть выбрано постоянным, не зависящим от h и v.

Возьмем следующую функцию на решетке:

$$\zeta \equiv \zeta_h(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} 0 & \text{вне } \Omega''' \\ \prod_{i=1}^{n} \left(\sin^2 \frac{\pi x_i}{l} + \sin^2 \frac{\pi(x_i + h)}{l} \right) & \text{при } X \in \bar{\Omega}'''. \end{cases}$$

Очевидно, что $\zeta_h > 0$ для $X \in \bar{\Omega}'''$ и превосходит в $\bar{\Omega}'$ некоторую постоянную α_3, независящую от h. Больше того, в $\bar{\Omega}'''$

$$\frac{\Delta \zeta_h}{\Delta x_k} = \frac{\sin \frac{2\pi h}{l}}{h} \sin \frac{2\pi}{l}(x_k + h) \prod_{i \neq k} \left(\sin^2 \frac{\pi x_i}{l} + \sin^2 \frac{\pi(x_i + h)}{l} \right),$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\Delta \zeta_h}{\Delta x_k} \right)^2 : \zeta_h \leqslant \frac{2^{n+2}\pi}{l} = c_{12}.$$

Преобразуем сумму $h^n \sum_{\Omega''} \zeta \bar{v} L_h(v)$:

$$h^n \sum_{\Omega''} \zeta \bar{v} L_h(v) = h^n \sum_{\Omega''} \left\{ - \sum_{ij} a_{ij} \frac{\Delta v}{\Delta x_j} \frac{\Delta(\zeta \bar{v})}{\Delta x_i} + \sum_i b_i \frac{\Delta v}{\Delta x_i} \zeta \bar{v} + \right.$$

$$\left. + c\zeta |v|^2 \right\} = -h^n \sum_{\Omega''} \sum_{ij} a_{ij} \frac{\Delta v}{\Delta x_j} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta x_i} \zeta +$$

$$+ h^n \sum_{\Omega''} \left\{ - \sum_{ij} a_{ij} \frac{\Delta v}{\Delta x_j} \overset{+i}{v} \frac{\Delta \zeta}{\Delta x_i} + \sum_i b_i \frac{\Delta v}{\Delta x_i} \zeta \bar{v} + c\zeta |v|^2 \right\} + S, \tag{19}$$

где $\overset{+i}{v}(X) = v(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)$., а

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} S^{(ij)} = - \sum_{i,j=1} h_n \sum_{x_j = -h} a_{ij} \frac{\Delta v}{\Delta x_j} \frac{\Delta(\zeta \bar{v})}{\Delta x_i}.$$

Но для $X \in \bar{\Omega}'''$

$$\left| \sum_{ij} a_{ij} \frac{\Delta v}{\Delta x_j} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta x_i} \right| \geqslant \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta v}{\Delta x_i} \right|^2$$

и

$$\left| \sum_{ij} a_{ij} \frac{\Delta v}{\Delta x_j} \overset{+i}{v} \frac{\Delta \zeta}{\Delta x_i} \right| \leqslant c_{13} \sum_{ij} \sqrt{\zeta} \left| \frac{\Delta v}{\Delta x_j} \right| |\overset{+i}{v}| \leqslant$$

$$\leqslant n\, c_{13} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \alpha_2 \zeta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x_i} \right|^2 + \frac{1}{\alpha_2} |\overset{+i}{v}|^2 \right\},$$

где $\alpha_2 > 0$ произвольно.

$$\left|\sum_i b_i \frac{\Delta v}{\Delta x_i} \bar{v}\zeta\right| \leqslant c_{14}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_2\zeta\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 + \frac{n}{\alpha_2}\zeta\,|\,v\,|^2\right\}.$$

Наконец,

$$S = -\,h^n \sum_{i=1}^{n} \sum_{xi=-h} a_{ii} \frac{\overset{+i}{\zeta}}{2}\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 + S_1,$$

$$|S_1| \leqslant c'_{14}h^n \sum_{i=1}^{n} \sum_{x_i=-h} \alpha_2 \overset{+i}{\zeta}\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 + c''_{14}h^n \sum_{\Omega''}\left(\alpha_2\zeta \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 + \frac{1}{\alpha_2}|v|^2\right). \text{*}$$

Подставим эти оценки в (19):

$$\alpha_0 h^n \sum_{\Omega''} \zeta \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 \leqslant h^n \sum_{\Omega''}\left\{(nc_{13} + c''_{14}\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_2\zeta\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 + \frac{1}{\alpha_2}|\,v\,|^2\right] +\right.$$

$$\left. + c_{14}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_2\zeta\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 + \frac{n}{\alpha_2}\zeta\,|\,v\,|^2\right] + c_5\zeta\,|v\,|^2 + \zeta\,|\,v\,|\cdot|\,L_h(v)\,|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_{15}h^n \sum_{\Omega''}\left[\alpha_2\zeta\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta v}{\Delta x_i}\right|^2 + \frac{1}{\alpha_2}|\,v\,|^2 + |\,v\,|\cdot|\,L_h(v)\,|\right],$$

если $2c''_{14}\;\alpha_2 \leqslant \alpha_0$. Беря α_2 столь малым, чтобы $\alpha_0 - c_{15}\alpha_2 > \frac{\alpha_0}{2}$, мы получим неравенство (18).

Если же v_h удовлетворяет уравнению (6), то, подставляя в (18) вместо $L_h(v)$ равную ему величину $\lambda^2 v_h + \psi$, получим:

$$H^{(1)}_{\Omega'}(v) \leqslant c_{15}\,\{\,H_{\Omega''}(v) + |\,\lambda\,|^2\,H_{\Omega''}(v) + H_{\Omega''}\left(\sqrt{|\,v\,\psi\,|}\right)\} \leqslant$$

$$\leqslant c_{16}\,\{\,|\,\lambda\,|^2\,H_{\Omega''}(v) + H_{\Omega''}(\psi)\,\} \leqslant c_{16}\,(c_2 + 1)\;H_{\Omega''}(\psi).$$

Для оценки $H^{(2)}_{\Omega'}(v)$ составляем разностные отношения первого порядка от обеих частей равенства (6):

$$\sum_{ij} \frac{\bar{\Delta}}{\Delta x_i}\left(\overset{+k}{a_{ij}}\frac{\Delta v_k}{\Delta x_j}\right) + \sum_{ij}\frac{\bar{\Delta}}{\Delta x_i}\left(\frac{\Delta a_{ij}}{\Delta x_k}\;v_j\right) + \;\cdots\; = \lambda^2 v_k + \frac{\Delta\psi}{\Delta x_k},$$

где $v_k = \dfrac{\Delta v_h}{\Delta x_i}$.

---

* Это неравенство доказывается на основании равенств:

$$S^{(ii)} = -\,h^n \sum_{x_i=-h}\left(\frac{\zeta + \overset{+i}{\zeta}}{2}\,\frac{\Delta v}{\Delta x_i} + \frac{\bar{v} + \overset{+i}{\bar{v}}}{2}\,\frac{\Delta\zeta}{\Delta x_i}\right) a_{ii}\,\frac{\Delta v}{\Delta x_i},$$

$$\underset{i\neq j}{S^{(i,j)}} = -h^n \sum_{x_i=-h}\left(\zeta\,\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta x_i}\,a_{ij}\,\frac{\Delta v}{\Delta x_j} + \frac{\Delta\zeta}{\Delta x_i}\,\overset{+i}{\bar{v}}\,a_{ij}\,\frac{\Delta v}{\Delta x_j}\right) =$$

$$= h^n \sum_{x_i=-h}\left[\frac{\Delta}{\Delta\bar{x}_j}\left(\frac{\Delta\zeta}{\Delta x_i}\,a_{ij}\right)^{+i,\,-j}\bar{v}\;\cdot v + \frac{\Delta\zeta}{\Delta x_i}\,a_{ij}\,\frac{\Delta\,\overset{+i}{\bar{v}}}{\Delta\bar{x}_j}\;v\right].$$

Умножаем обе части полученного равенства на ζv_k и суммируем по k от 1 до n.

Производя дальнейшие выкладки аналогично только что проведенным, покажем, что

$$H^{(2)}_{\Omega'}(v) \leqslant c_{17}\{|\lambda|^2 H^{(1)}_{\Omega''}(v) + H^{(1)}_{\Omega''}(\psi) + H_{\Omega''}(v)\} \leqslant$$
$$\leqslant c_{18}\{|\lambda|^4 H_{\Omega''}(v) + |\lambda|^2 H_{\Omega''}(\psi) + H^{(1)}_{\Omega''}(\psi)\} \leqslant$$
$$\leqslant c_{19}\{|\lambda|^2 H_{\Omega''}(\psi) + H^{(1)}_{\Omega''}(\psi)\}.$$

Таким же путем получим:

$$H^{(l)}_{\Omega'_h}(v) \leqslant c_{20} \sum_{k=0}^{l-1} |\lambda|^{2(l-1-k)} H^{(k)}_{\Omega''h}(\psi) \leqslant$$
$$\leqslant c_{21} \sum_{k=0}^{l-1} |\lambda|^{2(l-1-k)} H^{(k)}_{\Omega''}(\psi), \quad l = 1, 2, \ldots \left[\frac{n}{2}\right] + 3.$$

Используя неравенство (5), отсюда получаем

$$H^{(l)}_{\Omega'_h}(v) \leqslant c_{21} \cdot c_1 \sum_{k=0}^{l-1} |\lambda|^{2(l-1-k)} |\lambda|^{-2\left[\frac{n}{2}\right]-8+2k} =$$
$$= c_{21} \cdot c_1 \cdot l\,|\lambda|^{2l-10-2\left[\frac{n}{2}\right]} = c_{22}|\lambda|^{2l-10-2\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad l = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 3. \tag{20}$$

Теорема вложения С. Л. Соболева [см. ([2]), стр. 64—67], распространенная на конечные разности [см. ([3])], доказывает, что из неравенств (20) следуют равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность семейств функций

$$v_h, \ \frac{\Delta v_h}{\Delta x_i}, \ \frac{\Delta^2 v_h}{\Delta x_i \Delta x_j} \quad \left(h = \frac{1}{2^m}, \ m \to \infty\right)$$

на решетках Ω'_h и неравенства:

$$\left|\frac{\Delta^m v}{\Delta x_i^{m_i} \Delta x_j^{m_j}}\right| \leqslant c_{23} \left[H^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1+m\right)}_{\Omega'_h}(v)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant c_{23}\sqrt{c_{22}}\,|\lambda|^{-4+m}, \quad m = 0, 1, 2, \tag{21}$$

для любой внутренней подобласти Ω' области Ω.

Выбираем из последовательностей функций v_h, $\frac{\Delta v_h}{\Delta x_i}$, $\frac{\Delta^2 v_h}{\Delta x_i \Delta x_j}$ подпоследовательности *, сходящиеся равномерно в каждой внутренней подобласти области Ω к некоторым непрерывным функциям v, $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$. Предельная функция v удовлетворяет уравнению (5).

---

* Ниже будет доказана теорема единственности задачи Дирихле для уравнения (5), из которой будет следовать равномерная для каждой подобласти области Ω сходимость всей последовательности v_h к v.

Кроме того, для нее имеет место неравенство (21):

$$\left|\frac{\partial^m v(X)}{\partial x_i^{m_i}\,\partial x_j^{m_j}}\right| \leqslant c_{23}\sqrt{c_{22}}\,|\lambda|^{-4+m} = c_{24}\,|\lambda|^{-4+m}, \quad m=0,1,2,$$

причем c_{24}, вообще говоря, безгранично растет по мере приближения точки X к границе Ω и может быть фиксировано для любой строго внутренней подобласти Ω.

§ 3. Исследуем теперь поведение решения v на границе Γ области Ω. Прежде всего установим, что функция v принадлежит к так называемому классу $\overset{0}{D}$. Любая функция w этого класса обладает первыми обобщенными производными, суммируемыми, как и сама функция, со второй степенью по области Ω. Кроме того, существует последовательность гладких функций w_{δ_m}, обращающихся в нуль в контурной полосе ширины δ_m, таких, что

$$H_\Omega(w - w_{\delta_m}) + D_\Omega(w - w_{\delta_m}) \to 0 \text{ при } \delta_m \to 0.$$

Совокупность функций типа w_{δ_m} назовем классом $\overset{0}{D}$.

Область Ω считаем гомеоморфной n-мерному шару с конечным числом ручек. Границу Γ нашей области предполагаем следующей: существует последовательность сужающихся до нуля контурных полос Ω_{δ_m} ширины δ_m таких, что каждая из них может быть заключена в конечное число, не превосходящее фиксированного числа N, криволинейных параллелепипедов $\Omega^k_{\delta_m}$, определяемых координатами $0 \leqslant \mu_i < c'$ *. Нижние основания $\mu_1 = 0$ области $\Omega^k_{\delta_m}$ лежат на границе Γ, а верхние определяются уравнениями $\mu_1 = c_{km}\,\delta_m \leqslant c''\,\delta_m$, причем $\Omega \cap \sum\limits_k \Omega^k_{\delta_m}$ заключается в полосе $\Omega_{2\delta_m}$. Кроме того, $\left|\frac{\partial \mu_k}{\partial x_m}\right| < c'''$, а якобианы $\frac{D(\mu_1, \ldots, \mu_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ ограничены сверху и снизу положительными константами, не зависящими, как и константы c', c'', c''', от δ_m.

Функцию v_h, определенную ранее лишь на точках решетки Ω_h, распространим на всю область полилинейным способом, так что полученная функция (обозначим ее через $\widetilde{v}_h$) будет непрерывной в области $\overline{\Omega}_h$ и равной нулю на границе этой области.

Вне области Ω_h функцию $\widetilde{v}_h$, так же как и предельную функцию v, положим равной нулю. Нетрудно показать, что функция $\widetilde{v}_h$ обладает обобщенными производными первого порядка, равными $\frac{\partial \widetilde{v}_h}{\partial x_k}$ внутри кубов решетки Ω_h, и что

---

* Функции $\mu_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots n$, вообще говоря, зависят от значков «k» и «m», но мы их опустили для упрощения записи.

$$\int\limits_{\Omega_h} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \widetilde{v}_h}{\partial x_k} \right|^2 d\Omega \leqslant c_{25}\, h^n \sum_{\Omega_h} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\Delta v_h}{\Delta x_k} \right|^2,$$

где константа c_{25} не зависит ни от области Ω_h, ни от h, ни от функции v_h.

Возьмем один из вышеупомянутых параллелепипедов $\Omega^k_{\delta_m}$. Тогда:

$$\widetilde{v}_h(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \widetilde{v}_h(\mu_1^0, \ldots, \mu_n) + \int\limits_{\mu_1^0}^{\mu_1} \frac{\partial \widetilde{v}_h}{\partial \mu_1}\, d\mu_1,$$

где μ_1^0 — наибольшее значение μ_1, при котором координатная линия μ_1 пересекает границу области Ω_h. Отсюда

$$|\widetilde{v}_h(\mu_1, \ldots, \mu_n)|^2 \leqslant c'' \delta_m \int\limits_{\mu_1^0}^{\mu} \left| \frac{\partial \widetilde{v}_h}{\partial \mu_1} \right|^2 d\mu_1.$$

Проинтегрируем это неравенство по куску гиперповерхности $\mu_1 = \mu_1'$, лежащему в $\Omega^{kh}_{\delta_m} = \Omega^k_{\delta_m} \cap \Omega_h$, который обозначим через S_{kmh}:

$$\int\limits_{S_{kmh}} |\widetilde{v}_h|^2\, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant c'' \delta_m \int\limits_{\Omega^{kh}_{\delta_m}} \left| \frac{\partial \widetilde{v}_h}{\partial \mu_1} \right|^2 d\mu_1 \cdots d\mu_n \leqslant$$

$$\leqslant c_{26}\, \delta_m\, h^n \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta v_h}{\Delta x_i} \right|^2 \leqslant c_{27}\, \delta_m.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого h, то возможен переход к пределу при $h \to 0$, в результате чего получим:

$$\int\limits_{S_{km}} |v|^2\, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant c_{27}\, \delta_m. \tag{22}$$

При помощи (22) установим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega^k_{\delta_m}} |v|^2\, d\mu_1 \ldots d\mu_n \leqslant c_{28}\, \delta_m^2\, \varepsilon_k(\delta_m), \tag{23}$$

где $\varepsilon_k(\delta_m) \to 0$ при $\delta_m \to 0$.

Действительно,

$$v(\mu_1, \ldots, \mu_n) = v(\mu_1', \ldots, \mu_n) + \int\limits_{\mu_1'}^{\mu_1} \frac{\partial v}{\partial \mu_1}\, d\mu_1,$$

$$|v(\mu_1, \ldots, \mu_n)|^2 \leqslant 2\, |v(\mu_1', \ldots, \mu_n)|^2 + 2c'' \delta_m \int\limits_{\mu_1'}^{\mu_1} \left| \frac{\partial v}{\partial \mu_1} \right|^2 d\mu_1.$$

Проинтегрируем это неравенство по гиперповерхности $\mu_1 = \text{const}$, устремим $\mu_1' \to 0$ и затем проинтегрируем по μ_1 от 0 до $c_{km}\, \delta_m$:

$$\int\limits_{\Omega^k_{\delta_m}} |v|^2\, d\mu_1 \ldots d\mu_n \leqslant 2c''^2\, \delta_m^2 \int\limits_{\Omega^k_{\delta_m}} \left| \frac{\partial v}{\partial \mu_1} \right|^2 d\mu_1 \ldots d\mu_n \leqslant c_{29}\, \delta_m^2 \int\limits_{\Omega^k_{\delta_m}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dX,$$

и так как $D_\Omega(v) < \infty$, то интеграл, стоящий в левой части,

$$\varepsilon(\delta_m) = N \int\limits_{\Omega_{2\delta_m}} \sum_i \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dX \geqslant \sum_k \int\limits_{\Omega^k_{\delta_m}} \sum_i \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dX = \sum_k \varepsilon_k(\delta_m)$$

стремится к нулю при $\delta_m \to 0$. Собирая неравенства (23) по всем k, мы получим:

$$\int\limits_{\Omega_{\delta_m}} |v|^2 \, dX \leqslant c'_{28} \delta_m^2 \varepsilon(\delta_m). \tag{24}$$

Возьмем теперь вспомогательную функцию H_{δ_m}, обладающую следующими свойствами *:

$$H_{\delta_m} = \begin{cases} 0 & \text{в } \Omega_{\delta_m}, \\ 1 & \text{в } \Omega - \Omega_{2\delta_m}, \\ 0 \leqslant H_{\delta_m} \leqslant 1 & \text{в } \Omega_{2\delta_m} - \Omega_{\delta_m}. \end{cases}$$

Первые производные $\frac{\partial H_{\delta_m}}{\partial x_i}$ непрерывны в Ω и удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial H_{\delta_m}}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_{30}}{\delta_m}.$$

Докажем, наконец, что функции $v_m = vH_{\delta_m}$ сходятся по норме H и D к функции v, именно:

$$H_\Omega(v - v_m) \to 0 \text{ и } D_\Omega(v - v_m) \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{25}$$

---

* H_δ можно построить следующим образом:

Функции $x_k = x_k(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $k = 1, \ldots, n$, отображают взаимно однозначно параллелепипед $0 \leqslant \mu_i \leqslant c_i$ на область Ω^k_δ. Расширим это отображение, доопределив нашу систему функций на параллелепипед $-\delta \leqslant \mu_i \leqslant c_i + \delta$ так, чтобы $x_i(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ по-прежнему имели непрерывные первые производные (можно допустить конечные разрывы производных на конечном числе гладких поверхностей), причем

$$\left|\frac{\partial x_k}{\partial \mu_i}\right| \leqslant c^{(IV)}, \quad 0 < c^{(V)} \leqslant \frac{D(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \leqslant c^{(VI)}.$$

Образ расширенного параллелепипеда обозначим через $\widetilde{\Omega}^k_\delta$. Очевидно, что $\Omega^k_\delta \subset \widetilde{\Omega}^k_\delta$. Возьмем функцию

$$H^k_{\delta_l}(\mu) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \mu \leqslant c_l, \\ \sin^2 \frac{\mu\pi}{2\delta}, & -\delta \leqslant \mu \leqslant 0, \\ \sin^2 \frac{\pi(\mu - c_l)}{2\delta}, & c_l \leqslant \mu \leqslant c_l + \delta \end{cases}$$

и функцию

$$H^k_\delta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{вне } \widetilde{\Omega}^k_\delta, \\ \prod\limits_{l=1}^{n} H^k_{\delta_l}(\mu_l(x_1, \ldots, x_n)) & \text{в } \widetilde{\Omega}^k_\delta. \end{cases}$$

Так как $\Omega_\delta \subset \sum\limits_{k=1}^{N_1} \Omega^k_\delta \cap \Omega \subset \Omega_{2\delta}$, то $H_\delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{k=1}^{N} H^k_\delta(x_1, \ldots, x_n)$ будет удовлетворять поставленным требованиям.

Первый предел очевиден.

$$D(v - v_m) = \int_\Omega \sum_i \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} H_{\delta_m} - v \frac{\partial H_{\delta_m}}{\partial x_i} \right|^2 d\Omega,$$

но

$$\int_\Omega | v_{x_i} - v_{x_i} H_{\delta_m} |^2 d\Omega \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

и

$$\int_\Omega | v |^2 \left| \frac{\partial H_{\delta_m}}{\partial x_i} \right|^2 d\Omega \leqslant \int_{\Omega_{2\delta_m}} | v |^2 \frac{c_{30}^2}{\delta_m^2} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 4c_{30}^2 c'_{28} \varepsilon (2\delta_m) \to 0 \qquad \text{при} \quad \delta_m \to 0.$$

Итак, соотношения (25) доказаны, а следовательно, установлено, что

$$v \in \overset{0}{D}.$$

Дадим теперь оценку функции v во всей области Ω. Для этого используем фундаментальное решение $\Gamma(X, \Xi)$ для оператора M, сопряженного с L_1, где

$$L_1(v) \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + (c - \lambda_1^2) v, \quad c(X) - \lambda_1^2 \leqslant 0,$$

построенное Е. Леви ([4]):

$$\Gamma(X, \Xi) = \frac{1}{\rho^{n-2}(X, \Xi)} + \int_\Omega \frac{1}{\rho^{n-2}(X, \Xi')} \Phi(\Xi', \Xi) \, d\Xi',$$

где

$$\rho^2(X, \Xi) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(X)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j),$$

матрица $(A_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$, а функция $\Phi(\Xi', \Xi)$ имеет непрерывные производные двух порядков (при наших предположениях относительно коэффициентов Φ обладает непрерывными производными и более высокого порядка, но для нас сейчас это несущественно) везде, за исключением $\Xi = \Xi'$. В окрестности точки $\Xi = \Xi'$

$$| \Phi(\Xi', \Xi) | \leqslant \frac{c_{31}}{r^{n-1}(\Xi', \Xi)}, \qquad r^2(\Xi', \Xi) = \sum_{i=1}^n (\xi_i' - \xi_i)^2.$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\left.\begin{aligned} &| \Gamma(X, \Xi) | \leqslant \frac{c_{32}}{r^{n-2}(X, \Xi)} \quad \text{для } X, \Xi \in \Omega \\ &\text{и} \\ &\Gamma(X, \Xi) \geqslant \frac{1}{2\rho^{n-2}} \geqslant \frac{c_{33}}{r^{n-2}} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

в достаточно малой окрестности $X = \Xi$.

Построим теперь функцию Грина для L_1 и нулевых граничных условий:

$$G(X, \Xi) = \Gamma(X, \Xi) + \mathfrak{G}(X, \Xi).$$

Поведение функции G на контуре такое же, как и функции v. Именно, если взять какую-нибудь непрерывно дифференцируемую функцию $\Gamma'(X, \Xi)$, равную $\Gamma(X, \Xi)$ везде за исключением малой окрестности точки Ξ, целиком лежащей внутри Ω, то функция $G' = \Gamma' + \mathfrak{G}$ принадлежит $\overset{0}{D}$.

Кроме того, имеет место неравенство

$$0 \leqslant G(X, \Xi) \leqslant \frac{c_{34}}{r^{n-2}(X, \Xi)}, \tag{26'}$$

несмотря на то, что функция G может и не принимать предельных значений, равных нулю, в точках излома контура. Неравенство (26′) справедливо в силу устойчивости задачи Дирихле для $M(v) = 0$ в Ω извне ([5]), справедливости принципа максимума для решений уравнения $M(v) = 0$ и неравенств (26).

Покажем, что найденное выше решение v уравнения

$$L_1(v) = (2i\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2)\, v + \psi \equiv \mu v + \psi, \qquad v \in \overset{0}{D}, \tag{4}$$

может быть представлено в виде

$$v(\Xi) = \varkappa_n(\Xi) \int_\Omega G(X, \Xi)\, [\mu v(X) + \psi(X)]\, dX, \tag{27}$$

где

$$|\varkappa_n(\Xi)| \leqslant c_{35}.$$

Доказательство равенства (27) проводится обычным образом, надо лишь обосновать, что контурный интеграл пропадет за счет граничных условий на G и v, не делая при этом никаких предположений относительно поведения первых производных G и v на контуре Γ.

Итак, покажем лишь, что

$$\int_\Omega L_2(w) \cdot v\, d\Omega \equiv \int_\Omega \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j}\right) v\, d\Omega = -\int_\Omega \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j}\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\Omega, \tag{28}$$

если $v \in \overset{0}{D}$, а $D(w) + H(L_2(w)) < \infty$.

Возьмем $v_{\delta_m} = v \cdot H_{\delta_m}$. Очевидно, что

$$\int_\Omega L_2(w) \cdot v_{\delta_m}\, d\Omega = -\int_\Omega \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j}\, \frac{\partial v_{\delta_m}}{\partial x_i}\, d\Omega.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\delta_m \to 0$, мы установим (28).

Обозначим k-раз итерированную функцию Грина G через G_k. Ввиду (26) [см. ([6]), стр. 234—237],

$$\int_\Omega G^2_{\left[\frac{n}{4}\right]+1}(X, \Xi)\, dX \leqslant c_{36}.$$

Из равенства (27) найдем:

$$v = \varkappa_n \int_\Omega G(\mu v + \psi) d\Omega = \varkappa_n^2 \mu^2 \int_\Omega G_2 v d\Omega + \varkappa_n^2 \mu \int_\Omega G_2 \psi d\Omega +$$

$$+ \varkappa_n \int_\Omega G\psi d\Omega = \cdots = \varkappa_n^k \mu^k \int_\Omega G_k v d\Omega + \varkappa_n^k \mu^{k-1} \int_\Omega G_k \psi d\Omega + \cdots + \varkappa_n \int_\Omega G\psi d\Omega. \quad (29)$$

Возьмем в (29) $k = \left[\frac{n}{4}\right] + 1$. Тогда

$$\left| \int_\Omega G_{\left[\frac{n}{4}\right]+1} v d\Omega \right| \leqslant \left\{ \int_\Omega G^2_{\left[\frac{n}{4}\right]+1} d\Omega \cdot \int_\Omega |v|^2 d\Omega \right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{c_{36} c_2} \, \frac{\sqrt{H(\psi)}}{|\lambda|}.$$

Оценивая в остальных членах (29) функцию ψ по модулю, получим:

$$|v| \leqslant c_{37} |\lambda|^{2\left[\frac{n}{4}\right]+1} \max|\psi| \leqslant c_1 \cdot c_{37} |\lambda|^{2\left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] - 3} \leqslant c_{38} |\lambda|^{-3}. \quad (30)$$

Оценка (30), в противоположность оценке (21) § 2, справедлива уже во всей области $\overline{\Omega}$.

Относительно поведения функции v на границе можно утверждать, что она принимает нулевые предельные значения во всех регулярных точках границы Γ ([5]).

Оценку первых производных во всей области Ω можно было бы провести аналогично только что приведенной оценке для самой функции v, если предположить, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_i} G(X, \Xi) \right| \leqslant \frac{c_{39}}{r^{n-1}}$$

при любом расположении X и Ξ в области Ω.

§ 4. Возвратимся к решению смешанной задачи для гиперболического уравнения. Решая уравнение (4), мы нашли функцию $v(X, \lambda)$, являющуюся аналитической функцией $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ в полуплоскости $\lambda_1 \geqslant \lambda_0' > 0$ и удовлетворяющую неравенствам

$$|v| \leqslant c_{38} |\lambda|^{-3} \text{ в } \overline{\Omega},$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \leqslant c_{24} |\lambda|^{-3} \text{ в } \Omega' \subset \Omega, \quad (31)$$

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leqslant c_{24} |\lambda|^{-2} \text{ в } \Omega' \subset \Omega.$$

Кроме того, было показано, что

$$\int_{S_{km}} |v|^2 d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant c_{26} \delta_m D_\Omega(v) \leqslant c_{40} \delta_m |\lambda|^{-2\left[\frac{n}{2}\right]-8}. \quad (32)$$

Благодаря оценкам (31) интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} v(X, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda = u(X, t)$$

существует для $X \in \Omega$ и $-\infty < t < \infty$, причем $u(X, t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$ и

$$v(X, \lambda) = \int_0^\infty u(X, t)\, e^{-\lambda t}\, dt.$$

Кроме того, функция $u(X, t)$ обладает непрерывными первыми и вторыми производными по x_i и t и

$$\frac{\partial^l u}{\partial x_i^{l_i} \partial x_j^{l_j}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} \frac{\partial^l v}{\partial x_i^{l_i} \partial x_j^{l_j}}\, e^{\lambda t}\, d\lambda,$$

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} \lambda^l v e^{\lambda t}\, d\lambda, \qquad l = 1, 2.$$

Отсюда сразу следует, что функция $u(X, t)$ есть решение уравнения (1) и удовлетворяет нулевым начальным условиям.

Граничные условия функция u принимает «в среднем», т. е.

$$\int_{S_{km}} u^2 d\mu_2 \ldots d\mu_n = \frac{e^{2\lambda_1 t}}{4\pi^2} \int_{S_{mk}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} v e^{i\lambda_2 t}\, d\lambda_2 \right\} d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{2\lambda_1 t}}{4\pi^2} \int_{S_{km}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{-2}\, d\lambda_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 |v|^2\, d\lambda_2 \right\} d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant$$

$$\leqslant c_{41} e^{2\lambda_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \int_{S_{km}} |v|^2 d\mu_2 \ldots d\mu_n d\lambda_2 \leqslant$$

$$\leqslant c_{41} \cdot c_{40} \delta_m e^{2\lambda_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{-2\left[\frac{n}{2}\right] - 6} d\lambda_2 \leqslant c_{42} \delta_m e^{2\lambda_1 t}. \tag{33}$$

Из этого неравенства, так же как это сделано в § 3, установим, что для любого конечного интервала $[0, T]$ изменения t функция $u(X, t)$ может быть равномерно по $t \in [0, T]$ приближена функциями $u_{\delta_m} = u \cdot H_{\delta_m}$ по норме H и D.

Действительно, интеграл $D_\Omega(u)$ ограничен для любого конечного интервала изменения t, так как

$$\int_\Omega \sum_i u_{x_i}^2 d\Omega = \frac{e^{2\lambda_1 t}}{4\pi^2} \int_\Omega \sum_i \left[\int_{-\infty}^{\infty} v_{x_i} e^{i\lambda_2 t} d\lambda_2 \right]^2 d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{2\lambda_1 t}}{4\pi^2} \int_\Omega \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{-2} d\lambda_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i |v_{x_i}|^2 |\lambda|^2\, d\lambda_2 \right\} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant c_{43} e^{2\lambda_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 D_\Omega(v)\, d\lambda_2 \leqslant c_{44} e^{2\lambda_1 t}.$$

и $D_{\Omega_1}(v)^{-\infty}$ есть непрерывная функция t для любой части Ω_1 области Ω, ибо

$$\left|\int_{\Omega_1} u^2_{x_i}(X,t)\,d\Omega - \int_{\Omega_1} u^2_{x_i}(X,t_1)\,d\Omega\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{\Omega_1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} v_{x_i}(e^{\lambda t}-e^{\lambda t_1})\,d\lambda_2\cdot\int_{-\infty}^{\infty} v_{x_i}(e^{\lambda t}+e^{\lambda t_1})\,d\lambda_2\right\}d\Omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_{\Omega_1}\left|\int_{-\infty}^{\infty} v_{x_i}(e^{\lambda t}-e^{\lambda t_1})\,d\lambda_2\right|^2 d\Omega\int_{\Omega_1}\left|\int_{-\infty}^{\infty} v_{x_i}(e^{\lambda t}+e^{\lambda t_1})\,d\lambda_2\right|^2 d\Omega\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_{\Omega_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^{-2}\,d\lambda_2\int_{-\infty}^{\infty}|v_{x_i}|^2\,|e^{\lambda t}-e^{\lambda t_1}|^2\,|\lambda|^2\,d\lambda_2\right]d\Omega\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{\Omega_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^{-2}\,d\lambda_2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|v_{x_i}|^2\,|e^{\lambda t}+e^{\lambda t_1}|^2\,|\lambda|^2\,d\lambda_2\right]d\Omega\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_{45}e^{\lambda_1(t+t_1)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^{-2}\,|e^{\lambda t}-e^{\lambda t_1}|^2\,d\lambda_2\right\}^{1/2} \to 0 \text{ при } |t-t_1|\to 0.$$

Итак, при любом фиксированном t

$$D_{\Omega_{\delta_m}}(u) = \varepsilon(\delta_m, t) \to 0 \text{ при } m\to\infty$$

(т. е. при $\delta_m \to 0$) и $\varepsilon(\delta_m, t)$ есть непрерывная функция t. А тогда для любого конечного интервала $(0, T)$ изменения времени t можно утверждать существование такой подпоследовательности δ_{m_k}, для которой

$$\varepsilon(\delta_{m_k}, t) < \varepsilon_k \quad \text{при} \quad t\in[0, T],$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — произвольно взятая последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю.

Следовательно, благодаря (33), мы получим, так же как и в § 3, что

$$\int_{\Omega_{\delta_{m_k}}} u^2\,d\Omega \leqslant c_{46}\delta^2_{m_k}\varepsilon_k,$$

а отсюда $D(u-u_{\delta_{m_k}}) + H(u-u_{\delta_{m_k}}) \to 0$ при $k\to\infty$.

Будем говорить, что функция u принадлежит к классу $\overset{0}{D}$ на любом конечном интервале изменения времени t. Согласно замечанию, сделанному в конце § 3, можно утверждать, что функция $u(X, t)$ принимает нулевые предельные значения во всех регулярных точках границы.

В отношении функции $\frac{\partial u(X, t)}{\partial t}$ можно показать то же, что и для $u(X, t)$, именно:

$$H_\Omega(u_t) + D_\Omega(u_t) \leqslant c_{47}e^{2\lambda_1 t} \quad \text{и} \quad u_t\in\overset{0}{D}$$

на любом конечном интервале изменения t.

Легко проверить, что

$$H_\Omega(u_{tt}) \leqslant c_{48}e^{2\lambda_1 t}.$$

Докажем, наконец, теорему единственности.

ТЕОРЕМА. *Пусть функция* $u(X, t)$ *имеет непрерывные вторые производные в цилиндре* $\Omega \times T\ (X \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, *при* $t = 0$ *и* $X \in \Omega$ $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ *и удовлетворяет уравнению* (1) *с* $\varphi \equiv 0$. *Если, кроме того, функции* u *и* u_t *принадлежат классу* $\overset{0}{D}$ *для* $t \in [0, T]$ *и* $H_\Omega(u_{tt}) < c$, *то* $u \equiv 0$ *в цилиндре* $\Omega \times T$.

Доказательство. Возьмем $u_k = u \cdot H_{\delta_{m_k}}(X)$; тогда

$$0 = \int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_0^{t_1} \frac{\partial u_k}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u)\right] dt = \iint\limits_{\Omega \times t_1} \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) d\Omega\, dt + \iint\limits_{\Omega \times t_1}\left\{\sum_i b_i \frac{\partial u_k}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i} + c\frac{\partial u_k}{\partial t} u\right\} d\Omega\, dt +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega \times t_1}\left\{\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{ij} a_{ij}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} d\Omega\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(\text{для } t = t_1)}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} d\Omega +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega \times t_1}\left\{\sum_i b_i \frac{\partial u_k}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i} + c\frac{\partial u_k}{\partial t} u\right\} d\Omega dt + \iint\limits_{\Omega \times t_1}\left\{\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{ij} a_{ij}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} d\Omega dt \qquad (t_1 \in [0, T]).$$

Устремляя $k \to \infty$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(t = t_1)}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} d\Omega_j + \iint\limits_{\Omega \times t_1}\left\{\sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i} + c\frac{\partial u}{\partial t} u\right\} d\Omega\, dt = 0.$$

Отсюда найдем, что

$$\frac{dy(t)}{dt} \leqslant c_{49}\, y(t), \tag{34}$$

где

$$y(t) = \iint\limits_{\Omega \times t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right\} d\Omega dt.$$

Подставим в (34) вместо $y(t) = e^{c_{49} t} z(t)$:

$$e^{c_{49} t}\frac{dz}{dt} + c_{49} e^{c_{49} t} z \leqslant c_{49} e^{c_{49} t} z,$$

откуда $\frac{dz}{dt} = 0$, следовательно, $y(t) = e^{c_{49} t} z(0) = 0$.

Теорема единственности задачи Дирихле для эллиптического уравнения в классе функций $\overset{0}{D}$ легко доказывается на основании равенства (28) § 3.

Поступило
24. X. 1950

ЛИТЕРАТУРА

1 Ладыженская О., О решении смешанной задачи для гиперболических уравнений, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXXIII, № 4 (1950), 647—650.
2 Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ (1950), § 8.
3 Ладыженская О., Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей, Уч. записки ЛГУ, в. 23, 1951.
4 Леви Е. Е., О линейных эллиптических уравнениях в частных производных, Успехи матем. наук, т. VIII (1941), 249—292.
5 Олейник О., О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа, Матем. сб., т. 24 (66) : 1 (1949), 3—14.
6 Соболёв С. Л., Уравнения математ. физики, М.— Л., ОГИЗ, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 563—580

Г. М. ГИНЗБУРГ

ОБ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия единственности предельных распределений для $t \to \infty$, определяемых стохастическим уравнением

$$\Delta y = A(y)\,\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad Ef^2(\alpha, y) = B(y),$$

если функции $A(y)$ и $B(y)$ — аналитические функции от y на всей вещественной оси.

Введение

В работах (1), (2) С. Н. Бернштейн определил условия существования предельных законов распределения

$$P(y, t) = \lim_{n\to\infty} P_n(y, t) \text{ и } P(y) = \lim_{t\to\infty} P(y, t),$$

где $P_n(y, t)$ для фиксированного

$$t = t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i$$

определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$\Delta y_i = A(y_i, t_i, \Delta t_i, \alpha_{t_i})\cdot\Delta t_i + f(y_i, t_i, \Delta t_i, \alpha_{t_i})\sqrt{\Delta t_i}. \qquad (1)$$

Для $t \to \infty$ доказано следующее основное предложение:

ТЕОРЕМА С. Н. Бернштейна. *Если при любом сколько угодно большом t имеет место неравенство $E|y_n|^\lambda \leqslant L$ и $A(y)$, $B(y) = Ef^2(\alpha, y)$ — функции только от y, то всегда существует предельное распределение для $t \to \infty$ и оно удовлетворяет уравнению*

$$(A'P)^{(-2)} - \left[\left(A + \frac{1}{2}B'\right)P\right]^{(-1)} + \frac{1}{2}PB = ay + b. \qquad (2)$$

Если, кроме того, $B(y) > 0$, то предельное распределение единственно и определяется формулой

$$\frac{dP}{dy} = p(y) = \frac{C}{B(y)}\, e^{2\int \frac{A}{B}\,dy}, \qquad (3)$$

где C — константа нормирования.

Если $B(y) = 0$ для некоторых значений y, то во всех остальных точках или $p(y) = 0$, или $p(y)$ определяется также по формуле (3). *Первый случай имеет место, в частности, если $A(y) = 0$ одновременно с $B(y)$.*

В работах [3], [4] мы исследовали поведение предельной функции распределения $P(y)$ в случае, если дисперсионная функция $B(y)$ обращается в нуль в некоторых точках или интервалах и вывели достаточные условия ее единственности для некоторых частных случаев расположения нулей функций $A(y)$ и $B(y)$.

В предлагаемой статье мы обобщим полученные ранее результаты и выведем необходимые и достаточные условия единственности предельных распределений при любом расположении нулей аналитических функций $A(y)$ и $B(y)$. Для связности изложения в статье, по мере необходимости, приводятся доказанные ранее теоремы.

§ 1

1. Предположим, что условия теоремы С. Н. Бернштейна выполнены и существует предельное распределение, удовлетворяющее уравнению

$$(A'P^{(-2)}-\left[\left(A+\frac{1}{2}B'\right)P\right]^{(-1)}+\frac{1}{2}PB=ay+b, \tag{2}$$

где функции $A(y)$ и $B(y)$ дифференцируемы и $B(y)\geqslant 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Если в точке y_s $B(y_s)=0$, $A(y_s)\neq 0$, то предельная функция распределения $P(y)$ непрерывна и дифференцируема в этой точке и $P'(y_s)=0$. Кроме того, $P'(y)$ непрерывна в точке y_s.*

Доказательство. Интегрируем первые два члена уравнения (2) от y_s до y, где $y\gtrless y_s$; получим

$$(A'P)^{(-2)}-\left[\left(A+\frac{1}{2}B'\right)P\right]^{(-1)}+\frac{1}{2}PB=a(y-y_s). \tag{2'}$$

Деля (2') на $y-y_s$ и переходя к пределу справа и слева при $y\to y_s$, получим, в силу условия $B'(y_s)=0$,

$$a=-(AP)_{y_s+0}=-(AP)_{y_s-0},$$

т. е. при $A(y_s)\neq 0$ функция $P(y)$ непрерывна в точке y_s.

Разделим уравнение

$$(A'P)^{(-2)}-\left[\left(A+\frac{1}{2}B'\right)P\right]^{(-1)}+\frac{1}{2}PB=-(AP)_{y_s}\cdot(y-y_s) \tag{2''}$$

на $(y-y_s)^2$; переходя к пределу справа в точке y_s, получим:

$$\frac{1}{2}(A'P)_{y_s+0}=\lim_{y\to y_s+0}\frac{AP-(AP)_{y_s}}{2(y-y_s)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to y_s+0}\frac{P(y)\,[A(y)-A(y_s)]+A(y_s)\,[P(y)-P(y_s)]}{y-y_s},$$

откуда при $A(y_s)\neq 0$

$$\lim_{y\to y_s+0}\frac{P(y)-P(y_s)}{y-y_s}=0,$$

т. е. в точке y_s существует правая производная от $P(y)$, равная нулю Аналогично, в этой точке существует левая производная, равная нулю, что и доказывает первую часть теоремы.

Докажем теперь, что $P'(y)$ непрерывна в точке y_s. Действительно, в соседних с y_s точках

$$P'(y) = \frac{C_i}{B(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy} \quad (i = 1, 2), \tag{3'}$$

где постоянные C_i имеют, вообще говоря, различные значения в интервалах справа и слева от y_s до ближайших нулей $B(y)$ или до $\pm\infty$. Если $C_i = 0$ $(i = 1, 2)$, т. е. $p(y) = 0$ как справа, так и слева от точки y_s, то справедливость утверждения очевидна. В дальнейшем будет показано, что при условиях теоремы хотя бы одно из C_i действительно равно нулю. Докажем, что предел производной при $y \to y_s$ по интервалу, для которого $C_i \neq 0$, также равен нулю.

Из существования производной в точке y_s вытекает, что для нее имеет место равенство

$$-AP' + \frac{1}{2}\frac{d}{dy}(BP') = 0,$$

и так как $P'(y_s) = 0$, то

$$\frac{d}{dy}(BP')_{y=y_s} = \lim_{y \to y_s} \frac{C_i e^{2\int \frac{A}{B} dy}}{y - y_s} = \lim_{y \to y_s} 2A(y) \cdot \lim_{y \to y_s} \frac{C_i}{B(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy} =$$

$$= 2A(y_s) \cdot \lim_{y \to y_s} p(y) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{y \to y_s} p(y) = p(y_s).$$

2. Перейдем к исследованию существования производных высших порядков от функции распределения $P(y)$ в предположении, что $A(y)$ и $B(y)$ — аналитические функции. Докажем, что в точке y_s при условиях $B(y_s) = 0$, $A(y_s) \neq 0$ существуют производные любого порядка от $P(y)$ и

$$P^{(m)}(y_s) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Докажем предварительно несколько вспомогательных предложений.

ЛЕММА 1. *Пусть в точке y_s $B(y_s) = 0$, $A(y_s) \neq 0$. В этом случае при $A(y_s) < 0$ $p(y) \equiv 0$ в интервале (y_s, y_1), где y_1 — ближайший к y_s справа нуль функции $B(y)$ или $y_1 = +\infty$; при $A(y_s) > 0$ $p(y) \equiv 0$ в интервале (y_2, y_s), где y_2 — ближайший к y_s слева нуль функции $B(y)$ или $y_2 = -\infty$.*

Случаи $y_{1,2} = \pm\infty$ имеют место, если y_s является крайним правым или левым нулем функции $B(y)$.

Доказательство. Пусть $A(y_s) < 0$ при $y_s \leqslant y < y_1$; тогда из уравнения

$$\int_{y_s}^{y} (A'P)\,dy - \left[\left(A + \frac{1}{2}B'\right)P\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dy}(PB) = -(AP)_{y_s} \tag{2'''}$$

для рассматриваемого интервала имеем

$$-\int_{y_s}^{y}(AP')\,dy+\frac{1}{2}BP'=0$$

и из условия $BP'\geqslant 0$ следует наше утверждение.

Если $A(y)$ меняет знак в некоторой точке $\bar{y}$, $y_s<\bar{y}<y_1$, то в интервале $(y_s, \bar{y})$, а следовательно, и в интервале (y_s, y_1) имеем: $p(y)\equiv 0$.

Аналогично доказывается вторая часть леммы.

Следствие. Если y_s и y_{s+1} — два соседних нуля функции $B(y)$ и в этих точках функция $A(y)$ принимает значения, отличные от нуля и одинакового знака, то в замкнутом интервале $[y_s, y_{s+1}]$ $p(y)\equiv 0$.

ЛЕММА 2. *Если аналитические функции $A(y)$ и $B(y)$ удовлетворяют в точке y_s условиям: $B(y_s)=0$, $A(y_s)<0$ $(A(y_s)>0)$, то функция*

$$e^{2\int\frac{A}{B}dy} \tag{4}$$

стремится к нулю при $y\to y_s-0$ $(y\to y_s+0)$ быстрее любой положительной степени $(y-y_s)$.

Доказательство. Допустим, что в точке y_s функция $B(y)$ имеет нуль кратности $2k$ и $A(y_s)<0$. В окрестности точки y_s функцию $\frac{A(y)}{B(y)}$ можно представить в виде

$$\frac{A(y)}{B(y)}=\frac{A(y)}{(y-y_s)^{2k}\cdot B_1(y)}=\frac{a_0}{(y-y_s)^{2k}}+\frac{a_1}{(y-y_s)^{2k-1}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{a_{2k-2}}{y-y_s}+\frac{a_{2k-1}}{y-y_s}+b_0+b_1(y-y_s)+\cdots,$$

где

$$a_0=\frac{A(y_s)}{B_1(y_s)}<0.$$

Отсюда следует:

$$e^{2\int\frac{A}{B}dy}=$$

$$=(y-y_s)^{2a_{2k-1}}\,e^{\frac{2}{(y-y_s)^{2k-1}}\left[-\frac{a_0}{2k-1}-\frac{a_1}{2k-2}(y-y_s)-\cdots-a_{2k-2}(y-y_s)^{2k-2}+b_0(y-y_s)^{2k}+\cdots\right]} \tag{4'}$$

и при $a_0<0$ последнее выражение стремится к нулю при $y\to y_s-0$ быстрее любой положительной степени $(y-y_s)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если в точке y_s $B(y_s)=0$, $A(y_s)\neq 0$ и функции $A(y)$ и $B(y)$ — аналитические функции в точке y_s, то в этой точке предельная функция распределения $P(y)$ имеет производные любого порядка и $P^{(m)}(y_s)=0$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$.*

Доказательство. Допустим, что $A(y_s)<0$. Тогда, в силу леммы 1, $p(y)\equiv 0$ в интервале (y_s, y_1), где y_1 — ближайший к y_s справа нуль у нкции $B(y)$ или $y_1=+\infty$, и так как $p(y_s)=0$, то правосторонние производные любого порядка функции $P(y)$ в точке y_s равны нулю.

Если $p(y) \equiv 0$ и слева от y_s, то теорема доказана. Если же в некотором интервале (y_2, y_s), где $y_2 < y_s$,

$$p(y) = \frac{C}{B(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy}, \tag{3}$$

где $C \neq 0$, то в этом интервале

$$P''(y) = p'(y) = \frac{2C\left(A - \frac{1}{2}B'\right)}{B^2(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy} = \frac{\varphi_2(y)}{B^2(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy}, \quad \varphi_2(y_s) \neq 0,$$

$$P'''(y) = \frac{2C\left[\left(A' - \frac{1}{2}B''\right)B + 2A^2 - 3AB' + B'^2\right]}{B^3(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy} = \frac{\varphi_3(y)}{B^3(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy},$$

$$\varphi_3(y_s) \neq 0.$$

Аналогичные формулы имеем и для производных более высокого порядка. В силу леммы 2,

$$\lim_{y \to y_s - 0} P^{(m)}(y) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

и, так как $P'(y_s) = 0$, то теорема доказана.

§ 2

1. При $B(y) > 0$ предельное распределение единственно и определяется формулой

$$\frac{dP}{dy} = p(y) = \frac{C}{B(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy}, \tag{3}$$

где C определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\, dy = 1. \tag{5}$$

Примером такого распределения служит нормальный закон распределения $p(y) = Ce^{-ay^2}$ $(a > 0)$, являющийся решением уравнения

$$\Delta y = -ay\,\Delta t + \alpha\sqrt{\Delta t},$$

где $E\alpha = 0$, $E\alpha^2 = 1$.

Пусть теперь функция $B(y)$ имеет единственный нуль y_1 и $A(y_1) \neq 0$. Из леммы 1 следует, что в этом случае $p(y) \equiv 0$ в одном из интервалов $(-\infty, y_1)$, $(y_1, +\infty)$. Во втором из них функция распределения определяется однозначно по формуле (3), в силу условия (5). Например, уравнение

$$\Delta y = -(y - a)\,\Delta t + \alpha y\sqrt{\Delta t} \quad (a > 0),$$

где $E\alpha = 0$, $E\alpha^2 = 1$, определяет предельное распределение

$$p(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < y \leqslant 0, \\ \frac{C}{y^4} e^{-\frac{2a}{y}} & \text{при } y > 0, \end{cases}$$

где постоянную C находим из условия

$$C\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{2a}{y}}}{y^4}\,dy = 1.$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Если $B(y)$ обращается в нуль в единственной точке y_1 и $A(y_1) \neq 0$, то предельное распределение единственно и непрерывно. При $A(y_1) > 0$ имеем: $P(y_1) = 0$; при $A(y_1) < 0$ $P(y_1) = 1$.*

2. При помощи леммы 1 мы можем вывести достаточные условия единственности предельных распределений также и для случая, когда функция $B(y)$ обращается в нуль в l точках $(l > 1)$ и ни в одной из этих точек $A(y)$ не имеет нулей.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что дисперсионная функция $B(y)$ обращается в нуль в точках y_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ и $y_{i+1} > y_i$ для любого i. Тогда:*

1) *Предельное распределение единственно и непрерывно, если значения функции $A(y)$ в точках y_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ отличны от нуля и одинакового знака.*

2) *Предельное распределение единственно и непрерывно, если функция $A(y)$ положительна в точках $y_1, y_2, \ldots, y_s$ и отрицательна в точках $y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_l$, где s — одно из чисел $1, 2, \ldots, l-1$.*

Доказательство. 1. Если $A(y_1)$, $A(y_2), \ldots, A(y_l)$ — положительные числа, то, в силу леммы 1, функция $p(y) \equiv 0$ в интервалах $(-\infty, y_1)$, $(y_1, y_2), \ldots, (y_{l-1}, y_l)$ и отлична от нуля только в интервале $(y_l, +\infty)$. Если же $A(y_1)$, $A(y_2), \ldots, A(y_l)$ — отрицательны, то $p(y)$ отлична от нуля только в интервале $(-\infty, y_1)$. В обоих этих случаях функция предельного распределения определяется однозначно.

2. Если функция $A(y)$ положительна в точках $y_1, y_2, \ldots, y_s$ и отрицательна в точках $y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_l$, то функция $p(y)$ отлична от нуля только в интервале (y_s, y_{s+1}) и, следовательно, предельное распределение единственно.

Примечание 1. Доказанную теорему можно выразить в следующей форме: если дисперсионная функция $B(y)$ обращается в нуль в точках y_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$, в которых функция $A(y)$ отлична от нуля, то для единственности предельного распределения достаточно, чтобы нули функции $B(y)$, в которых $A(y) < 0$, не предшествовали на числовой оси нулям той же функции, в которых $A(y) > 0$.

Примечание 2. Условия теоремы имеют, в частности, место, если функция $A(y)$ отлична от нуля в замкнутом интервале $[y_1, y_l]$ или обращается в нуль в этом интервале в единственной точке, отличной от точек y_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$, убывая в ней ([4]).

Рассмотрим несколько примеров. Возьмем уравнения

$$\Delta y = -\frac{1}{4} y \Delta t + f_i(\alpha, y)\sqrt{\Delta t} \quad (i = 1, 2),$$

где

$$B_1(y) = \frac{(y-1)^2(y-2)^2}{1+y^2}, \quad B_2(y) = \frac{(y^2-1)^2}{1+y^2}.$$

Условия существования предельных законов распределения для стохастических процессов, определяемых этими уравнениями, выполнены, и функции $A(y)$ и $B(y)$ в каждом из данных уравнений удовлетворяют условиям теоремы: Имеем

$$p_1(y)=\begin{cases}\dfrac{C(1+y^2)(y-2)^{\frac{3}{2}}}{(y-1)^6}e^{\frac{1}{y-1}+\frac{5}{y-2}} & \text{в интервале } (-\infty,\ 1),\\ 0 & \text{при } \quad y\geqslant 1;\end{cases}$$

$$p_2(y)=\begin{cases}\dfrac{C(1+y^2)}{(y^2-1)^{\frac{9}{4}}}e^{\frac{1}{2(y^2-1)}} & \text{в интервале } (-1,\ +1),\\ 0 & \text{при } \quad |y|\geqslant 1.\end{cases}$$

В качестве более сложных примеров, в которых условия теоремы выполнены, но не выполнены более ограничительные условия примечания 2, возьмем уравнения

$$\Delta y = y(4-y^2)\Delta t + f_i(\alpha,\ y)\sqrt{\Delta t} \quad (i=3,\ 4),$$

где

$$B_3(y)=\frac{(y+1)^2(y-3)^2}{1+y^2}, \quad B_4(y)=\frac{(y^2-9)^2}{1+y^2}.$$

Данные уравнения удовлетворяют, соответственно, условиям 1) и 2) теоремы.

Предельные законы распределения определяются формулами:

$$p_3(y)=\begin{cases}\dfrac{C(1+y^2)}{(y+1)^{\frac{11}{8}}(y-3)^{\frac{261}{8}}}e^{-y^2-8y+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{y+1}+\frac{25}{y-3}\right)} & \text{в интервале } (-\infty,\ -1),\\ 0 & \text{при } \quad y\geqslant -1;\end{cases}$$

$$p_4(y)=\begin{cases}\dfrac{C(1+y^2)}{(y^2-9)^{17}}e^{-y^2+\frac{50}{y^2-9}} & \text{в интервале } (-3,+3),\\ 0 & \text{при } \quad |y|\geqslant 3.\end{cases}$$

3. Выведем теперь общий критерий единственности предельного распределения для случая, когда дисперсионная функция $B(y)$ обращается в нуль в точках y_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ l)$ и в этих точках функция $A(y)$ отлична от нуля, после чего покажем, что условия последней теоремы являются не только достаточными, но и необходимыми для единственности предельного распределения в рассматриваемом случае, если $A(y)$ и $B(y)$ — аналитические функции.

Начнем с установления вспомогательного предложения.

ЛЕММА 3. *Для того чтобы функция предельного распределения* $P(y)$ *не могла быть отличной от постоянной в интервале* $(y_i,\ y_{i+1})$, *где* y_i, *и* y_{i+1} — *два соседних нуля функции* $B(y)$, *необходимо и достаточно, чтобы не существовал интеграл*

$$I_i=\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}}\frac{e^{2\int\frac{A}{B}\,dy}}{B(y)}\,dy. \tag{6}$$

Аналогичное условие относится к интервалам $(-\infty, y_i)$, (y_l, ∞), *где* y_i *и* y_l — *соответственно крайний левый и правый нули функции* $B(y)$.

Доказательство. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} dP(y) = 1, \tag{5'}$$

то

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} p(y)\, dy \leqslant 1.$$

Но в интервале (y_i, y_{i+1}) $p(y)$ или тождественно равно нулю или определяется формулой

$$p(y) = \frac{C}{B(y)} e^{2\int \frac{A}{B} dy}, \tag{3}$$

где C — постоянная, отличная от нуля. Второй случай, следовательно, имеет место только при условии существования интеграла (6), чем доказана достаточность условия.

Необходимость условия вытекает из того, что при существовании интеграла (6) уравнение (2) имело бы в интервале (y_i, y_{i+1}) решение $P(y)$, отличное от постоянной, что противоречит условию.

Предположим теперь, что функция $B(y)$ обращается в нуль в l точках y_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ и ни в одной из этих точек $A(y)$ не имеет нулей. В этом случае, в силу теоремы 1, предельное распределение является непрерывным и дифференцируемым и $P'(y_i) = 0$; следовательно, в силу условия (5),

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\, dy = \sum_{j=0}^{l} C_j \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{e^{2\int \frac{A}{B} dy}}{B(y)}\, dy \qquad 1$$

$$(y_0 = -\infty,\ y_{l+1} = +\infty), \tag{5''}$$

где C_j — константы. Отсюда следует, что при указанных условиях функция предельного распределения $P(y)$ зависит, вообще говоря, от l произвольных постоянных. Если интеграл

$$I_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{e^{2\int \frac{A}{B} dy}}{B(y)}\, dy, \tag{6}$$

где j — одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, l$, не существует, то, в силу леммы 3, $p(y) \equiv 0$ в интервале (y_j, y_{j+1}) и C_j, как и произведение $C_j I_j$, следует считать равными нулю. Отметим, что, в силу условия (5''), существует хотя бы один из интегралов I_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, l;\ y_0 = -\infty,\ y_{l+1} = +\infty)$.

ТЕОРЕМА 5. (Критерий единственности непрерывного предельного распределения). *Если дисперсионная функция* $B(y)$ *обращается в нуль в точках* y_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ *и* $A(y)$ *отлична от нуля в этих точках,*

то необходимым и достаточным условием единственности предельного распределения является существование только одного из интегралов:

$$I_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{e^{2\int \frac{A}{B}\,dy}}{B(y)}\,dy, \tag{6}$$

$$(j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ y_0 = -\infty,\ y_{l+1} = +\infty).$$

Доказательство. Условие достаточно, так как при его выполнении функция предельного распределения определяется однозначно, а именно:

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{C}{B(y)} e^{2\int \frac{A}{B}\,dy} & \text{в интервале } (y_j,\ y_{j+1}), \\ 0 & \text{при } y \leqslant y_j \text{ и } y \geqslant y_{j+1}, \end{cases}$$

где j — одно из чисел $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l$, а именно то, для которого интеграл (6) существует.

Условие необходимо, так как при существовании двух или нескольких интегралов (6) постоянные C_j однозначно не определяются из равенств

$$\sum_{j=0}^{l} C_j I_j = 1. \tag{5''}$$

В каждом из приведенных выше примеров стохастических дифференциальных уравнений

$$\Delta y = A(y)\,\Delta t + f(\alpha,\ y)\sqrt{\Delta t} \tag{1'}$$

функция $B(y)$ имеет нули, не совпадающие с нулями функции $A(y)$, и существует только один из интегралов (6), что и обеспечивает единственность предельного распределения. Например, уравнение

$$\Delta y = -(y - a)\,\Delta t + \alpha y\sqrt{\Delta t} \quad (a > 0),$$

где $E\alpha = 0$, $E\alpha^2 = 1$, определяет предельное распределение

$$p(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < y \leqslant 0, \\ \dfrac{C}{y^4} e^{-\frac{2a}{y}} & \text{при } y > 0, \end{cases}$$

так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{2a}{y}}}{y^4}\,dy$$

не существует.

4. При помощи установленного общего критерия единственности непрерывного предельного распределения докажем, что условия теоремы 4 являются также и необходимыми для единственности предельного распределения в случае несовпадения нулей аналитических функций $A(y)$ и $B(y)$.

ЛЕММА 4. *Если аналитические функции* $A(y)$ *и* $B(y)$ *удовлетворяют в точке* y_s *условиям* $B(y_s)=0$, $A(y_s)>0$, *то функция*

$$\frac{e^{2\int \frac{A}{B} dy}}{B(y)} \tag{7}$$

допускает существование интеграла

$$\int\limits_{y_s}^{y'} \frac{e^{2\int \frac{A}{B} dy}}{B(y)} dy \tag{6'}$$

справа от точки y_s *и не допускает этого слева от* y_s, *т. е. интеграл существует при* $y_s<y'<y_{s+1}$ *и не существует при* $y_{s-1}<y'<y_s$, *где* y_{s+1} *и* y_{s-1} — *ближайшие к* y_s *справа и слева нули функции* $B(y)$, *или* $y_{s-1}=y_0=-\infty$, $y_{s+1}=+\infty$.

Если же $A(y_s)<0$, *то функция* (7) *допускает существование интеграла* (6') *слева от точки* y_s *и не допускает этого справа от нее.*

Доказательство. При условии, что функция $B(y)$ имеет в точке y_s нуль кратности $2k$ и $A(y_s)\neq 0$, имеет место формула (4') § 1, из которой следует:

$$\frac{e^{2\int \frac{A}{B} dy}}{B(y)} = \frac{(y-y_s)^{2(a_{2k-1}-k)}}{B_1(y)} \cdot$$

$$e^{\frac{2}{(y-y_s)^{2k-1}}\left[-\frac{a_1}{2k-1}-\frac{a_1}{2k-2}(y-y_s)-\cdots-a_{2k-2}(y-y_s)^{2k-2}+b_0(y-y_s)^{2k}+\cdots\right]},$$

где $B_1(y_s)\neq 0$ и $a_0=\frac{A(y_s)}{B_1(y_s)}$, т. е. при $A(y_s)>0$ ($A(y_s)<0$) функция (7) стремится к нулю при $y\to y_s+0$ ($y\to y_s-0$) быстрее любой положительной степени $(y-y_s)$ и к бесконечности при $y\to y_s-0$ ($y\to y_s+0$) быстрее любой положительной степени $\frac{1}{y-y_s}$, что и доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 6. *Если при любом сколь угодно большом* t *имеет место неравенство* $E|y_n|^\lambda\leqslant L$ *и* $A(y)$, $B(y)=Ef^2(\alpha, y)$ — *аналитические функции от* y, *не имеющие общих нулей, то предельное распределение* $P(y)$, *определяемое уравнением*

$$\Delta y = A(y)\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \tag{1'}$$

единственно в том и только в том случае, если нули функции $B(y)$, *в которых* $A(y)<0$, *не предшествуют на числовой оси нулям функции* $B(y)$, *в которых* $A(y)>0$.

Доказательство. Достаточность условия доказана выше (см. примечание 1 к теореме 4). Для доказательства необходимости условия теоремы рассмотрим сначала частный случай его невыполнения, а именно: пусть

$$A(y_1)<0,\ A(y_2)<0,\ \ldots,\ A(y_s)<0;$$

$$A(y_{s+1})>0,\ A(y_{s+2})>0,\ \ldots,\ A(y_l)>0,\quad 1\leqslant s<l.$$

В этом случае, в силу леммы 4 и условия $E|y_n|^\lambda \leqslant L$, функция (7) допускает существование интегралов

$$\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{e^{2\int \frac{A}{B}dy}}{B(y)}\,dy \quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ l;\ y_0=-\infty,\ y_{l+1}=+\infty) \qquad (6)$$

в интервалах $(-\infty,\ y_l)$ и $(y_l,\ +\infty)$ и, следовательно, предельное распределение не является единственным.

Рассмотрим теперь общий случай невыполнения условия теоремы; пусть имеются хотя бы два нуля функции $B(y)$ y_p и y_r, удовлетворяющие условиям:

$$y_p < y_r, \quad A(y_p) < 0, \quad A(y_r) > 0.$$

В этом случае интегралы (6) существуют хотя бы по одному интервалу справа от точки y_r и хотя бы по одному интервалу слева от точки y_p, а также, возможно, по одному или нескольким интервалам между этими точками. Отсюда следует, что предельное распределение не является единственным.

Приведем пример уравнения

$$\Delta y = A(y)\,\Delta t + f(\alpha,\ y)\sqrt{\Delta t}, \qquad (1')$$

$Ef(\alpha,\ y)=0,\ Ef^2(\alpha,\ y)=B(y)$, удовлетворяющего условиям существования предельных законов распределения для $t\to\infty$, для которого условие последней теоремы не выполнено.

Пусть

$$A(y)=y(4-y^2), \quad B(y)=\frac{(y^2-1)^2}{1+y^2},$$

т. е. $A(-1)<0,\ A(1)>0$. Вычисления приводят к результату:

$$p(y)=\begin{cases} \dfrac{C_1(1+y^2)}{y^2-1}\,e^{-y^2-\frac{6}{y^2-1}} & \text{в интервале } (-\infty,\ -1), \\ 0 & \text{при } |y|\leqslant 1, \\ \dfrac{C_2(1+y^2)}{y^2-1}\,e^{-y^2-\frac{6}{y^2-1}} & \text{в интервале } (1,\ \infty), \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$C_1\geqslant 0, \quad C_2\geqslant 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{-1} p(y)\,dy + \int\limits_{1}^{\infty} p(y)\,dy = 1,$$

и так как C_1 и C_2 однозначно не определяются, то предельное распределение не является единственным.

§ 3

1. В предыдущих параграфах мы изучили вопросы единственности предельных распределений $P(y) = \lim_{t \to \infty} P(y, t)$, определяемых уравнениями

$$\Delta y = A(y)\,\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t} \qquad (1')$$

при условии, что нули функций $A(y)$ и $B(y)$ не совпадают. При этом условии предельное распределение, если оно единственно, не зависит от закона распределения для y в любой конечный момент времени $t = t_0$.

Допустим теперь, что y_s является общим нулем функций $A(y)$ и $B(y)$ и в некоторый момент времени $t = t_0$ вероятность $\{y = y_s\} = a > 0$. Из уравнения (1′) следует, что в этом случае предельная функция распределения $P(y)$ в точке y_s разрывна и $dP(y_s) \geqslant a$.

Если функции $A(y)$ и $B(y)$ имеют несколько общих нулей, то, исходя из произвольного начального распределения (для $t = t_0$), мы не можем получить при помощи уравнения (1′) единственного предельного распределения (как для конечного t, так и для $t \to \infty$), в силу того, что приращения предельной функции распределения остаются неопределенными в общих нулях функций $A(y)$ и $B(y)$. Отсюда следует, что предельное распределение $P(y) = \lim_{t \to \infty} P(y, t)$, не зависящее от распределения для y в момент $t = t_0$, возможно только при условии, если функции $A(y)$ и $B(y)$ имеют не более одного общего нуля, и так как при $t = t_0$ вероятность $\{y = y_s\}$ может быть равной любому числу a, $0 \leqslant a \leqslant 1$, то при наличии одного совпадающего нуля функций $A(y)$ и $B(y)$ уравнение (1′) определяет единственное предельное распределение $P(y)$ в том и только в том случае, если $dP(y_s) = 1$, и, следовательно, $p(y) \equiv 0$ при $y \gtreqless y_s$.

2. Найдем наиболее общие достаточные условия единственности предельных распределений при наличии одного совпадающего нуля функций $A(y)$ и $B(y)$.

ЛЕММА 5 (3). *Пусть в интервале (a, b) функции $A(y)$ и $B(y)$ обращаются в нуль в точке y и $B(y) > 0$ в других точках этого интервала. Если в точке y_s $A(y)$ переходит от положительных значений к отрицательным, то для всех предельных распределений $p(y) \equiv 0$ для $y \gtreqless y_s$ из интервала (a, b).*

Доказательство. В силу условия, имеем $(y - y_s)A(y) < 0$ в некоторой окрестности точки y_s, $y \gtreqless y_s$. Пусть $(y - y_s)A(y) < 0$ при $y \gtreqless y_s$ из интервала (y', y''), где $a \leqslant y' < y_s < y'' \leqslant b$.

Из уравнения (2) имеем

$$\int_{y_s}^{y}\int_{y_s}^{y} (PA')\,dy\,dy - \int_{y_s}^{y}\left[P\left(A + \frac{1}{2}B'\right)\right]dy + \frac{1}{2}PB = 0$$

или

$$\int_{y_s}^{y} A\,dP + \frac{1}{2}BP' = 0 \quad (y' < y < y''),$$

и из условий $BP' \geqslant 0$ и $(y - y_s) A(y) < 0$ следует, что $P'(y) = 0$ для любого $y \gtreqless y_s$ из интервала (y', y''); так как $B(y) > 0$ в интервале (a, b) при $y \neq y_s$, то справедливость леммы доказана.

Следствие. Если в точке y_s функции $A(y)$ и $B(y)$ обращаются в нуль и $A(y)$ в точке y_s убывает, то $p(y) \equiv 0$ в интервалах (y_{s-1}, y_s) и (y_s, y_{s+1}), где y_{s-1} и y_{s+1} — ближайшие к y_s слева и справа нули функции $B(y)$ или $y_{s-1} = y_0 = -\infty$, $y_{s+1} = +\infty$.

Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функция $B(y)$ обращается в нуль в единственной точке y_1 и $A(y_1) = 0$. Если в точке y_1 $A(y)$ переходит от положительных значений к отрицательным, то предельное распределение единственно и $dP(y_1) = 1$.*

Уравнение

$$\Delta y = -y\Delta t + \alpha y \sqrt{\Delta t},$$

где $E\alpha = 0$, $E\alpha^2 = 1$, удовлетворяет указанным условиям и определяет единственное предельное распределение $P(y)$, $dP(0) = 1$ [см. ([1]), стр. 107—108].

ТЕОРЕМА 8. *Предположим, что дисперсионная функция $B(y)$ обращается в нуль в точках y_i $(i = 1, 2, \ldots, l;\ y_i < y_{i+1})$, имея общий нуль $y = y_s$ $(1 \leqslant s \leqslant l)$ с функцией $A(y)$. В этом случае предельное распределение единственно и $dP(y_s) = 1$, если функция $A(y)$ положительна в точках $y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}$, отрицательна в точках $y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y^l$ и убывает в точке y_s.*

Доказательство. Единственность предельного распределения вытекает из того, что

1) $p(y) \equiv 0$, в силу леммы 1, в интервалах
$(-\infty, y_1)$ $(y_1, y_2), \ldots, (y_{s-2}, y_{s-1}), (y_{s+1}, y_{s+2}), \ldots, (y_{l-1}, y_l), (y_l, +\infty)$;

2) $p(y) \equiv 0$, в силу леммы 5, в интервалах (y_{s-1}, y_s) и (y_s, y_{s+1});

3) $p(y) = 0$ во всех нулях функции $B(y)$, кроме точки y_s, в силу теоремы 1.

Таким образом, $p(y) \equiv 0$ при $y \gtreqless y_s$ и $dP(y_s) = 1$.

Примечание. Условия теоремы имеют, в частности, место, если в замкнутом интервале $[y_1, y_l]$ функция $A(y)$ обращается в нуль только в точке y_s, убывая в ней ([4]).

Уравнение

$$\Delta y = y(4 - y^2)\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t},$$

где

$$B(y) = \frac{(y^2 - 9)^2 (y + 2)^2}{(1 + y^2)^2},$$

удовлетворяет условиям теоремы и определяет дискретное предельное распределение: $dP(-2) = 1$.

3. Чтобы выяснить вопрос о необходимости условий предыдущей теоремы для единственности предельного распределения при наличии совпадающего нуля функций $A(y)$ и $B(y)$, установим критерий единственности дискретного предельного распределения, аналогичный критерию единственности непрерывного предельного распределения, устано-

вленному в § 2 для случая, когда функции $A(y)$ и $B(y)$ не имеют общих нулей.

ТЕОРЕМА 9. (Критерий единственности дискретного предельного распределения). *Предположим, что дисперсионная функция $B(y)$ обращается в нуль в точках y_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$, имея при этом один общий нуль y_s $(1 \leqslant s \leqslant l)$ с функцией $A(y)$. В этом случае для единственности предельного распределения необходимо и достаточно, чтобы не существовал ни один из интегралов*

$$I_j = \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{e^{2\int \frac{A}{B}\,dy}}{B(y)}\,dy \tag{6}$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots, l; \; y_0 = -\infty, \; y_{l+1} = +\infty).$$

Доказательство. 1) Условие необходимо, так как при его невыполнении не определяются однозначно постоянные C_i и приращение функций предельного распределения в точке y_s из условия

$$\sum_{j=0}^{l} C_j I_j + dP(y_s) = 1.$$

2) Условие достаточно, так как при его выполнении функция предельного распределения удовлетворяет условиям:

$$P(y) = 0 \text{ при } y < y_s, \quad P(y) = 1 \text{ при } y > y_s, \quad dP(y_s) = 1.$$

Анализируя условия теоремы 8 с точки зрения критерия единственности дискретного предельного распределения и учитывая результаты предыдущего параграфа, мы видим, что в случае аналитических функций $A(y)$ и $B(y)$ следует лишь изучить вопрос о том, является ли необходимым для единственности предельного распределения убывание функции $A(y)$ в точке y_s.

ЛЕММА 6. *Если аналитические функции $A(y)$ и $B(y)$ удовлетворяют условиям*

$$A(y) = (y - y_s)^m \cdot \varphi(y), \quad \varphi(y_s) = a \neq 0,$$

$$B(y) = (y - y_s)^{2k} \psi(y), \quad \psi(y_s) = b > 0,$$

то для того чтобы функция

$$\frac{e^{2\int \frac{A}{B}\,dy}}{B(y)} \tag{7}$$

не допускала существования интеграла

$$\int\limits_{y_s}^{y'} \frac{e^{2\int \frac{A}{B}\,dy}}{B(y)}\,dy \tag{6'}$$

ни справа, ни слева от точки y_s, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*:

a) $m \geqslant 2k$,

b) $m = 2k - 1$ *и* $a \leqslant b\left(k - \frac{1}{2}\right)$,

c) $m < 2k - 1$, m — *нечетно и* $a < 0$.

Доказательство. a) При $m \geqslant 2k$ из условий леммы имеем:

$$\frac{e^{2\int \frac{A}{B}\,dy}}{B(y)} = \frac{1}{(y-y_s)^{2k}\cdot\psi(y)}\, e^{2\int\left[\frac{a}{b}(y-y_s)^{m-2k}+a_1(y-y_s)^{m-2k+1}+\cdots\right]dy}, \quad \psi(y_s) > 0 \tag{7'}$$

и функция (7′) не допускает существования интегралов (6′) как справа, так и слева от точки y_s.

b) Если $m = 2k - 1$, то

$$\frac{e^{2\int \frac{A}{B}\,dy}}{B(y)} = \frac{1}{(y-y_s)^{2k}\psi(y)}\, e^{2\int \frac{\left[\frac{a}{b}+a_1(y-y_s)+a_2(y-y_s)^2+\cdots\right]}{y-y_s}\,dy} =$$

$$= \frac{e^{2\left[a_1(y-y_s)+\frac{a_2}{2}(y-y_s)^2+\cdots\right]}}{(y-y_s)^{2\left(k-\frac{a}{b}\right)}\psi(y)}, \quad \psi(y_s) > 0, \tag{7''}$$

и для того чтобы интегралы (6′) не существовали при $y' \gtrless y_s$, необходимо и достаточно, чтобы $2\left(k-\frac{a}{b}\right) \geqslant 1$, т. е. $a \leqslant b\left(k-\frac{1}{2}\right)$.

c) При $m < 2k - 1$ имеем:

$$\frac{e^{2\int \frac{A}{B}\,dy}}{B(y)} = \frac{1}{(y-y_s)^{2k}\psi(y)}\cdot$$

$$\cdot\, e^{2\int\left[\frac{a}{b(y-y_s)^{2k-m}}+\frac{a_1}{(y-y_s)^{2k-m-1}}+\cdots+\frac{a_{2k-m-1}}{y-y_s}+b_0+b_1(y-y_s)+\cdots\right]dy} =$$

$$= \frac{1}{(y-y_s)^{2(k-a_{2k-m-1})}\psi(y)}\cdot e^{\frac{2}{(y-y_s)^{2k-m-1}}\left[-\frac{a}{b(2k-m-1)}-\frac{a_1}{2k-m-2}(y-y_s)+\cdots\right]}, \tag{7'''}$$

и для того чтобы интегралы (6′) не существовали при $y' \gtrless y_s$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $a < 0$ и m — нечетное число.

Из приведенной леммы вытекает, что и при $A(y_{s-1})>0$, $A(y_{s+1})<0$, убывание функции $A(y)$ в точке y_s не является необходимым для того, чтобы не существовали интегралы

$$\int_{y_{s-1}}^{y_s} \frac{e^{2\int \frac{A}{B}dy}}{B(y)}dy, \quad \int_{y_s}^{y_{s+1}} \frac{e^{2\int \frac{A}{B}dy}}{B(y)}dy,$$

и, следовательно, для того чтобы $p(y)\equiv 0$ в интервалах (y_{s-1}, y_s) и (y_s, y_{s+1}). Действительно, убывание функции $A(y)$ в точке y_s (т. е. m — нечетно и $a<0$) является частным случаем условий леммы; однако при выполнении этих условий возможно как убывание, так и возрастание функции $A(y)$ в точке y_s, а также сохранение знака этой функции при переходе через точку y_s.

ТЕОРЕМА 10. *Если при любом сколь угодно большом t имеет место неравенство $E|y_n|^\lambda \leqslant L$ и $A(y)$, $B(y)$ — аналитические функции от y, имеющие один общий нуль $y=y_s$, то предельное распределение $P(y)$, определяемое уравнением*

$$\Delta y = A(y)\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \tag{1'}$$

единственно и $dP(y_s)=1$ в том и только в том случае, если при

$$A(y)=(y-y_s)^m\cdot\varphi(y), \quad \varphi(y_s)=a\neq 0,$$

$$B(y)=(y-y_s)^{2k}\cdot\psi(y), \quad \psi(y_s)=b>0,$$

выполняются условия:

1. *функция $A(y)$ положительна в нулях функции $B(y)$, лежащих слева от y_s, и отрицательна в нулях функции $B(y)$, лежащих справа от y_s, и*

2.

a) $m\geqslant 2k$

или

b) $m=2k-1$ *и* $a\leqslant b\left(k-\frac{1}{2}\right)$

или

c) $m<2k-1$, m — *нечетно и* $a<0$.

Доказательство. В силу лемм 4 и 6 и теоремы 9, предельное распределение единственно и $dP(y_s)=1$.

В виде примеров рассмотрим уравнения:

$$\Delta y = y^2(2-y)\Delta t + f_1(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad B_1(y)=\frac{(y-3)^2y^2}{1+y^2},$$

$$\Delta y = y(4-y^2)\Delta t + f_2(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad B_2(y)=\frac{(y^2-9)^2y^2}{(1+y^2)^2}.$$

В первом из этих уравнений имеет место условия 1 и 2a) теоремы, во втором — условия 1 и 2b), и, следовательно, каждое из этих уравнений определяет единственное предельное распределение: $dP(0)=1$.

В приведенных уравнениях функция $A(y)$ не убывает в общем нуле функций $A(y)$ и $B(y)$; в первом из них она сохраняет знак $+$ при переходе через точку $y=0$, во втором из них она возрастает.

Приведем в заключение примеры уравнений, не удовлетворяющих условиям последней теоремы и, следовательно, определяющих предельные распределения не единственным образом.

В уравнении

$$\Delta y = y(4-y^2)\Delta t + f_3(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad B_3(y) = \frac{y^2(y^2-1)^2}{(1+y^2)^2},$$

функции $A(y)$ и $B(y)$ не удовлетворяют ни условию 1, ни условию 2 теоремы 10. Произведя вычисления, получим:

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{C_1(1+y^2)^2 y^6}{(y^2-1)^6} e^{-y^2-\frac{12}{y^2-1}} & \text{в интервале } (-\infty, -1), \\ 0 & \text{при } |y| \leqslant 1, \ y \neq 0, \\ \dfrac{C_2(1+y^2)^2 y^6}{(y^2-1)^6} e^{-y^2-\frac{12}{y^2-1}} & \text{в интервале } (1, \infty) \end{cases}$$

и $dP(0) = C_3$, где C_1, C_2, C_3 — положительные постоянные, удовлетворяющие единственному условию

$$\int_{-\infty}^{-1} p(y)\,dy + \int_{1}^{\infty} p(y)\,dy + C_3 = 1,$$

из которого они однозначно не определяются.

В уравнении

$$\Delta y = \frac{81}{4} y(4-y^2)\Delta t + f_4(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad B_4(y) = \frac{(y^2-9)^2 y^2}{(1+y^2)^2},$$

функции $A(y)$ и $B(y)$ не удовлетворяют условию 2 теоремы 10. Произведя вычисления, получим:

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{C_1(1+y^2)^2}{(y^2-9)^{327}} e^{-\frac{81}{4}y^2+\frac{1161}{y^2-9}} & \text{в интервале } (-3, 0), \\ \dfrac{C_2(1+y^2)^2}{(y^2-9)^{327}} e^{-\frac{81}{4}y^2+\frac{1161}{y^2-9}} & \text{в интервале } (0, 3), \\ 0 & \text{в интервалах } (-\infty, -3], \ [3, \infty) \end{cases}$$

и $dP(0) = C_3$, и так как постоянные C_1, C_2, C_3 условием

$$\int_{-3}^{0} p(y)\,dy + \int_{0}^{3} p(y)\,dy + C_3 = 1$$

однозначно не определяются, то предельное распределение не единственно.

Поступило
11.XI.1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений, Труды физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 5 (1934), 95—124.

[2] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, М.— Л., 1946.

[3] Гинзбург Г. М., О предельных законах распределения в стохастических процессах, Записки научно-исслед. ин-та математики и механики ХГУ и Харьковск. матем. общ., сер. 4, XVII, 65 (1940), 65—73.

[4] Гинзбург Г. М., О достаточных условиях единственности предельных распределений, Доклады Ак. Наук СССР, 30, № 4 (1941), 293—295.